на то, что для решения ее надо знать движение системы. Во многих конкретных случаях, интересных с технической точки зрения, движение системы заранее бывает задано, поскольку оно должно удовлетворять заранее поставленным целям. Это станет более ясным при разборе типичного примера из кинетостатики неизменяемых систем, который мы будем рассматривать в п. 7 гл. VII.

## § 5. Уравнение и интеграл живых сил

**29.** Теорема живых сил. Прежде чем выводить другие следствия из общего уравнения динамики, удобно установить здесь еще одну общую теорему о движении системы, формулировка которой не зависит от подразделения сил на внешние и внутренние или активные и реакции связей.

Обозначим поэтому через $\boldsymbol{F}_i$ *полную силу*, действующую на любую точку $P_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ движущейся системы, т. е. равнодействующую всех сил (внутренних и внешних, активных и реакций), действующих на эту точку. Мы знаем уже, что во время движения системы приращение, получаемое в любой элемент времени живой силой точки $P_i$, равно работе, совершенной силой $\boldsymbol{F}_i$ за тот же самый элементарный промежуток времени (т. I, гл. VIII, п. 9); положив

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad dL_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

будем иметь в любой элемент времени в течение движения

$$dT_i = dL_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Суммируя почленно эти $N$ уравнений, получим

$$dT = dL, \tag{22}$$

где через $T$ обозначена живая сила системы (предыдущая глава, п. 6) и через $dL$ — полная элементарная работа всех сил системы за рассматриваемый элемент времени $dt$ (там же, п. 2), т. е.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2, \qquad dL = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt.$$

Мы получили таким образом теорему живых сил в дифференциальной форме: *во время движения материальной системы с какими угодно связями и под действием каких угодно сил приращение, которое получает живая сила системы за какой-нибудь элемент времени, равно полной работе, совершаемой за тот же самый элемент времени всеми силами, действующими на систему* (внешними и внутренними, активными и реакциями).

Теперь обратим внимание на следующее: в виде основной предпосылки наших механических взглядов все причины, влияющие на движение какой угодно материальной системы, схематически рассматриваются нами как некоторые силы, и, следовательно, всякая форма энергии, которая участвует в движении, рассматривается схематически в виде сообщаемой системе работы, совершаемой силами. Поэтому если, в частности, речь идет об элементе времени $dt$, то полная элементарная работа $dL$, так же как и в случае одной материальной точки (т. I, гл. VIII, п. 9), представится как полное приращение энергии, сообщаемое системе обстоятельствами, определяющими ее движение. Уравнение (22) представляет, следовательно, в типичной механической форме основной *физический принцип сохранения энергии*. Оно выражает, что вся энергия, сообщаемая в любой элемент времени системе теми весьма разнообразными обстоятельствами, которые каким бы то ни было образом влияют на ее движение, обнаруживается полностью в той же системе в форме приращения $dT$ ее кинетической энергии.

**30.** Теорема живых сил, вследствие ее большой общности, находит в механике чрезвычайно разнообразные применения.

Необходимо, однако, отметить, что теорема живых сил в ее общей форме (22) не всегда может быть использована, поскольку она включает в себя выражение элементарной работы, выполняемой (вместе с другими силами) и неизвестными реакциями. Поэтому теорема эта имеет большое значение и оказывается более полезной в тех случаях, когда благодаря каким-нибудь предположениям о природе системы или о свойствах действующих сил удается упростить выражение элементарной работы само по себе и уточнить это выражение с механической точки зрения.

Чтобы дать два примера, в некотором роде типичных, рассмотрим сначала случай *твердого тела*. В этом предположении за любой элемент времени работа внутренних сил (предыдущая глава, п. 3) будет равна нулю, так что уравнение (22) приведется к виду

$$dT = dL^{(e)}, \tag{22'}$$

где $dL^{(e)}$ обозначает полную элементарную работу всех внешних сил, т. е. имеем: *при движении твердого тела с какими угодно связями и под действием каких угодно сил за любой элемент времени приращение живой силы твердого тела равно элементарной работе, одновременно выполняемой всеми внешними силами.*

