

4. Две указанные выше классификации сил, действующих на материальную систему, играют важную роль в динамике, поскольку с каждой из них связывается целая группа общих теорем и последующих конкретных приложений. Не будет поэтому лишним вспомнить, что аналогичные обстоятельства имели место в статике, где сначала, разделив силы на внешние и внутренние, мы пришли к *основным условиям равновесия* (т. I, гл. XII), приложимым в качестве необходимых к всевозможным типам материальных систем (например, к стержневым системам, нитям и т. д., гл. XIV) и, в частности, являющимся достаточными для равновесия твердого тела (гл. XIII) затем в общей статике (гл. XV), отправляясь от разделения сил на активные силы и реакции и присоединяя ограничительные предположения о природе связей (отсутствие трения), мы пришли, применяя принцип виртуальной работы, к исключению неизвестных реакций из условий равновесия.

В настоящей главе мы будем придерживаться, применительно к вопросам динамики, того же порядка изложения. В § 2 на основании разделения сил, действующих на какую-нибудь систему, на внешние и внутренние мы установим два векторных уравнения (*основные уравнения движения*), применяя которые к любой возможной системе мы придем к весьма разнообразным выводам и которые в случае твердого тела, как мы это увидим в гл. VII будут *достаточны* для определения движения.

В §§ 3—6, наоборот, мы будем исходить из деления сил на активные силы и реакции связей и покажем, в предположении отсутствия трения, как и в этом динамическом случае принцип виртуальной работы позволит исключить из дифференциальных уравнений движения в самом общем виде неизвестные реакции. Мы придем таким образом к классическим уравнениям Лагранжа (§ 6) и посредством ряда дополнительных выводов и конкретных примеров покажем их огромную важность как в теоретических вопросах, так и для приложений (§§ 7—9).

## § 2. Теоремы о количестве движения и о моменте количества движения. Основные уравнения движения

5. ТЕОРЕМА О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ. Рассматривая материальную систему  $S$  из  $N$  точек  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) с произвольными связями, находящуюся под действием каких угодно сил, разобьем совокупность *всех* сил, действующих на систему (как прямо приложенных, так и реакций связей), на *внешние* и *внутренние* и обозначим через  $F_i$  равнодействующую всех внешних сил, действующих на любую точку  $P_i$ , а через  $f_i$  — равнодействующую всех внутренних сил. Полная сила, действующая на точку  $P_i$ , будет равна  $F_i + f_i$ , так что уравнения движения системы можно будет написать в виде

$$m_i a_i = F_i + f_i \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

Но внутренние силы  $f_i$  вследствие самой природы их составляют на основании принципа о равенстве действия и противодействия (т. I, гл. XII, § 1) систему векторов, эквивалентную нулю (т. е. имеющую равную нулю результирующую и результирующий момент). Отсюда следует, что, складывая почленно  $N$  уравнений (2), мы получим

$$\sum_{i=1}^N m_i a_i = \sum_{i=1}^N F_i$$

или же, обозначая через  $R^{(e)}$  результирующую всех внешних сил,

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = R^{(e)};$$

достаточно вспомнить определение количества движения (предыдущая глава, п. 12)

$$Q = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i,$$

чтобы придать предыдущему соотношению вид

$$\frac{dQ}{dt} = R^{(e)}. \quad (3)$$

Поэтому имеем (теорема о количестве движения или импульса), что *производная от количества движения какой угодно материальной системы в любой момент равна результирующей внешних сил.*

**6. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ.** Если мы примем во внимание (предыдущая глава, п. 12), что

$$Q = m\mathbf{v}_G,$$

где  $m$  — полная масса системы и  $\mathbf{v}_G$  — скорость центра тяжести  $G$ , то равенство (3), обозначая через  $\mathbf{a}_G$  ускорение точки  $G$ , можно будет написать в виде

$$m\mathbf{a}_G = R^{(e)}. \quad (3')$$

Мы имеем здесь так называемую теорему о движении центра тяжести:

