если отвлечься от вязкости и других диссипативных сил (гл. I, § 5). Как доказывается в механике деформируемых тел, внутренние силы, действующие в упругом теле при всякой деформации и в идеальном газе при всяком изменении объема, являются в их совокупности производными от потенциала.

Для идеальных жидкостей, т. е. для жидкостей, строго несжимаемых и без внутреннего трения, внутренняя энергия рассматривается как величина постоянная (в частности, если угодно, равная нулю), потому что молекулярные силы, обеспечивающие несжимаемость, имеют характер реакций, происходящих от связей, и, следовательно, при всяком бесконечно малом (виртуальном) перемещении, совместимом с несжимаемостью, совершают полную работу, равную нулю, а это означает, что речь идет о силах, являющихся производными от постоянного (или просто равного нулю) потенциала.

§ 6. Уравнения Лагранжа

35. Первая форма уравнений Лагранжа. Попытаемся теперь составить уравнения движения материальной системы со связями и предположим, что речь идет о голономной системе, состоящей из N точек P_i и имеющей l независимых связей (без трения)

$$f_k(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \ldots, \zeta_N | t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l), \tag{27}$$

где ξ_i, η_i, ζ_i обозначают координаты любой точки P_i в галилеевой системе координат $\Omega\xi\eta\zeta$. Отсюда следует, что число степеней свободы системы равно $3N - l$.

Вводя наряду с заданными активными силами $\boldsymbol{F}_i$ неизвестные реакции $\boldsymbol{R}_i$, составляющие которых обозначим через Ξ_i, H_i, Z_i, мы придем к N векторным уравнениям (8)

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

или к эквивалентным им скалярным уравнениям

$$m_i \ddot{\xi}_i = X_i + \Xi_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = Y_i + \mathrm{H}_i, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = Z_i + \mathrm{Z}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Если присоединить эти последние уравнения к уравнениям (27), то получим только $3N + l$ уравнений, а неизвестных (координат точек системы и составляющих реакций) будет $6N$, так что для того, чтобы сделать задачу определенной, необходимо иметь еще $3N - l$ уравнений, т. е. ровно столько, каково число степеней свободы системы.

Можно было бы убедиться, что $3N - l$ недостающих уравнений даст нам принцип виртуальных работ, т. е. уравнение

$$\delta\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta P_i = 0, \tag{28}$$

имеющее место при всех виртуальных перемещениях системы. Но мы быстрее придадим поставленной задаче определенную форму и в то же время получим то преимущество, что приведем ее к $3N+l$ неизвестным, если вместо уравнений (8) и (28) будем исходить из основного уравнения динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta P_i = 0$$

и применять результаты, полученные в аналитической статике (т. I, гл. XV, § 7).

Начнем с замечания, что виртуальные перемещения δP_i системы определяются своими составляющими $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$ из l уравнений

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_k}{\partial\xi_i}\delta\xi_i + \frac{\partial f_k}{\partial\eta_i}\delta\eta_i + \frac{\partial f_k}{\partial\zeta_i}\delta\zeta_i\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

которые, конечно, независимы, поскольку таковыми являются по предположению уравнения связей (27), а потому якобиева матрица от функций f_k для любых значений ξ_i, η_i, ζ_i имеет ранг l. Чтобы не расходиться с обозначениями, применявшимися в аналитической статике, придадим этим l уравнениям следующий более сжатый вид:

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{a}_{ki}\cdot\delta P_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l), \tag{29}$$

где через $\boldsymbol{a}_{ki}$ обозначен вектор с составляющими

$$\frac{\partial f_k}{\partial\xi_i},\ \frac{\partial f_k}{\partial\eta_i},\ \frac{\partial f_k}{\partial\zeta_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, l; \quad i = 1, 2, \ldots, N). \tag{30}$$

Теперь остается выразить, что потерянные силы $\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i$ должны быть такими, чтобы выполнялось в любой момент равенство (11) для всех виртуальных перемещений, определяемых из уравнений (29). Но это как раз и является задачей, разрешенной нами в аналитической статике, с той только разницей, что вместо сил $\boldsymbol{F}_i$, рассматривавшихся там, здесь входят потерянные силы и что, кроме того, здесь нет односторонних связей, допущенных там для общности. Принимая во внимание, что в настоящем случае число уравнений (29) (двусторонних) связей меньше чем $3N$ и что они независимы между собой, мы непосредственно можем приложить результат п. 33 гл. XV т. I (при $\mu_i = 0$) и заключить, что должны иметь место равенства

$$m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{k=1}^{l}\lambda_k\boldsymbol{a}_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{31}$$

где λ_k (множители Лагранжа) представляют собой вспомогательные неизвестные; здесь мы принимаем эти множители со знаком, противоположным тому, который был принят в статике.

