далеко от того, чтобы обладать тем свойством краткости и вместе с тем определенности, которым отличается общее соотношение динамики (10) и которое, как это лучше будет видно в ближайших параграфах, составляет его выдающееся и отличительное достоинство. Однако в постановке механических задач даже и наиболее общее символическое соотношение (12) может иногда оказаться полезным; мы дадим один конкретный пример этого в п 53 настоящей главы.

§ 4. Непосредственные следствия из общего уравнения динамики

22. Системы, допускающие поступательные виртуальные перемещения. Рассмотрим материальную систему, не имеющую односторонних (освобождающих) связей, так что для нее при любых силах будет справедливо общее уравнение динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m a_i) \cdot \delta P_i = 0.$$

Из этого уравнения, при некоторых довольно общих предположениях относительно виртуальных перемещений системы, вытекают очень важные следствия.

Предположим прежде всего, что система, исходя из какой-нибудь возможной для нее конфигурации (а следовательно, также и из таких, которые она действительно принимает во время движения), допускает *виртуальное поступательное перемещение* в некотором заданном направлении r. Обозначим через $\delta\tau$ общее значение N бесконечно малых векторов δP_i в этом виртуальном перемещении; подставляя $\delta\tau$ вместо δP_i в уравнение (11), будем иметь

$$\delta\tau \cdot \sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) = 0;$$

если раскроем скобки и положим

$$R^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} F_i, \quad Q = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i,$$

т. е. обозначим через $R^{(a)}$ результирующую всех активных и только активных сил, а через Q — количество движения системы (предыдущая глава, п. 12), то только что полученному уравнению можно придать вид

$$\frac{dQ}{dt} \cdot \delta\tau = R^{(a)} \cdot \delta\tau. \tag{13}$$

Деля обе части этого равенства на длину $\delta\tau$ и припоминая, что составляющая по какому-нибудь направлению (неподвижному относительно системы отсчета) производной от вектора равна производной от его составляющей в этом направлении, мы заключаем на основании уравнения (13), что

$$\frac{dQ_r}{dt} = R_r^{(a)},$$

т. е. при условии, что связи допускают виртуальное перемещение системы в направлении r, для системы оказывается справедливой *теорема о* (скалярном) *количестве движения по отношению только к активным силам* (вместо внешних сил, которые согласно первому основному уравнению (3) принимаются во внимание в этой теореме в общем случае).

Далее, если система во всякой своей конфигурации допускает в качестве виртуальных всевозможные поступательные перемещения (такой системой является, например, твердое тело), то уравнение (13) было бы справедливо при произвольном $\delta\tau$, и мы получаем

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(a)}, \tag{14}$$

т. е. для системы справедлива (векторная) *теорема о количестве движения по отношению к одним активным силам*. Естественно, вместе с ней будет справедлива также и аналогичная теорема о движении центра тяжести (п. 6)

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(a)}.$$

23. Само собой разумеется, что для только что рассмотренной системы не перестает сохранять свое значение первое из основных уравнений (п. 5)

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)};$$

поэтому на основании уравнения (14) необходимо будем иметь

$$\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{R}^{(a)},$$

т. е. результирующая внешних сил совпадает для нашей системы с результирующей активных сил. Но так как результирующая внутренних сил равна нулю, то $\mathbf{R}^{(e)}$ дает результирующую всех сил, среди которых наряду с активными содержатся также и силы связей. Поэтому заключаем, что

Если материальная система с двусторонними (неосвобождающими) связями без трения в любой своей конфигурации допускает в качестве виртуальных перемещений всевозможные поступательные бесконечно малые перемещения, то реакции связей, возникающие в ней при действии каких угодно сил, имеют результирующую, постоянно равную нулю.

24. Системы, допускающие виртуальные вращательные перемещения. Предположим сначала, что система S (с двусторонними связями без трения) в любой ее конфигурации допускает виртуальное вращательное перемещение вокруг некоторой прямой r (относительно обычных осей $\Omega\xi\eta\zeta$). При этом виртуальном перемещении любая точка P_i испытывает перемещение вида

$$\delta P_i = \delta\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i},$$

где O обозначает точку на оси вращения r и $\delta\boldsymbol{\omega}$ — бесконечно малый вектор, параллельный r.