*Какова бы ни была рассматриваемая материальная система и каковы бы ни были силы, под действием которых она находится, центр тяжести ее движется так, как если бы он был материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса системы и которая находится под действием результирующей всех внешних сил, действующих на систему.*

С аналитической точки зрения эта теорема является только другой формой теоремы о количестве движения, но по своему смыслу она более выразительна. В частности, для всякой системы она обнаруживает существование точки (внутренней), т. е. центра тяжести, движение которой строго следует закону движения материальной точки; тем самым оправдывается замена тела с конечными размерами простой материальной точкой не только в тех случаях, когда этими размерами можно пренебречь, но даже и тогда, когда размеры тела значительны, но достаточно принять во внимание движение только одной его точки.

7. В виде простейшего приложения теоремы о движении центра тяжести рассмотрим тело, обладающее *внутренней* структурой, сколь угодно сложной, и находящееся исключительно под действием силы тяжести, например животное, падающее в пустоте. Теорема предыдущего пункта в этом случае показывает, что никакие внутренние усилия не в состоянии изменить траекторию центра тяжести; действительно, все возникающие при этом силы, как бы они ни были разнообразны и велики, остаются все же только внутренними, и центр тяжести будет описывать параболу, определяемую действием только силы тяжести.

Для избежания недоразумений не лишне подчеркнуть, что это совершенно не исключает возможности полета; действительно, в этом случае существенную роль играет воздух, и посредством крыльев или каких-либо других средств вызывается также и внешнее *воздействие* на рассматриваемую систему.

8. Если для какой-нибудь системы  $S$  результирующая  $R^{(e)}$  внешних сил постоянно равна нулю, то из уравнения (3') следует, что  $a_G = 0$ , т. е. *центр тяжести движется прямолинейно и равномерно*.

Это и есть так называемая *теорема о сохранении движения центра тяжести*. Она, например, должна иметь силу, по крайней мере приблизительно, для солнечной системы, поскольку можно пренебречь действиями со стороны звезд, так как эти действия вследствие огромных расстояний оказываются ничтожными по сравнению со взаимными притяжениями между Солнцем и планетами. Действительно, на основании оценки среднего движения из большого числа астрономических наблюдений найдено, что центр тяжести солнечной системы, расположенный вблизи от центра Солнца, движется со скоростью 20 км/сек к некоторой точке небесной сферы, расположенной вблизи от Веги и называемой *апексом*.

9. Возвращаясь к какой угодно системе, предположим вообще, что составляющая  $R_a^{(e)}$  результирующей  $R^{(e)}$  по некоторому опреде-

ленному направлению  $a$  постоянно равна нулю. В таком случае, проектируя на это направление уравнение (3'), получим  $a_{G|a} = 0$  или  $\frac{dv_{G|a}}{dt} = 0$ ; отсюда заключаем, что во время движения системы проекция  $v_{G|a}$  скорости центра тяжести на направление  $a$  остается постоянной.

Эти столь простые и в то же время столь общие результаты очень часто используются для конкретных приложений. Чтобы указать в виде примера на одно следствие из последнего замечания, докажем, что если бы не было трения, то нельзя было бы ходить; точнее, человек, стоящий вертикально на горизонтальном, абсолютно гладком полу, не смог бы ни при каком мускульном усилии перейти в другое место, если бы он вначале был в покое.

Действительно, так как трение отсутствует, то внешние силы (вес и реакция пола) обе вертикальны, так что для любого горизонтального направления  $a$  мы имеем  $v_{G|a} = \text{const}$ , а так как человек вначале предполагается находящимся в покое, то для него постоянно имело бы место равенство  $v_{G|a} = 0$ , т. е. горизонтальная проекция центра тяжести оставалась бы неподвижной. Этот человек, следовательно, никоим образом не смог бы вызвать собственного перемещения в каком-нибудь горизонтальном направлении: если он переместит какую-нибудь часть своего тела в одном направлении, то какая-нибудь другая часть его тела необходимо должна будет переместиться в противоположном направлении (что вызвало бы — самое большее — подъем или опускание центра тяжести вдоль вертикали). В действительности это теоретически возможное положение не имеет места, и движение удается начать, используя трение.