Эти векторные уравнения (31) после проектирования на оси дадут, если принять во внимание составляющие (30) векторов $\boldsymbol{a}_{ki}$, $3N$ скалярных уравнений

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= X_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \xi_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \xi_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \xi_i}, \\ m_i\ddot{\eta}_i &= Y_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \eta_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \eta_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \eta_i}, \\ m_i\ddot{\zeta}_i &= Z_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \zeta_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \zeta_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \zeta_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad (31')$$

которые вместе с уравнениями (27) образуют систему из $3N + l$ уравнений со столькими же неизвестными ξ_i, η_i, ζ_i и λ_k. При помощи этих уравнений можно определить все возможные движения рассматриваемой голономной системы.

Уравнения (31′) обычно называются *уравнениями Лагранжа* в первой форме. Они дают естественное обобщение уравнений движения одной точки, удерживаемой на гладкой поверхности (гл. II, п. 42), и замечательны с различных точек зрения. В частности, для отдельных множителей λ_k имеет место истолкование, аналогичное истолкованию, указанному в статике (т. I, гл. XV, п. 36).

Нужно, однако, заметить, что уравнения (31′) представляют то неудобство, что вводят слишком большое число лишних неизвестных. Так как конфигурации голономной системы зависят от некоторого числа параметров, равного соответствующему числу степеней свободы (в нашем случае от $3N - l$ параметров), то естественно ожидать, что движение голономной системы возможно определить посредством системы дифференциальных уравнений, заключающей в себе ровно столько неизвестных, каково соответствующее число степеней свободы. Это мы и сделаем в ближайших пунктах.

36. Дифференциальные уравнения движения голономной системы в лагранжевых координатах. Вместо координат ξ_i, η_i, ζ_i предыдущих пунктов, число которых превосходит число степеней свободы, отнесем нашу голономную систему S к n каким-нибудь независимым лагранжевым координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$, где n, как мы знаем, означает число степеней свободы системы, и пусть

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n|t) = P_i(q|t) \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \qquad (32)$$

Дифференцируя уравнения (32) по времени, мы получим для скоростей $\boldsymbol{v}_i$ отдельных точек P_i следующие выражения:

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad (33)$$

тогда как для виртуальных перемещений системы получатся выражения

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{34}$$

где n лагранжевых составляющих δq виртуального перемещения произвольны.

Возьмем теперь снова общее уравнение динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \delta P_i = 0,$$

которое определяет движение системы, поскольку оно справедливо для всех виртуальных перемещений (34), и напишем его в виде

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i. \tag{35}$$

В этом уравнении отделены друг от друга члены кинетической природы и члены динамические в более узком смысле, происходящие от активных сил. Значение правой части нам хорошо известно, так как она представляет собой полную работу δL, совершаемую активными силами при любом виртуальном перемещении δP_i системы (гл. IV, п. 5 и п. 31 этой главы), поэтому мы имеем тождественно

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h, \tag{36}$$

где

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots\ n) \tag{37}$$

есть *составляющая активных сил по лагранжевой координате* q_h*).

Что же касается левой части равенства (35), то на основании соотношений (34) ее можно написать в виде

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h,$$

*) В русской литературе принято называть величины Q_h обобщенными силами. *(Прим. ред.)*

и достаточно изменить порядок суммирований и положить

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (38)$$

чтобы тождественно иметь

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h. \qquad (39)$$

На основании двух тождеств (36), (39) общее уравнение динамики (35) принимает вид

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h,$$

а так как это соотношение должно сохранять свое значение при любом выборе δq_h, то мы находим, что должны быть справедливы равенства

$$\tau_h = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \qquad (40)$$

Обратно, всякий раз, когда будут совместно удовлетворяться уравнения (40), будет справедливо и уравнение (35) при любом выборе δq_h, а следовательно, в силу тождеств (36), (39), и уравнение (11) для всех виртуальных перемещений (34). Таким образом мы заключаем, что для нашей голономной системы n уравнений (40) равносильны общему уравнению динамики, и поэтому они достаточны для определения движения.