Если в общее уравнение динамики (11) вместо δP_i подставить его выражение и раскрыть скобки, принимая во внимание тождества (т. I, гл. I, п. 25)

$$m_i\boldsymbol{a}_i \cdot [\delta\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}] = \delta\boldsymbol{\omega} \cdot [\overrightarrow{OP_i} \times m_i\boldsymbol{a}_i],$$

$$\boldsymbol{F}_i \cdot [\delta\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}] = \delta\boldsymbol{\omega} \cdot [\overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i],$$

то получим

$$\delta\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times m_i\boldsymbol{a}_i = \delta\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i. \tag{15}$$

Если положить теперь

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times m_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{K}, \quad \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}^{(a)},$$

т. е. если обозначить через $\boldsymbol{K}$ момент (относительно центра O) количеств движения системы (гл. IV, п. 11) и через $\boldsymbol{M}^{(a)}$ результирующий момент относительно того же центра *активных сил*, достаточно будет разделить обе части равенства (15) на длину вектора $\delta\boldsymbol{\omega}$ (имеющего направление r), чтобы заключить, что

$$\frac{dK_r}{dt} = M_r^{(a)}.$$

Таким образом, мы видим, что при сделанных предположениях для системы S справедлива *теорема о скалярном моменте количеств движения* (п. 10) *по отношению к одним активным силам*.

Если, далее, предположить, что неподвижная точка O есть *виртуальный полюс вращения*, т. е. что связи в любой момент допускают для системы какое угодно бесконечно малое вращение всей системы в целом вокруг точки O (как это имеет место, например, для твердого тела, закрепленного в точке O), то мы придем к заключению, что уравнение (15) должно остаться в силе, как бы ни выбирался вектор $\delta\omega$; это означает, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(a)}. \tag{16}$$

Поэтому можно сказать, что *относительно виртуального полюса вращения сохраняет свою силу теорема о моменте* (векторном) *количеств движения для одних активных сил.*

Сравнивая этот результат со вторым основным уравнением в его форме (4')

$$\frac{dK}{dt} = M^{(e)}$$

и рассуждая, как в предыдущем пункте, заключаем, что *если система с двусторонними* (неосвобождающими) *связями без трения допускает виртуальный полюс вращения, то реакции, возникающие в ней под действием каких-нибудь сил, имеют относительно этого полюса момент, постоянно равный нулю.*

25. Движение относительно центра тяжести. Рассмотрим снова материальную систему S из N точек P_i с двусторонними связями без трения и обозначим через $\delta^{(r)}P_i\,(i=1, 2, \ldots, N)$ какое-нибудь виртуальное перемещение системы S *относительно центра тяжести* G (т. е. относительно системы осей с началом в G и с неизменными по отношению к галилеевым осям направлениями) и через $a_i^{(r)}$ ускорение относительно G точки P_i. Будем иметь

$$\delta P_i = \delta G + \delta^{(r)} P_i, \tag{17}$$

$$a_i = a_G + a_i^{(r)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{18}$$

где δP_i, δG, a_i, a_G представляют собой абсолютные перемещения и ускорения. Подставляя прежде всего в общее уравнение динамики (11) вместо δP_i их выражения (17) и обозначая, как и в предыдущих пунктах, через $R^{(a)}$ результирующую активных сил, через Q — количество движения (абсолютное) системы, получим

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta^{(r)} P_i + \delta G \cdot \left(R^{(a)} - \frac{dQ}{dt}\right) = 0. \tag{19}$$

Предположим теперь, что (как в п. 22) связи допускают для системы в любой момент произвольное виртуальное поступательное перемещение. Так как тогда для активных сил будет иметь место теорема о количестве движения, то второй член в левой части уравнения (19) будет тождественно равен нулю; если примем во внимание соотношение (18), то можно будет написать

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i^{(r)}) \cdot \delta^{(r)} P_i - a_G \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \delta^{(r)} P_i = 0.$$

Но из тождества для центра тяжести G

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GP_i} = 0$$

вследствие того, что виртуальное перемещение $\delta^{(r)}G$ точки G относительно нее самой тождественно равно нулю, вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \delta^{(r)} P_i = 0; \tag{20}$$

таким образом мы приходим к уравнению

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i^{(r)}) \cdot \delta^{(r)} P_i = 0, \tag{11'}$$

отличающемуся от общего уравнения динамики только подстановкой ускорений $\boldsymbol{a}_i^{(r)}$ и перемещений $\delta^{(r)}P_i$ относительно центра тяжести вместо аналогичных абсолютных величин $\boldsymbol{a}_i$ и δP_i. Его можно назвать общим уравнением динамики, относящимся к центру тяжести; оно выражает, что *для всякой материальной системы с двусторонними связями без трения, которые в любой момент допускают поступательное виртуальное перемещение всей системы в каком угодно направлении, движение относительно центра тяжести следует тем же динамическим законам, которые имели бы место, если бы центр тяжести был неподвижен.*

Для иллюстрации этого результата представим себе прибор с двусторонними связями без трения, для которого допустимы всевозможные виртуальные поступательные перемещения. Пусть этот прибор помещен на каком-нибудь движущемся основании (поезде, корабле, аэроплане и т. п.). Когда движение основания является поступательным, даже неравномерным, то всякая система осей координат с началом в центре тяжести прибора, оси которой имеют неизменные направления в пространстве, будет сохранять неизменными направления осей также и относительно движущегося основания, так что можно сказать, что динамические законы, согласно которым действует прибор (относительно своего центра тяжести) внутри движущегося предмета, будут такими же, как если бы этот предмет был неподвижным.