**10. ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ.** Возьмем снова основное уравнение (2)

$$m_i a_i = F_i + f_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

и будем рассматривать в качестве центра приведения некоторую точку  $O$ , движущуюся по какому-нибудь определенному закону или, в частности, находящуюся в покое (относительно нашей системы отсчета).

Если, далее, умножим векторно это уравнение (2) на  $\vec{OP}_i$  и просуммируем обе части по  $i$  от  $i = 1$  до  $i = N$ , помня, что результирующий момент внутренних сил  $f_i$  относительно любой точки  $O$  постоянно равен нулю, то получим

$$\sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \times m_i a_i = \sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \times F_i,$$

где в правой части остается только результирующий момент внешних сил  $F_i$  относительно точки  $O$ , который мы обозначим через  $M^{(e)}$ .

Но в п. 14 предыдущей главы было показано, что если обозначить через  $K$  результирующий момент количеств движения системы и через  $\mathbf{v}'$  скорость (относительно нашей системы отсчета) центра приведения  $O$ , то будем иметь тождественно

$$\sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \frac{dK}{dt} + \mathbf{v}' \times \mathbf{Q}.$$

Поэтому предыдущее соотношение можно написать в особенно удобной форме

$$\frac{dK}{dt} + \mathbf{v}' \times \mathbf{Q} = M^{(e)}; \quad (4)$$

Это уравнение сохраняет свое значение при каком угодно законе движения центра приведения  $O$ . Но в общих выводах динамики оно чаще всего применяется для двух частных случаев: 1) когда центр  $O$  неподвижен; 2) когда центр  $O$ , будучи, вообще говоря, движущимся, совпадает во все время движения с центром тяжести материальной системы. В обоих случаях (так как в первом имеем  $\mathbf{v}' = 0$ , а во втором вектор  $\mathbf{Q}$  параллелен  $\mathbf{v}'$ ) исчезает член  $\mathbf{v}' \times \mathbf{Q}$  (ср. предыдущую главу, п. 14) и уравнение (4) принимает более простой вид

$$\frac{dK}{dt} = M^{(e)}; \quad (4')$$

в этом виде оно вполне соответствует уравнению (3). Уравнение (4') выражает теорему о моменте количеств движения (или кинетическом моменте):

*Как бы ни двигалась материальная система, производная по времени от момента количеств движения относительно какой-нибудь неподвижной точки или точки, совпадающей с центром тяжести, в любой момент равна результирующему моменту всех внешних сил относительно той же точки.*

Эта теорема доказана здесь при единственном неявном предположении, что движение системы отнесено к осям, неподвижным относительно неподвижных звезд или, по крайней мере, находящимся относительно их в прямолинейном и равномерном поступательном движении.

Но мы знаем (предыдущая глава, п. 13), что если за центр приведения принять центр тяжести, то момент количеств движения (абсолютный) системы совпадет с моментом количеств движения относительно центра тяжести; поэтому уравнение (4') будет справедливо даже и тогда, когда вместо  $K$  берется этот последний момент, лишь бы результирующий момент  $M^{(e)}$  внешних сил вычислялся относительно центра тяжести.

Наконец, почти нет необходимости упоминать, что если  $a$  есть *какая-нибудь* неподвижная прямая, проходящая через центр приведения, предполагаемый неподвижным, или прямая, проходящая через

центр тяжести  $G$  и сохраняющая неизменное направление, то равенство (4') после проектирования на  $a$  дает

$$\frac{dK_a}{dt} = M_a^{(e)}, \quad (5)$$

если за центр приведения выбирается центр тяжести  $G$ .

Соотношение (5) выражает *теорему о моменте количества движения относительно оси*.

11. Если действующие на систему силы таковы, что результирующий момент  $M^{(e)}$  внешних сил остается постоянно равным нулю, то из равенства (4') следует, что *во все время движения вектор  $K$  остается постоянным* (по величине и направлению).

