§ 3. Принцип Даламбера и общее соотношение динамики

18. К общим теоремам предыдущего параграфа мы пришли, отправляясь от разделения сил, действующих на систему, на внешние и внутренние. Здесь мы применим другой критерий классификации (п. 3) и разделим эти силы на *активные* (или прямо приложенные) и *реакции связей*. Точнее, обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ равнодействующую активных сил, приложенных к любой точке

$$P_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

через $\boldsymbol{R}_i$ — соответствующую равнодействующую реакций. Так как систему S можно рассматривать как систему из N свободных точек, на которые соответственно действуют N сил $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i$, то в течение всего времени движения (отнесенного к галилеевым осям $\Omega\xi\eta\zeta$) останутся в силе основные уравнения

$$m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{8}$$

которые можно написать в виде

$$\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{R}_i=0, \qquad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{8'}$$

Если, подобно тому, как это делалось в теории относительного равновесия (т. I, гл. XVI, § 1), мы будем истолковывать каждый из векторов $-m_i\boldsymbol{a}_i$ (имеющих размерность силы) как силу (фиктивную), которую назовем *силой инерции*, относящейся к точке P_i, то из уравнений (8'), поскольку они относятся к N точкам, рассматриваемым как свободные (т. I, гл. VII, п. 16), будет следовать, что *при движении материальной системы с какими угодно связями активные силы, реакции и силы инерции в любой момент находятся в равновесии.*

Если же мы обратим внимание на то, что реакции в их совокупности представляют собой действие связей, то можно также сказать, что *при движении материальной системы с какими угодно связями в любой момент благодаря связям, наложенным на систему, активные силы и силы инерции уравновешиваются.*

Положению, которое мы здесь рассматриваем, можно дать третью эквивалентную форму, воспользовавшись следующим замечанием. Применяя тождество

$$\boldsymbol{F}_i=m_i\boldsymbol{a}_i+(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i),$$

можно любую активную силу разложить на две составляющие: $m_i\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i$. Первая из них, $m_i\boldsymbol{a}_i$, одна способна сообщить точке, если бы эта точка была свободной, то же самое движение, которое точка имеет при совместном действии силы $\boldsymbol{F}_i$ и связей. Поэтому вторая составляющая $\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i$ (геометрическая сумма активной силы и силы инерции) представляет собой ту часть силы $\boldsymbol{F}_i$, которая оказывается, в некотором смысле, потерянной благодаря действию связей. Таким образом, оказывается оправданным название *потерянных сил*, которое обычно дается силам $F_i - m_i a_i$. Благодаря этому предыдущий общий результат можно высказать в более сжатой форме:

При движении материальной системы с какими угодно связями потерянные силы вследствие связей, наложенных на систему, в любой момент уравновешиваются.

19. Принцип Даламбера. Результат, полученный в предыдущем пункте, в какой-либо из трех своих эквивалентных форм носит название *принципа Даламбера*[1]); название „принцип" находит свое оправдание в характере интуитивной очевидности, которой обладает это положение механики. С чисто математической стороны этот принцип, по сравнению с постулатами и общими теоремами, уже ранее установленными, не дает чего-либо нового, так как по существу он сводится к номинальному истолкованию основных уравнений (8). Но с теоретической точки зрения и для исследования механических задач принцип Даламбера представляет значительный интерес, поскольку он позволяет свести постановку какого угодно динамического вопроса к статическому вопросу. Составление уравнений движения материальной системы для какой-либо динамической задачи при помощи принципа Даламбера сводится к составлению уравнений равновесия соответствующей статической задачи.

В более определенной форме из этого принципа следует, что уравнения движения можно непосредственно получить из уравнений равновесия, если в них вместо всякой активной силы F_i (или составляющей такой силы) подставить потерянную силу $F_i - m_i a_i$ (или соответствующую составляющую).

Однако при этом следует всегда помнить, что все применения этого правила основаны на предположении, что состояние движения не изменяет поведения действующих сил и реакций связей.

20. Общее соотношение и общее уравнение динамики. С только что указанной точки зрения типичным является случай систем со

[1]) Ж. Даламбер (Jean Le Rond D'Alembert) родился в Париже в 1717 г., умер там же в 1783 г. После изучения медицины и юриспруденции посвятил себя исключительно математике и быстро достиг блестящих результатов. В 1742 г. был включен в состав Академии наук в Париже. Знаменитый принцип, носящий его имя, находится в его трактате по динамике, изданном в 1743 г. (Traité de Dynamique, Paris, 1743; русский перевод: Ж. Даламбер, Динамика, Москва, 1950), за которым последовал в 1744 г. Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides. Даламбер подготовил путь для развития небесной механики. В частности, он впервые рассмотрел уравнение в частных производных для решения задачи о колеблющейся струне. Мыслитель оригинальный и с большим кругозором, он написал Discours préliminaire и многочисленные статьи в Энциклопедии.

связями без трения, для которых на основании принципа виртуальных работ в его наиболее общей принятой нами форме (т. I, гл. XV, п. 2) сумма элементарных работ реакций R_i, *независимо от того, имеется ли равновесие или нет,* при всяком виртуальном перемещении положительна или равна нулю, т. е.

$$\delta\Lambda \equiv \sum_{i=1}^{N} R_i \cdot \delta P_i \geqslant 0. \tag{9}$$

Имея это в виду, можно условия равновесия при отсутствии трения коротко написать в виде символического соотношения (т. I, гл. XV, п. 7)

$$\delta L \equiv \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i \leqslant 0.$$

Заменяя в этом выражении на основании принципа Даламбера активные силы F_i потерянными силами $F_i - m_i a_i$, мы непосредственно придем к определению движения системы при помощи соотношения

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i \leqslant 0. \tag{10}$$

Это соотношение остается в силе для всех виртуальных и только виртуальных перемещений, которые можно сообщить точкам при данной конфигурации системы.