Обращаясь к какой угодно материальной системе, предположим, что связи в любой момент допускают как поступательное перемещение в каком угодно направлении, так и произвольное виртуальное вращение около центра тяжести. В этом предположении для общего уравнения (11') динамики, относящегося к центру тяжести, допустимы все те рассуждения, которые имели место в предыдущем пункте по отношению к абсолютному движению, так что мы придем к уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{K}^{(r)}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(a)}, \tag{16'}$$

где $K^{(r)}$ обозначает момент относительно центра тяжести количеств движения, относящихся к центру тяжести, и $M^{(a)}$ есть аналогичный результирующий момент активных сил.

Если примем во внимание тождество $K^{(r)} = K$ (предыдущая глава, п. 13), то увидим, что уравнение (16') есть не что иное, как распространение уравнения (16) предыдущего пункта на случай, когда центр приведения (и виртуальный полюс вращения) совпадает с центром тяжести (вместо того, чтобы быть неподвижным).

Сравнивая затем уравнение (16') со вторым уравнением (4') (отнесенным к центру тяжести) и припоминая еще тождество $K^{(r)} = K$, заключаем, что *если для какой-нибудь материальной системы связи, предполагаемые двусторонними и без трения, допускают произвольное перемещение (виртуальное) ее как неизменяемой системы, то реакции, которые возникают под действием каких угодно сил, имеют относительно центра тяжести результирующий момент, постоянно равный нулю.*

26. Системы, находящиеся под действием силы тяжести. В частном случае, когда активные силы сводятся к силе тяжести отдельных точек P_i и, следовательно, имеем $F_i = m_i g$ (где g есть обычное ускорение силы тяжести), из уравнения (20) предыдущего пункта получим

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta^{(r)} P_i = g \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \delta^{(r)} P_i = 0;$$

отсюда следует, что та часть элементарной работы в общем уравнении динамики (11'), относящемся к центру тяжести, которая представляет собой работу сил тяжести, равна нулю. Поэтому заключаем, что *для любой системы, находящейся под действием силы тяжести, движение относительно центра тяжести происходит так, как если бы силы веса не действовали.*

27. Общее уравнение динамики для твердого тела. Наконец, здесь полезно дать явный вид общего уравнения динамики для твердого тела с какими угодно связями и под действием каких угодно сил (лишь бы, разумеется, связи были двусторонними и без трения). Любое виртуальное перемещение твердого тела, если обозначим через δG и $\delta \omega$ соответствующие характеристические векторы (бесконечно малые) относительно центра тяжести G (перемещение центра тяжести и поворот около центра тяжести), определится равенством

$$\delta P_i = \delta G + \delta \omega \times \overrightarrow{GP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

подставляя это выражение для δP_i в уравнение (11) и преобразовывая результат обычным образом, получим

$$\delta G \cdot \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) + \delta\omega \cdot \sum_{i=1}^{N} [\overrightarrow{GP}_i \times \boldsymbol{F}_i - \overrightarrow{GP}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i] = 0;$$

теперь достаточно ввести результирующую $\boldsymbol{R}^{(a)}$ и результирующий момент $\boldsymbol{M}^{(a)}$ относительно центра G активных сил и вспомнить известные выражения количества движения $\boldsymbol{Q}$ и момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ относительно G, чтобы предыдущему уравнению придать искомый вид

$$\left(\boldsymbol{R}^{(a)} - \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}\right) \cdot \delta G + \left(\boldsymbol{M}^{(a)} - \frac{d\boldsymbol{K}}{dt}\right) \cdot \delta\boldsymbol{\omega} = 0.$$

Эта формула часто применяется в динамике твердого тела (ср., например, гл. IX, п. 3).

28. Понятие об общей кинетостатике[1]). Можно, наконец, связать с общим уравнением динамики ряд задач, имеющих большое значение в технических приложениях; мы сделаем это в очень сжатом виде.

С самого начала (п. 2), разбивая силы, действующие на любую материальную систему, на *силы активные* (обычно задаваемые) и *реакции* (вообще говоря, неизвестные), мы указывали, как на одну из целей теоретической динамики, на систематическое исключение реакций. Но с точки зрения техники нередко бывает интересно определение как раз этих реакций, которые благодаря наличию данных связей действуют на рассматриваемую материальную систему в заданном состоянии движения (или, как предельный случай, в состоянии покоя). Изменяя направление этих реакций на обратное, найдем, в силу закона равенства действия и противодействия, *динамические давления* (или, в частности, статические) на тела, с помощью которых осуществляются связи; точная оценка максимальных давлений необходима для установления и исследования условий, при которых данное устройство может выполнить свое назначение без опасности разрушения. В последнее время эта область исследований получила название *кинетостатики*. Кинетостатические исследования приобретают особый интерес в связи с распространением механизмов с большими скоростями.