Другой пример, с некоторой точки зрения более общий, мы имеем, когда речь идет о материальной системе со связями, независящими от времени, без трения и двусторонними. В силу первого предположения всякое из элементарных перемещений, которые испытывает система во время ее движения, является виртуальным перемещением (т. I, гл. VI, п. 13), так что благодаря второму предположению к каждому из этих элементарных перемещений можно применить ***принцип виртуальных работ*** (т. I, гл. XV, п. 2); принимая во внимание третье предположение, заключаем, что за любой элемент времени элементарная работа реакций будет тождественно равна нулю. Поэтому уравнение (22) принимает вид

$$dT = dL^{(a)}, \tag{22''}$$

где $dL^{(a)}$ обозначает элементарную работу всех активных сил, т. е. ***если система со связями, не зависящими от времени, двусторонними и без трения движется под действием каких-либо сил, то приращение, получаемое за любой элемент времени живой силой системы, равно элементарной работе, совершаемой за то же самое время всеми активными силами.***

Далее, если предполагается, что связи системы двусторонние, без трения и не зависят от времени и что, кроме того, они допускают бесконечно малые поступательные перемещения всей системы в целом в каком-нибудь направлении (п. 25), то будет иметь место теорема живых сил для движения относительно центра тяжести, т. е. будет существовать уравнение

$$dT^{(r)} = dL^{(r)},$$

где $dT^{(r)}$ есть приращение, получаемое в течение любого элемента времени живой силой системы в ее движении относительно центра тяжести, $dL^{(r)}$ — полная работа, выполняемая активными силами в течение того же элемента времени благодаря перемещениям *относительно* центра тяжести.

**31.** Консервативные силы. Потенциал. Для того чтобы подготовить другие выводы из теоремы живых сил, нужно сделать некоторые дальнейшие пояснения понятия о *консервативных силах*, введенного в статике (т. I, гл. XV, п. 28). Для системы из $N$ материальных точек $P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *консервативными* называются такие силы $F_i$, выражение для полной работы которых на каком угодно элементарном перемещении $dP_i$ системы равно полному дифференциалу функции $U$ от $3N$ декартовых координат $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ точек $P_i$; при этом функция $U$ предполагается, как обычно, однозначной и правильной в рассматриваемом поле [1]).

Для избежания недоразумений отметим, что здесь, говоря о *каком угодно* элементарном перемещении, мы подразумеваем перемещения безусловно произвольные, и, следовательно, для системы

[1]) Иногда может случиться, что поле, в котором рассматриваются действующие силы, выходит за те пределы, в которых функция $U$ остается однозначной и правильной. Для одной материальной точки мы рассмотрели соответствующий пример в т. I (гл. VII, п. 29, г.). В дальнейшем изложении этого тома мы не будем встречаться с такими вопросами, в которых может представиться это обстоятельство.

со связями даже такие, при которых не принимаются во внимание связи (т. е. ни виртуальные, ни возможные для системы).

Функция $U$, определяемая с точностью до аддитивной произвольной постоянной из равенства

$$dL = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot dP_i = dU, \qquad (23)$$

называется *потенциалом* сил, которые в свою очередь являются *производными* от потенциала $U$.

Из равенства (23), которое в развернутой форме принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i\, d\xi_i + Y_i\, d\eta_i + Z_i\, d\zeta_i) = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} d\eta_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} d\zeta_i \right),$$

приравнивая в обеих частях коэффициенты при составляющих (произвольных и не зависимых друг от друга) $d\xi_i$, $d\eta_i$, $d\zeta_i$ перемещений $dP_i$, получаем соотношения

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Если система, на которую действуют силы, является голономной, определяемой в лагранжевых независимых координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$ уравнениями

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \,|\, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

то из этих уравнений или, лучше, из эквивалентных им уравнений

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \,|\, t), \\ \eta_i &= \eta_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \,|\, t), \qquad (i = 1, 2, \ldots N) \\ \zeta_i &= \zeta_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \,|\, t) \end{aligned}$$

можно видеть, что потенциал $U$, вообще говоря, зависит не только от $q$, но также и от $t$, поэтому *если связи системы не зависят от времени, то потенциал зависит исключительно от лагранжевых координат.*

Для последующего важно вспомнить, что как в том, так и в другом случае *производные от потенциала*, т. е. $\frac{\partial U}{\partial q_n}$, *дают составляющие действующих сил по лагранжевым координатам* $q_h$, *т. е. количества*

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Это вытекает непосредственно из самого определения консервативных сил, которое для виртуального перемещения дает тождество

$$\delta L = \delta U,$$

где $\delta U$ обозначает полный дифференциал от потенциала, вычисляемый при постоянном значении $t$, если $U$ зависит явно от $t$; приравнивая в обеих частях коэффициенты при отдельных $\delta q_h$ (произвольных и независимых), мы получим для составляющих $Q_h$ выражения