В этом случае постоянным будет также и положение плоскости, перпендикулярной к  $K$  и проходящей через центр приведения  $O$ .

Такая плоскость называется *неизменяемой плоскостью системы*, а уравнение

$$K = \text{const} = K_0$$

называется *интегралом момента* (векторного) *количества движения*.

Как тем, так и другим свойством обладают все системы, находящиеся под действием только внутренних сил; для таких систем обращаются в нуль как  $R^{(e)}$ , так и  $M^{(e)}$ , и, следовательно, одновременно остаются постоянными количество движения  $Q$  и момент количества движения  $K$ . Такой системой, например, по крайней мере приближенно, будет солнечная система, неизменяемая плоскость которой называется также *плоскостью Лапласа*.

Отметим еще как непосредственное следствие равенства (5), что *если результирующий момент внешних сил относительно прямой  $a$ , неподвижной или проходящей через центр тяжести и сохраняющей неизменное направление, постоянно равен нулю, то во все время движения (скалярный) результирующий момент  $K_a$  количества движения относительно прямой  $a$  будет оставаться постоянным (интеграл скалярного момента количества движения)*.

12. Теорема о моменте количества движения и ее следствия наравне с теоремой о количестве движения находят многочисленные и разнообразные применения.

Чтобы дать некоторые примеры, начнем с рассмотрения твердого тела, находящегося под действием внешних сил, результирующий момент которых относительно центра тяжести равен нулю, и заметим, что это всегда будет иметь место в случае тяжелого твердого тела, так как веса всех отдельных элементов тела эквивалентны в смысле теории приложенных векторов (а для твердых тел, как увидим, также и в динамическом смысле) одной силе, приложенной в центре тяжести.

Можно утверждать, что если твердое тело под действием внешних сил, удовлетворяющих указанному выше условию, движется, исходя из *состояния покоя*, то его движение необходимо будет поступательным.

Чтобы это доказать, покажем, что угловая скорость, которая по предположению вначале равна нулю, останется равной нулю и в течение всего времени движения.

Для этой цели будем исходить из теоремы о кинетическом моменте, отнесенном к центру тяжести твердого тела. Так как по предположению момент активных сил относительно центра тяжести равен нулю, то аналогичный момент  $K$  количества движения должен быть постоянным по величине и направлению; и так как, кроме того, вначале скорости, а следовательно, и количества движения всех точек системы равны нулю, то будет также равно нулю начальное значение момента  $K$ , который, оставаясь постоянным, будет равен нулю и в течение всего времени движения.

Но тогда достаточно вспомнить, что относительно главных центральных осей инерции составляющие вектора  $K$  равны  $Ap, Bq, Cr$  (предыдущая глава, п. 16), где (если исключим тривиальный случай, когда материальные точки системы  $S$  все принадлежат одной и той же прямой) величины  $A, B, C$  (в силу их определения как моментов инерции) все отличны от нуля, чтобы заключить, что вместе с  $K$  постоянно будут равны нулю составляющие  $p, q, r$  вектора  $\omega$ , а значит, и сама угловая скорость  $\omega$ .

Отсюда следует, в частности, что тяжелое твердое тело, падающее в пустоте, не может перевернуться, если оно выходит из состояния покоя или же если оно будет брошено таким образом, что угловая скорость вначале равна нулю.

Таким образом мы строго установили возможность сообщить падающему в пустоте тяжелому телу чисто поступательное движение в полном согласии с тем, что мы уже имели случай однажды утверждать на основании интуиции (т. I, гл. XVI, п. 5).