В дальнейшем мы увидим всю важность этого соотношения. А пока заметим, что здесь оно получено как следствие из принципа Даламбера и общего соотношения статики (или принципа виртуальных скоростей в его первоначальной форме, данной Лагранжем).

Важно отметить, что если рассматривать уравнения (8) в форме

$$R_i = -(F_i - m_i a_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

(эти уравнения в сущности коротко выражают основной закон динамики точки и постулат о реакциях связей), то каждое из соотношений (9) и (10) будет непосредственным следствием другого.

Наконец, мы видим, что, допустив постулаты механики, коротко выражаемые уравнениями (8), мы будем иметь совершенную логическую эквивалентность между принципом виртуальных работ в его наиболее общей форме, с одной стороны, и совокупностью общего соотношения статики и принципа Даламбера — с другой.

Это заключение в случае систем со связями без трения объясняет и уточняет замечание, сделанное в общей форме в конце предыдущего пункта. Действительно, мы видим, что с математической стороны замена принципа виртуальных работ совокупностью общего соотношения статики и принципа Даламбера не дает никакого преимущества. Однако если принять во внимание, что вся аналитическая статика (для систем с идеальными связями) основывается на общем соотношении статики, то с точки зрения механики указанная выше замена соответствует разделению принципа виртуальных работ на две части, причем в общем соотношении выражена та часть его содержания, которая необходима и достаточна для развития статики, а принцип Даламбера позволяет рассматривать любую задачу динамики, как задачу статики.

Соотношение (10), поскольку оно характеризует в любой момент состояние движения всякой системы (со связями без трения) по отношению к прямо приложенным силам F_i и к соответствующим виртуальным перемещениям, носит название *общего соотношения динамики,* а когда речь идет о системе со связями только неосвобождающими или двусторонними (т. е. с обратимыми виртуальными перемещениями), оно заменяется соответствующим уравнением

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i = 0, \tag{11}$$

которое по аналогии называется *общим уравнением динамики.*

21. Общее соотношение динамики установлено при явном предположении, что система находится исключительно под действием заданных активных сил F_i и заданных связей *без трения,* т. е. реакций, удовлетворяющих принципу виртуальных работ. Но может случиться (и это будет даже более общим случаем), что наряду с этими реакциями действуют другие (в виде пассивных сопротивлений или, в частности, трения, происходящего от шероховатых связей, и т. п.), которые не подчиняются принципу виртуальных работ. В этом предположении способ, посредством которого приходят к общему соотношению динамики, можно повторить с единственным изменением, что в числе сил, прямо приложенных к точке P_i, наряду с результирующей F_i активных сил в собственном смысле рассматривается и результирующая Φ_i указанных выше действий, которые не упоминаются в принципе виртуальных работ. Таким способом приходят к символическому соотношению

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i + \Phi_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i \leq 0, \tag{12}$$

которое нужно рассматривать как соотношение, сохраняющее свое значение для всех виртуальных и только для виртуальных перемещений, допускаемых системой со связями без трения.

Не следует забывать, что в общем случае силы Φ_i, по крайней мере некоторые из них, являются неизвестными, так как самое большее бывают известны только физические условия или механические приспособления, порождающие их; поэтому соотношение (12) далеко от того, чтобы обладать тем свойством краткости и вместе с тем определенности, которым отличается общее соотношение динамики (10) и которое, как это лучше будет видно в ближайших параграфах, составляет его выдающееся и отличительное достоинство. Однако в постановке механических задач даже и наиболее общее символическое соотношение (12) может иногда оказаться полезным; мы дадим один конкретный пример этого в п 53 настоящей главы.

§ 4. Непосредственные следствия из общего уравнения динамики

22. Системы, допускающие поступательные виртуальные перемещения. Рассмотрим материальную систему, не имеющую односторонних (освобождающих) связей, так что для нее при любых силах будет справедливо общее уравнение динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m\boldsymbol{a}_i) \cdot \delta P_i = 0.$$

Из этого уравнения, при некоторых довольно общих предположениях относительно виртуальных перемещений системы, вытекают очень важные следствия.

Предположим прежде всего, что система, исходя из какой-нибудь возможной для нее конфигурации (а следовательно, также и из таких, которые она действительно принимает во время движения), допускает *виртуальное поступательное перемещение* в некотором заданном направлении r. Обозначим через $\delta\boldsymbol{\tau}$ общее значение N бесконечно малых векторов δP_i в этом виртуальном перемещении; подставляя $\delta\boldsymbol{\tau}$ вместо δP_i в уравнение (11), будем иметь

$$\delta\boldsymbol{\tau} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i) = 0;$$

если раскроем скобки и положим

$$\boldsymbol{R}^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i, \quad \boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i,$$

т. е. обозначим через $\boldsymbol{R}^{(a)}$ результирующую всех активных и только активных сил, а через $\boldsymbol{Q}$ — количество движения системы (предыдущая глава, п. 12), то только что полученному уравнению можно придать вид

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} \cdot \delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{R}^{(a)} \cdot \delta\boldsymbol{\tau}. \tag{13}$$