Обратимся здесь к системе из N материальных точек P_i, подчиненных заданным связям без трения (двусторонним и односторонним, геометрическим и кинематическим) и находящихся под действием заданных активных сил $\boldsymbol{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$). В аналитической статике (т. I, гл. XV, пп. 36—40) мы уже видели, как на

[1]) Ср. Levi-Civita, Sulla cinetostatica, *Atti e Mem. della. R. Acc. di sc., lett. ed a. in Padova,* т. 18, 1902, стр. 145—150.

основе параметрического решения общего условия равновесия

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i \leqslant 0, \tag{21}$$

к которому мы приходим посредством введения множителей Лагранжа, оказывается возможным вычислить реакции R_i, возникающие в различных точках системы, и, более того, различить в каждой из этих реакций составляющие, приходящиеся на каждую связь. Эти реакции или их составляющие после изменения направления на обратное дают аналогичные статические давления.

Теперь, чтобы перейти к динамическому случаю, достаточно заметить, что вместо соотношений $R_i = -F_i$, действительных при равновесии, здесь будут справедливы соотношения

$$R_i = -(F_i - m_i a_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

эти соотношения можно получить, применяя принцип Даламбера. Таким образом, мы видим, что к вычислению реакций и, следовательно, динамических давлений мы придем, подставляя всюду в только что упомянутых выкладках аналитической статики вместо активных сил F_i соответствующие потерянные силы $F_i - m_i a_i$; другими словами, нам надо только разрешить путем введения множителей Лагранжа, вместо условия (21), общее соотношение динамики

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i \leqslant 0.$$

Таким образом, применяя методы, аналогичные методам статики, можно определить не только динамические давления, действующие на различные точки P_i, но в каждой из них различить частичные давления, происходящие от отдельных связей. Более того, вследствие линейной природы задачи a priori очевидно, что всякое давление (полное или частичное) формально должно быть представлено в виде суммы двух слагаемых: одно из этих слагаемых, которое происходит прямо от активной силы F_i, можно назвать статическим, другое слагаемое представляет собой собственно динамическое давление, зависящее от соответствующей силы инерции $-m_i a_i$.

Не задерживаясь на этом, отметим одно существенное обстоятельство. Только что указанный способ для вычисления давлений предполагает знание движения системы; а мы хорошо знаем a priori, что определение этого движения зависит (как это уже отмечалось в пп. 1, 2 и еще лучше будет разъяснено в дальнейшем) от интегрирования дифференциальных уравнений и составляет как раз основную и более трудную задачу динамики. Все же указанная выше постановка задачи кинетостатики имеет интерес, несмотря на то, что для решения ее надо знать движение системы. Во многих конкретных случаях, интересных с технической точки зрения, движение системы заранее бывает задано, поскольку оно должно удовлетворять заранее поставленным целям. Это станет более ясным при разборе типичного примера из кинетостатики неизменяемых систем, который мы будем рассматривать в п. 7 гл. VII.

§ 5. Уравнение и интеграл живых сил

29. Теорема живых сил. Прежде чем выводить другие следствия из общего уравнения динамики, удобно установить здесь еще одну общую теорему о движении системы, формулировка которой не зависит от подразделения сил на внешние и внутренние или активные и реакции связей.

Обозначим поэтому через $\boldsymbol{F}_i$ *полную силу*, действующую на любую точку $P_i (i=1, 2, \ldots, N)$ движущейся системы, т. е. равнодействующую всех сил (внутренних и внешних, активных и реакций), действующих на эту точку. Мы знаем уже, что во время движения системы приращение, получаемое в любой элемент времени живой силой точки P_i, равно работе, совершенной силой $\boldsymbol{F}_i$ за тот же самый элементарный промежуток времени (т. I, гл. VIII, п. 9); положив

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad dL_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

будем иметь в любой элемент времени в течение движения

$$dT_i = dL_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N).$$

Суммируя почленно эти N уравнений, получим

$$dT = dL, \tag{22}$$

где через T обозначена живая сила системы (предыдущая глава, п. 6) и через dL — полная элементарная работа всех сил системы за рассматриваемый элемент времени dt (там же, п. 2), т. е.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2, \qquad dL = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt.$$

Мы получили таким образом теорему живых сил в дифференциальной форме: *во время движения материальной системы с какими угодно связями и под действием каких угодно сил приращение, которое получает живая сила системы за какой-нибудь элемент времени, равно полной работе, совершаемой за тот же самый элемент времени всеми силами, действующими на систему* (внешними и внутренними, активными и реакциями).