13. Отбросим теперь предположение, что момент  $M^{(e)}$  внешних сил относительно центра тяжести равен нулю, и предположим только, что  $M_a^{(e)} = 0$ , где  $a$  есть ось, неподвижная или имеющая неизменное направление и проходящая через центр тяжести рассматриваемого твердого тела. Мы сейчас же увидим, что *невозможно вызвать вращение вокруг оси  $a$* , если *исходить из состояния покоя*. Действительно, из равенства (5) следует, что составляющая  $K_a$  остается постоянной; а так как составляющая  $K_a$  равна  $A\dot{\theta}$ , где  $\theta$  — угол, определяющий положение тела, то угловая скорость  $\dot{\theta}$  останется равной нулю, если она вначале равна нулю (так как момент инерции  $A$  отличен от нуля).

14. В качестве второго примера рассмотрим систему  $S$  несколько более общую, именно систему, состоящую из двух частей  $S_1$  и  $S_2$ , каждая из которых представляет собой твердое тело, но эти тела не неизменно связаны друг с другом. Предположим, как выше, что  $M_a^{(e)} = 0$ , где  $M_a^{(e)}$  обозначает теперь результирующий момент относительно оси  $a$  всех внешних сил, действующих как на  $S_1$ , так и на  $S_2$ . И здесь составляющая  $K_a$  момента количества движения будет все еще постоянной и даже равной нулю, если, как мы и будем предполагать, система выходит из состояния покоя. Если, далее, известно еще, что движение каждого из двух тел сводится к вращению вокруг оси  $a$ , то соответствующие моменты количеств движения будут равны  $A_1\dot{\theta}_1$ ,  $A_2\dot{\theta}_2$ . Следовательно,  $A_1\dot{\theta}_1 + A_2\dot{\theta}_2$  будет результирующим моментом количеств движения системы, и в любой момент будем иметь

$$A_1\dot{\theta}_1 + A_2\dot{\theta}_2 = 0,$$

или же, интегрируя и предполагая, что для каждой из двух отдельных систем  $S_1$  и  $S_2$  угол отсчитывается от начального положения,

$$A_1\theta_1 + A_2\theta_2 = 0.$$

Отсюда мы видим, что угловые перемещения  $\theta_1$  и  $\theta_2$  должны иметь противоположные знаки, т. е. если одно из двух твердых тел вращается в одну сторону, то другое необходимо должно вращаться в противоположную сторону; кроме того, углы поворота (описываемые в равные промежутки времени) обратно пропорциональны соответствующим моментам инерции. Поэтому никоим образом не исключено, как это имело место, когда речь шла об одном твердом теле, что если система выходит из состояния покоя, одно из двух тел, например  $S_1$ , изменяет ориентацию до достижения некоторого заданного произвольно угла  $\theta_1$ ; однако при указанных условиях нельзя избежать того, чтобы другое тело не вращалось в противоположную сторону, так как необходимо, чтобы выполнялось условие  $A_1\theta_1 + A_2\theta_2 = 0$ .

15. Применим то, что изложено выше, к примеру, который уже служил нам для иллюстрации сохранения движения центра тяжести, т. е. к человеку, прямо стоящему на горизонтальном, абсолютно гладком полу (п. 9). Пусть  $a$  будет вертикаль, проходящая через центр тяжести человека, и пусть человеку требуется, например, сделать полуоборот, т. е. повернуться на  $180^\circ$  вокруг прямой  $a$ . Внешними силами в этом случае являются вес и реакция пола в точках опоры; все силы вертикальны, и потому результирующий момент их относительно оси  $a$  равен нулю. При этих условиях мы найдем, следовательно, что совокупное вращение, т. е. вращение человека как одной неизменяемой системы, невозможно.



Но замечание, сделанное для случая двух твердых тел, показывает, что если даже оставить в стороне трение, вращение вокруг  $a$  было бы вполне осуществимо, если бы была возможность связать с человеком какой-нибудь предмет, способный вращаться в противоположную сторону. Так, в частности, если вокруг талии подвязать пояс с жолобом, по которому может катиться тяжелый шар, то достаточно было бы придать ему рукой движение, чтобы вызвать вращение (пусть хотя бы и малое) всего человека в противоположную сторону; по истечении достаточного времени человек во всяком случае достиг бы желаемого результата.