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Из тождества (23), характерного для консервативных сил, как и в случае одной точки, находящейся под действием таких сил (т. I, гл. VIII, п. 6), мы получим после интегрирования

$$L = U - U_0,$$

т. е. *как бы ни двигалась материальная система от одной своей конфигурации к другой, работа, совершаемая консервативными силами, равна разности значений соответствующего потенциала в начальной и конечной конфигурациях.*

**32.** Чтобы дать простой пример консервативной силы, рассмотрим действие силы тяжести на систему из $N$ материальных точек $P_i$ с массами $m_i$, отнесенную к осям, связанным с Землей. В этом случае, если за ось $\zeta$ выбирается направленная вниз вертикаль, для силы веса, действующей на любую точку $P_i$, мы будем иметь составляющие

$$X_i = 0, \ Y_i = 0, \ Z_i = m_i g \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

откуда видно, что потенциал определяется (с точностью до аддитивной произвольной постоянной) равенством

$$U = g \sum_{i=1}^{N} m_i \zeta_i,$$

или, еще проще, если $\zeta_0$ есть высота центра тяжести и $m$ — полная масса системы, равенством

$$U = mg\zeta_0.$$

Он совпадает, следовательно, с потенциалом силы тяжести, приложенной в центре тяжести, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы.

Другим, более общим примером консервативных сил являются ньютонианские силы взаимного притяжения между материальными точками или элементами массы.

Сосредоточим внимание на задаче $n+1$ тел, обращаясь к п. 22 гл. III. Если обозначим через $\Delta_{ij}$ расстояние между двумя любыми точками $P_i$, $P_j$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots, n)$, то, как известно (т. I, гл. XI, п. 4), выражение

$$\frac{f m_i m_j}{\Delta_{ij}}$$

представляет собой потенциал как силы $m_i m_j \boldsymbol{A}_{ij}$ (если $P_i$ рассматривается как притягиваемая точка), с которой $P_j$ действует на $P_i$, так и силы (прямо противоположной) $m_i m_j \boldsymbol{A}_{ji}$ (если, наоборот, $P_j$ рассматривается как притягиваемая точка), которую $P_j$ испытывает со стороны $P_i$. Отсюда следует (ср. формулу (46) гл. III), что полное действие, испытываемое точкой $P_i$ системы, является производным от потенциала

$$U_i = f m_i \sum_{j=0}^{n}{}^{(i)} \frac{m_j}{\Delta_{ij}}.$$

Рассмотрим теперь функцию (всех взаимных расстояний точек)

$$U = f \mathop{\mathbf{S}}_{0}^{n}{}_{hj} \frac{m_h m_j}{\Delta_{ij}},$$

где $\mathop{\mathbf{S}}_{0}^{n}{}_{hj}$ обозначает сумму, распространенную на все сочетания без повторений индексов $h$, $j$, которым приписываются все значения от 0 до $n$.

Функция $U$ содержит все члены, входящие в функцию $U_j$, а также (при $n > 1$) многие другие, не зависящие от координат точки $P_j$. Поэтому можно, если угодно, рассматривать $U$ вместо $U_i$ как выражение потенциала силы $\boldsymbol{F}_i$, действующей на точку $P_i$. Так как функция $U$ в отличие от $U_i$ симметрично зависит от всех $n+1$ точек, то, составляя от нее полный дифференциал, будем иметь

$$dU = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot dP_i,$$

т. е. как раз равенство (23) для интересующего нас здесь случая.

Таким образом, взаимные ньютонианские притяжения скольких угодно тел $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ образуют консервативное силовое поле, потенциал которого определяется предыдущим выражением функции $U$.

**33. Интеграл живых сил.** После этого отступления вернемся к теореме живых сил (пп. 29, 30) и рассмотрим снова основной для механики случай материальной системы $S$ со связями, не зависящими от времени, двусторонними и без трения. Если активные силы, действию которых она подвергается, являются производными от потенциала $U$, то теорема живых сил (22″) принимает вид

$$dT = dU, \tag{24}$$

совершенно аналогичный тому, который имел место для одной свободной материальной точки, находящейся под действием консервативной силы (т. I, гл. VIII, п. 11); после интегрирования получим конечное соотношение

$$T - U = E, \tag{25}$$

где $E$ обозначает постоянную интегрирования. Это соотношение, связывающее в любой момент состояние движения системы с ее конфигурацией, как и в случае одной материальной точки, также носит название *интеграла живых сил.*