Теперь легко проверить, что они образуют систему из n дифференциальных (независимых) уравнений второго порядка от n неизвестных функций q_h переменной t, приводимую к *нормальному виду*, т. е. разрешимую относительно вторых производных. Действительно, заметим, что Q_h, как это вытекает из их выражений (37), наравне с F_i, представляют собой известные функции от параметров, определяющих в любой момент конфигурацию системы, скоростей отдельных точек и, возможно, времени, т. е. функции от q, $\dot{q}$ и t. Что же касается выражений для τ_h, определяемых равенствами (38), то следует обратить внимание, что, в то время как векторы $\partial P_i / \partial q_h$ зависят исключительно от q (и, возможно, от t), ускорения a_i, которые получаются последовательным дифференцированием равенств (33), представляют собой известные функции от q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ (и, возможно, t), линейные относительно лагранжевых ускорений $\ddot{q}$.

Если, далее, примем во внимание, что в выражениях для a_i члены, зависящие от $\ddot{q}$, имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \ddot{q}_k,$$

то заметим, что в любом из уравнений (40) коэффициент при $\ddot{q}_k$ равен

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Эта сумма скалярных произведений представляет собой, как мы это видели в п. 11 предыдущей главы, коэффициенты a_{hk} при $\dot{q}_h \dot{q}_k$ в выражении через лагранжевы координаты живой силы T, если связи не зависят от времени, или ее квадратичной части T_2, если связи зависят от времени. Там было доказано, что как в том, так и в другом случае определитель $\| a_{hk} \|$ не может тождественно равняться нулю. Отсюда именно и следует, что n дифференциальных уравнений второго порядка (40) всегда разрешимы относительно n лагранжевых ускорений $\ddot{q}$.

Следовательно, речь идет о системе дифференциальных уравнений, общий интеграл которых зависит от $2n$ произвольных постоянных. Каждый из ∞^{2n} частных интегралов дает в лагранжевых координатах закон (т. I, гл. VI, п. 3)

$$q_h = q_h(t)$$

какого-нибудь частного движения нашей голономной системы S при заданных силах. При данных условиях для системы S невозможны какие-нибудь другие движения помимо тех, которые представлены таким образом, так как уравнения (40), как это было отмечено с самого начала, *определяют*, наравне с общим уравнением, следствием которого они являются, все движения, возможные для системы.

Чтобы определить одно из этих движений, достаточно произвольно задать значения q^0, $\dot{q}^0$ величин q и $\dot{q}$ в определенный момент времени, например в момент $t = t_0$, что равносильно указанию начальной конфигурации системы и начальных скоростей $\boldsymbol{v}^0$ отдельных ее точек; декартовы координаты ξ^0, η^0, ζ^0 этой конфигурации получатся из уравнений (32) или, иначе, из эквивалентных им уравнений

$$\xi_i = \xi_i(q|t), \quad \eta_i = \eta_i(q|t), \quad \zeta_i = \zeta_i(q|t) \qquad (32')$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

если положить в них $t = t_0$, $q_h = q_h^0$, а $\boldsymbol{v}^0$ получится из уравнений (33), если положить в них $t = t_0$, $q_h = q_h^0$, $\dot{q}_k = \dot{q}_k^0$. Можно и прямо задать произвольные начальные значения ξ^0, η^0, ζ^0 и v_0 при следующих условиях: 1) величины ξ^0, η^0, ζ^0 представляют собою декартовы координаты одной из ∞^n возможных конфигураций для голономной системы в момент времени $t=t_0$, в силу чего уравнения (32'), если подставить в левые части их эти значения ξ^0, η^0, ζ^0, определят однозначно соответствующие значения q^0 лагранжевых координат; 2) величины v^0 соответствуют одному из ∞^n бесконечно малых возможных перемещений системы за произвольный элемент времени dt, начиная от момента $t=t_0$ и от только что определенной конфигурации $q=q^0$. Соответствующие лагранжевы начальные скорости $\dot{q}^0$ определятся из уравнений (33), в которые вместо v и q должны быть соответственно подставлены v^0 и q^0.