Аналогичные соображения (когда необходимо вводить некоторые движения двух частей  $S_1$  и  $S_2$ , не неизменно соединенных между собой) позволяют отдать себе отчет о так называемом „прыжке кошки“. Речь идет о хорошо известном факте, что, как бы ни падала или как бы ни была брошена кошка, даже лапками вверх и из состояния покоя, она успевает повернуться за время падения без всякого вмешательства внешних сил (если для этого имеется достаточное время).

**16.** Основные уравнения движения какой угодно системы. Два векторных уравнения (3) и (4)

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)},$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \mathbf{v}' \times \mathbf{Q} = \mathbf{M}^{(e)}$$

или, в частности, уравнение (3) и уравнение (4')

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}^{(e)}$$

называются *основными или общими уравнениями движения*.

Они приложимы ко всякой системе, лишь бы только:

а) движение было отнесено к галилеевым осям, т. е. к осям неподвижным или находящимся в поступательном и притом прямолинейном и равномерном движении относительно звезд;

б) векторные производные брались по отношению к тем же самым осям;

в) центр приведения был неподвижен или совпадал с центром тяжести системы, если мы хотим применить эти уравнения в форме (3), (4').

Необходимо отметить, что эти уравнения в статическом случае ( $\mathbf{Q} = \mathbf{K} = 0$ ) дают как раз условия  $\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{M}^{(e)} = 0$ , которые мы в статике установили как *необходимые* для равновесия какой угодно материальной системы и которые вследствие этого назвали основными или общими (т. I, гл. XII, п. 4). Как и тогда для статического случая (упомянутое место, п. 5), так и теперь мы можем

утверждать, что основные уравнения движения, являясь *необходимыми* для всякой материальной системы, не будут, вообще говоря, достаточными для определения движения. Однако в полном согласии со статическим случаем в гл. VII мы увидим, что для неизменяемых систем они во всяком случае достаточны для полного определения движения и поэтому составляют основу всей динамики твердых тел.

17. Отнесение основных уравнений к осям, движущимся по какому-нибудь закону. В некоторых случаях, как это мы увидим не раз в дальнейшем, бывает выгодно освободиться от абсолютной системы отсчета и отнести основные уравнения к осям, движущимся в пространстве по закону  $\alpha \rho i \rho i$  произвольному, который в зависимости от случая будет определяться способом, наиболее пригодным для задачи, подлежащей рассмотрению.

Если мы будем попрежнему рассматривать абсолютное движение (движение относительно неподвижных звезд), но отнесем основные уравнения движения к какой-нибудь подвижной системе осей, движущейся поступательно, то останутся неизменными не только векторы  $Q$  и  $K$ , которые как абсолютные результирующая и результирующий момент количеств движения не зависят от выбора подвижной системы отсчета, но также и их производные по времени, как это непосредственно ясно из самого определения векторной производной и как на это уже указывалось в п. 10 гл. IV, т. I. В результате основные уравнения должны быть все еще взяты в их первоначальной форме: (3) и (4) или (3') и (4').

Но если, наоборот, новая система отсчета вращается с угловой скоростью  $\omega'$  и если производные по времени относительно этой новой системы осей обозначать точками, то будем иметь (т. I, гл. IV, п. 10)

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} + \omega' \times Q, \quad \frac{dK}{dt} = \dot{K} + \omega' \times K;$$

поэтому основные уравнения примут более общую форму

$$\dot{Q} + \omega' \times Q = R^{(e)}, \quad (6)$$

$$\dot{K} + \omega' \times K + \omega' \times K = M^{(e)}. \quad (7)$$

В этих уравнениях  $\omega'$ , как обычно, есть скорость той  $\alpha \rho i \rho i$  произвольной точки, которая принимается за центр приведения. В большинстве случаев удобнее совместить эту точку с началом подвижной системы отсчета, тогда  $\omega'$  и  $\omega'$  будут представлять собой характеристические векторы кинематического состояния новой системы отсчета по отношению к первоначальной галилеевой системе.