Уравнение (24) или эквивалентное ему (25) допускает энергетическое истолкование, данное в общем случае уравнению (22) в п. 29. Это истолкование, как и в случае одной материальной точки, можно выразить здесь в более специальной, особенно замечательной по своему внутреннему содержанию форме. Если количество $-U$, зависящее исключительно от конфигурации системы, рассматривается как форма энергии (потенциальной), которой обладает система в зависимости от своего положения, то уравнение (24) или эквивалентное ему уравнение (25) выражает, что при движении сумма $T-U$ кинетической и потенциальной энергии системы не изменяется. Следовательно, имеет место принцип сохранения энергии в наиболее узком смысле, поскольку материальная система рассматривается изолированной от всего остального мира и обладает только двумя основными формами механической энергии (кинетической и потенциальной энергией или энергией положения), которые в течение движения могут только преобразовываться одна в другую, причем исключается возможность возникновения новой или исчезновения наличной энергии. По этой причине соотношение (25) называется также *интегралом энергии.*

**34.** Внутренняя энергия. Уравнение (22) живых сил приводит к заключениям, аналогичным заключениям предыдущего пункта, но более полным и общим, если только часть действующих на материальную систему сил будет иметь потенциал. Обозначая через $-\Omega$ этот потенциал, можно написать уравнение (22) в этом случае в виде

$$dT + d\Omega = dL', \tag{26}$$

где $dL'$ обозначает полную элементарную работу тех сил, которые действуют на систему вместе с консервативными.

Уравнение (26) становится наиболее интересным, когда силы, являющиеся производными от потенциала $-\Omega$, будут все внутренними. В этом предположении количество $\Omega$, зависящее только от конфигурации системы, называется *внутренней энергией;* материальные системы, для которых, каковы бы ни были активные действующие силы, внутренние силы являются производными от потенциала, называются *консервативными системами.*

Типичными примерами консервативных систем являются *абсолютно упругие тела* и *идеальные газы* или сжимаемые жидкости, если отвлечься от вязкости и других диссипативных сил (гл. I, § 5). Как доказывается в механике деформируемых тел, внутренние силы, действующие в упругом теле при всякой деформации и в идеальном газе при всяком изменении объема, являются в их совокупности производными от потенциала.

Для идеальных жидкостей, т. е. для жидкостей, строго несжимаемых и без внутреннего трения, внутренняя энергия рассматривается как величина постоянная (в частности, если угодно, равная нулю), потому что молекулярные силы, обеспечивающие несжимаемость, имеют характер реакций, происходящих от связей, и, следовательно, при всяком бесконечно малом (виртуальном) перемещении, совместимом с несжимаемостью, совершают полную работу, равную нулю, а это означает, что речь идет о силах, являющихся производными от постоянного (или просто равного нулю) потенциала.

## § 6. Уравнения Лагранжа

**35.** Первая форма уравнений Лагранжа. Попытаемся теперь составить уравнения движения материальной системы со связями и предположим, что речь идет о голономной системе, состоящей из $N$ точек $P_i$ и имеющей $l$ независимых связей (без трения)

$$f_k(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \ldots, \zeta_N \mid t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l), \tag{27}$$

где $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ обозначают координаты любой точки $P_i$ в галилеевой системе координат $\Omega\xi\eta\zeta$. Отсюда следует, что число степеней свободы системы равно $3N - l$.

Вводя наряду с заданными активными силами $\boldsymbol{F}_i$ неизвестные реакции $\boldsymbol{R}_i$, составляющие которых обозначим через $\Xi_i$, $\mathrm{H}_i$, $\mathrm{Z}_i$, мы придем к $N$ векторным уравнениям (8)

$$m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

или к эквивалентным им скалярным уравнениям

$$m_i\ddot{\xi}_i = X_i + \Xi_i, \quad m_i\ddot{\eta}_i = Y_i + \mathrm{H}_i, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = Z_i + \mathrm{Z}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Если присоединить эти последние уравнения к уравнениям (27), то получим только $3N + l$ уравнений, а неизвестных (координат точек системы и составляющих реакций) будет $6N$, так что для того, чтобы сделать задачу определенной, необходимо иметь еще $3N - l$ уравнений, т. е. ровно столько, каково число степеней свободы системы.

Можно было бы убедиться, что $3N - l$ недостающих уравнений даст нам принцип виртуальных работ, т. е. уравнение

$$\delta\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta P_i = 0, \tag{28}$$