Из предыдущего ясно, что посредством уравнений (40) достигнута цель, указанная в конце предыдущего пункта, т. е. задача об определении движения голономной системы сведена к интегрированию системы дифференциальных уравнений (второго порядка) *с наименьшим возможным числом неизвестных* функций (число степеней свободы системы).

С помощью чрезвычайно простого преобразования и гениального механического истолкования, принадлежащих Лагранжу, можно представить уравнения (40) в очень сжатой и выразительной форме.

37. Вторая форма уравнений Лагранжа. Возьмем снова уравнения (40)

$$\tau_h = Q_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

и живую силу системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot v_i,$$

которая, если ее рассматривать как сложную функцию от q, $\dot{q}$, t, выраженную через посредство функций

$$v_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{33}$$

и взять от нее частную производную по любому $\dot{q}_h$, дает

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h}; \tag{41}$$

если же мы возьмем от нее частную производную по любому q_h, то получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}=\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_h}.$$

Но из соотношений (33) следует, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_h}=\frac{\partial P_i}{\partial q_h},$$

так что можно написать

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}=\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h};$$

отсюда, беря полную производную по времени и замечая, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}=\frac{\partial}{\partial q_h}\frac{dP_i}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_h},$$

получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}=\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h}+\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_h} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

после чего, вычитая из этих тождеств почленно соответствующие тождества (41) и принимая во внимание соотношения (38), придем к тождествам

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}=\tau_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (42)$$

Прежде чем воспользоваться этими тождествами для целей, которые мы имеем в виду, заметим, что формальные выводы, путем которых мы к ним пришли, фактически не зависят от предположения, что лагранжевы координаты q независимы, и остаются в силе даже тогда, когда число этих координат больше числа степеней свободы, как это имеет место, когда координаты должны удовлетворять уравнениям кинематических связей.

На основании тождеств (42) мы можем придать уравнениям (40) явный вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}=Q_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad (43)$$

уравнения (43) и представляют собой *вторую форму уравнений Лагранжа.* Заметим, что когда в механике говорят об „уравнениях Лагранжа“, то обычно имеют в виду уравнения (43). Прибавим еще, что в дальнейшем иногда будет удобнее называть левые части уравнений (43), тождественные выражениям τ_h, „лагранжевыми биномами“ (относящимися к системе с живой силой T)*).

---

*) „Лагранжевы биномы“, взятые с обратным знаком, представляют обобщенные силы инерции. *(Прим. ред.)*

Все, что в предыдущем пункте было сказано об уравнениях (40), остается, естественно, в силе и для этих уравнений Лагранжа, которые представляют собой не что иное, как те же уравнения (40), только написанные в ином виде. Они дают полную постановку задачи о движении голономной системы, а с аналитической точки зрения образуют систему дифференциальных уравнений второго порядка от n неизвестных функций $q_h(t)$, приводимую к нормальному виду.

Может быть, не бесполезно доказать здесь снова прямым путем это последнее обстоятельство, т. е. разрешимость n уравнений (43) относительно n лагранжевых ускорений $\ddot{q}$. С этой целью заметим, что даже при более общем предположении, что связи зависят от времени, составляющие Q_h действующих сил и живая сила T являются функциями исключительно от q, $\dot{q}$ и от t, так что $\ddot{q}$ входят только в члены

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}.$$

С другой стороны, операция $\frac{d}{dt}$, поскольку она прилагается к функциям от q, $\dot{q}$ и t, явно может быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_k\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k};$$

поэтому в любом из уравнений (43) вторые производные $\ddot{q}$ войдут только в члены, линейные относительно этих производных

$$\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_k\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}.$$

Вспомним теперь (гл. IV, п. 11), что если связи зависят от времени, то можно положить

$$T=T_0+T_1+T_2,$$

где T_0 не зависит от $\dot{q}$, T_1 однородна и линейна относительно $\dot{q}$ и

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{hk=1}^{n}a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k; \tag{44}$$

если же связи не зависят от t, то живая сила сведется к своей квадратичной части (44). Таким образом, мы видим, что в любом случае

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}=a_{hk}, \tag{45}$$

а так как определитель $\|a_{hk}\|$ не может исчезать тождественно (гл. IV, п. 11), то заключаем, как и в предыдущем пункте, что уравнения Лагранжа разрешимы относительно n ускорений $\ddot{q}$.

38. В силу того, что изложено выше, уравнения (43) представляют собой не что иное, как преобразованную форму уравнений (40). Однако, если это и верно с аналитической стороны, особая ценность уравнений Лагранжа с теоретической точки зрения заключается в том, что в окончательном синтезе они разделяют механические элементы, определяющие движение. Именно, все, что зависит от активных сил, объединяется в лагранжевых компонентах (обобщенных силах) Q_h, а все, относящееся к материальной структуре системы, синтезируется в одной величине T, т. е. в живой силе.

Отсюда следует, что две материальные системы совершенно различной материальной структуры с точки зрения аналитического представления движения динамически эквивалентны, т. е. при подходящих силах имеют одни и те же уравнения движения, если только при надлежащем выборе лагранжевых координат они допускают одно и то же выражение для живой силы. Очень простой пример такой динамической эквивалентности материальных систем, физически различных между собой, мы будем иметь (как это будет видно в п. 49), рассматривая, с одной стороны, одну свободную материальную точку в пространстве (отнесенную к декартовым координатам), а с другой стороны, материальный диск, свободно движущийся в своей плоскости (если за его лагранжевы координаты примем декартовы координаты какой-нибудь неизменно связанной с ним точки, а третий параметр выберем пропорциональным углу, определяющему его ориентировку в плоскости относительно неподвижных осей).

39. Теорема и интеграл живых сил. Так как уравнения Лагранжа вполне определяют движение голономной системы, то всякое свойство движения должно являться следствием из этих уравнений. В виде примера полезно проверить, что, когда связи не зависят от времени, уравнения (43) будут содержать в себе теорему живых сил, которая, как уже известно, справедлива для всякой системы с такими связями (п. 30).

С этой целью, обозначая через $dq_h (h = 1, 2, \ldots, n)$ лагранжевы составляющие элементарного перемещения, которое голономная система совершает при своем движении в любой элемент времени dt, умножим каждое уравнение (43) на соответствующий дифференциал dq_h и сложим их почленно. Таким образом, получим уравнение

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right) dq_h = \sum_{h=1}^{n} Q_h dq_h. \tag{46}$$

Вспоминая тождество (36) и принимая во внимание, что при связях, не зависящих от времени, всякое действительное элементарное перемещение является также и виртуальным, мы видим, что выражение в правой части дает элементарную работу dL, выполняемую активными силами на рассматриваемом перемещении dq_h системы.

Что же касается левой части уравнения (46), то заметим, что, при заданной независимости связей от времени, живая сила T представляет собой квадратичную форму от $\dot{q}_h$ с коэффициентами, не зависящими от t. Ввиду этого прежде всего имеем по теореме Эйлера

$$2T = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$$

и, следовательно, дифференцируя по времени, получим

$$2\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} + \sum_{h=1}^{n} \ddot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h},$$

а с другой стороны, так как T явно зависит только от q и $\dot{q}$, имеем

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial q_h} + \sum_{h=1}^{n} \ddot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}.$$

Тогда, вычитая по частям это уравнение из предыдущего, получим соотношение

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right)\dot{q}_h,$$

которое по умножении на dt выразит, что левая часть уравнения (46) является элементарным приращением dT, получаемым живой силой за элемент времени dt.

Таким образом, уравнение (46) есть не что иное, как уравнение

$$dT = dL, \tag{47}$$

выражающее *теорему живых сил.*

Далее, если прямо приложенные силы $\boldsymbol{F}_i$ являются производными от потенциала U, то в лагранжевых координатах имеем

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

так как в силу независимости связей от времени потенциал U зависит только от q (п. 31), то имеем

$$dL = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_h} dq_h = dU.$$

Уравнение (47) принимает теперь вид

$$dT = dU$$

и дает после интегрирования *интеграл живых сил* или *энергии.*

40. Функция Лагранжа. Отбросим теперь предположение, что связи не зависят от времени, но будем попрежнему считать, что активные силы F_i являются производными от потенциала U. В лагранжевых координатах все еще будем иметь

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}; \tag{48}$$

при этом во избежание недоразумений необходимо иметь в виду, что если связи явно зависят от времени, то потенциал U, выраженный в лагранжевых координатах, будет также зависеть, вообще говоря, помимо q, еще и от t.

Уравнения Лагранжа, принимая во внимание равенства (48), можно в этом случае написать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_h} = 0;$$

если заметим, что в силу независимости U от $\dot{q}$ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_h},$$

то, полагая

$$T + U = \mathfrak{L}(q, \dot{q} \mid t), \tag{49}$$

можно придать уравнениям Лагранжа более простой вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{50}$$

В этих уравнениях функция $\mathfrak{L}$, так называемая *функция Лагранжа, или кинетический потенциал,* определена равенством (49), так что по отношению к аргументам $\dot{q}$ она представляет собой целую рациональную функцию второй степени.

41. Общие лагранжевы системы. С аналитической точки зрения форма (50) уравнений Лагранжа наводит на мысль рассматривать в виде естественного обобщения системы дифференциальных уравнений типа (50) в предположении, что $\mathfrak{L}$ есть *какая угодно* функция от аргументов q, $\dot{q}$ и t. Эти системы обычно называются *общими лагранжевыми системами.*

Речь идет, очевидно, все еще о системе второго порядка относительно неизвестных функций $q_i(t)$; легко указать условия того, чтобы такая система была *нормальной* (т. е. разрешимой относительно n вторых производных $\ddot{q}$). Действительно, посредством рассуждения, аналогичного развитому в п. 37 для уравнений Лагранжа, мы увидим, что в любом уравнении (50) лагранжевы ускорения $\ddot{q}$ входят только линейно, именно в форме

$$\sum_{k=1}^{n} \ddot{q}_k \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k},$$

откуда следует, что необходимое и достаточное условие для указанной разрешимости системы (50) заключается в том, чтобы симметричный определитель

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\|,$$

так называемый гессиан функции Лагранжа по аргументам $\dot{q}$, не был тождественно равен нулю. В динамическом случае этот гессиан на основании формул (45), (49), естественно, сведется к дискриминанту $\| a_{hk} \|$ полной живой силы T или ее квадратичной части T_2, в зависимости от того, зависят или нет связи от времени.

В виде примера заметим, что система (50) определенно не будет нормальной, если $\mathfrak{L}$ по отношению к $\dot{q}$ есть однородная функция первой степени. Действительно, в этом случае по теореме Эйлера будем иметь тождественно

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \mathfrak{L}$$

и, следовательно, если возьмем производную по любому $\dot{q}_h$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

так как эти n линейных уравнений сохраняют свое значение при каких угодно значениях $\dot{q}$ и, следовательно, также и при значениях, которые не все равны нулю, то заключаем, что должен исчезать определитель из коэффициентов, т. е. гессиан функции $\mathfrak{L}$. Этот результат можно еще более уточнить, если предположить, что функция $\mathfrak{L}$, кроме того, что однородна и первой степени относительно $\dot{q}$, еще и не зависит от t; в этом случае легко видеть, что уравнения (50) не независимы, а связаны тождественным соотношением

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \mathfrak{L}_h = 0,$$

где для краткости через $\mathfrak{L}_h$ обозначен бином, который появляется в левой части h-го из уравнений (50). Действительно, в силу предположения, что $\mathfrak{L}$ не содержит явно t, имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right\}; \tag{51}$$

а так как по предположению все $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k}$ однородны относительно $\dot{q}$ и соответственно первой и нулевой степени, то по теореме Эйлера имеем

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial q_k} \dot{q}_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k}, \quad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h = 0,$$

и достаточно подставить выражения (51) в правую часть соотношения

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \mathfrak{L}_h = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h},$$

чтобы убедиться, что мы имеем здесь выражение, тождественно равное нулю.

42. Кинетические моменты (обобщенные количества движения). Интегралы моментов. Кинетическими моментами или обобщенными количествами движения называются частные производные

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}$$

от лагранжевой функции по скоростям $\dot{q}_h$. Название „кинетические моменты" было введено в употребление в Англии, где *количество движения* называют *моментом*; с другой стороны, если за лагранжевы параметры принимаются декартовы координаты x_i, y_i, z_i точек системы, то, очевидно, имеем

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i.$$

Наконец, для некоторых из систем координат какая-либо из производных $\partial \mathfrak{L}/\partial q_i$ может быть действительно моментом количества движения в нашем смысле слова. Так, например, для материальной точки с массой m, отнесенной к цилиндрическим координатам r, θ, z, живая сила имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2),$$

так что

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

дает как раз момент количества движения относительно оси z.

Предположим теперь, что в какой-нибудь лагранжевой системе в общем смысле или, в частности, в динамической системе функция $\mathfrak{L}$ не зависит от одной из переменных q, например от q_i. В этом случае уравнение с индексом i даст непосредственно *первый интеграл*

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}. \tag{52}$$

Интегралы этого типа называются в силу только что сказанного *первыми интегралами моментов*[1]).

Прибавим еще, что те координаты q, которые не входят в функцию Лагранжа, как раз и дают место этим интегралам; английские авторы называют эти координаты *игнорируемыми* или *циклическими*. В дальнейшем (п. 45) мы узнаем причину названия „игнорируемые"; здесь же для оправдания другого названия — „циклические" — заметим, что в случае одной материальной точки, отнесенной к цилиндрическим координатам, из указанного выше выражения живой силы следует, что функция Лагранжа $\mathfrak{L} = T + U$ не будет зависеть от параметра θ только тогда, когда поле действующих сил представляет круговую (*циклическую*) симметрию относительно оси z.

43. Интеграл энергии. Другой тип первого интеграла имеет место для тех лагранжевых систем (50), для которых функция Лагранжа не зависит от времени.

Для получения этого интеграла удобно установить сначала тождество, действительное для всех лагранжевых систем, которое и само по себе оказывается полезным в некоторых случаях. Для этого начнем с замечания, что если возьмем производную по t от $\mathfrak{L}(q, \dot{q} \mid t)$, то получим

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t};$$

с другой стороны, умножая каждое из уравнений (50) на соответствующую составляющую скорости $\dot{q}_h$ и складывая, получим

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} \right) \dot{q}_h = 0.$$

---

[1]) Соотношения $\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} = c_i$ можно называть с таким же правом первыми интегралами количеств движения. (*Прим. ред.*)

Если теперь из этого уравнения вычтем предыдущее, то придем к уравнению

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\dot{q}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} + \ddot{q}_h \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = 0,$$

которому, очевидно, можно придать вид

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - \mathfrak{L}\right) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = 0;$$

это и есть общее тождество, о котором было сказано в начале этого пункта; если положить для краткости

$$H = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - \mathfrak{L}, \tag{53}$$

то можно написать

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = 0.$$

Предполагая, что функция $\mathfrak{L}$ не зависит от времени, мы выведем отсюда, что для лагранжевой системы имеет место первый интеграл

$$H = \text{const}. \tag{54}$$

Заметим, что в динамическом случае при связях, не зависящих от времени, и при действующих силах, являющихся производными от потенциала U, полученный таким образом интеграл есть не что иное, как интеграл живых сил. Действительно, в этом случае по определению имеем

$$\mathfrak{L} = T + U,$$

где U зависит только от q, а T есть квадратичная форма относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, не зависящими от времени, так что по теореме Эйлера будет иметь место тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h = 2T;$$

отсюда на основании формулы (53) имеем

$$H = 2T - (T + U) = T - U,$$

т. е. мы видим, что H есть как раз *полная энергия* системы.

Поэтому первый интеграл (54), даже и в случае общей лагранжевой системы, обычно называют *интегралом* (обобщенным) энергии.

44. Гиростатические члены. В динамике встречаются случаи, в которых при голономных связях, зависящих от времени, и при наличии благодаря этому для живой силы общего выражения (гл. IV, п. 11)

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

живая сила *оказывается не зависящей от времени*. Такой же будет и функция Лагранжа $\mathfrak{L}$, если система консервативна, так что будет существовать интеграл энергии (54), который, как это видно из того же преобразования предыдущего пункта, здесь принимает вид

$$H = 2T_2 + T_1 - (T + U) = T_2 - T_0 - U = \text{const}. \qquad (54')$$

Таким образом, в результате вычислений мы видим, что из трех слагаемых, из которых состоит T, линейное слагаемое относительно $\dot{q}$, т. е. T_1, не входит в интеграл энергии, но зато оно явно входит в функцию Лагранжа $\mathfrak{L} = T - U$ и поэтому влияет на уравнения Лагранжа.

Особенно простой случай, в котором имеют место только что указанные обстоятельства, мы будем иметь, если отнесем свободную материальную точку, находящуюся под действием консервативной силы, к системе осей $Oxyz$, равномерно вращающейся вокруг оси z, которая остается неподвижной. Если ω есть угловая скорость этих вращающихся осей и ось z предполагается ориентированной в направлении ω, то абсолютная скорость точки определится геометрической суммой относительной скорости с составляющими $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и переносной скорости с составляющими $-\omega y$, ωx, 0 (т. I, гл. IV, пп. 4, 6), так что живая сила

$$T = \frac{1}{2} m \{(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2\}$$

не будет зависеть от времени, причем

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad T_1 = m\omega (x\dot{y} - y\dot{x}), \quad T_0 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Предполагая, что потенциал U действующей силы, когда он выражается через x, y, z, не зависит от времени t, мы прежде всего найдем, что существует первый интеграл вида (54). Далее, так как T_0 можно здесь истолковать как потенциал центробежной силы, происходящей от вращения осей, то интеграл (54) можно отождествить с интегралом живых сил, который мы имели бы, если бы оси координат были неподвижны, а к прямо приложенной силе была прибавлена центробежная сила. Это есть так называемый *интеграл живых сил в относительном движении* или интеграл Якоби[1]).

---

[1]) К. Якоби (Karl Gustav Jacob Jacobi) родился в Потсдаме в 1804 г., умер в Берлине в 1851 г. Был профессором университета в Кёнигсберге. Вместе с Абелем он делит славу создания теории обращения эллиптических интегралов путем введения в анализ замечательных однозначных трансцендентных функций (функций ϑ Якоби), носящих его имя, систематическую

Далее, если напишем в явной форме уравнения Лагранжа, то получим

$$m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$m(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 x) = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$m\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Эти уравнения, естественно, совпадают с уравнениями, которые можно получить прямым путем из основного уравнения $m\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{F}$, если подставить в него вместо ускорения $\boldsymbol{a}_a$ его выражение, получаемое на основании теоремы Кориолиса (т. I, гл. IV, п. 4, б).

Таким образом, действительно, как и говорилось в общем случае, совокупность T_1 членов из T, линейных по отношению к составляющим скорости (относительной) точки (момент количества движения относительно оси вращения), не входит в интеграл живых сил, но влияет на уравнения Лагранжа посредством сложной центробежной силы, т. е. формально, посредством членов с $\dot{x}$, $\dot{y}$. Члены этой линейной функции скоростей T_1, которые входят благодаря тому, что движение точки относится не к неподвижным осям, а к вращающимся, называются *гиростатическими членами* лагранжевой функции.

При распространении на случай общей лагранжевой системы гиростатическими называются те члены функции $\mathfrak{L}$, линейные относительно $\dot{q}$, которые влияют на уравнения движения системы, но не входят в обобщенный интеграл энергии. Из сказанного вначале следует, что гиростатическими членами живой силы T, наверное, будут *члены, линейные относительно* $\dot{q}$ во всех тех динамических задачах, в которых как T, так и потенциал U не зависят от времени.

Наиболее распространенный тип таких задач будет указан в п. 46, другие же простые и механически наглядные примеры встретятся в динамике твердого тела (гл. IX, § 4).

45. Игнорирование координат. Если в функцию $\mathfrak{L}$ не входят m каких-нибудь координат q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *(циклические координаты)*, то соответствующая система уравнений Лагранжа допускает

теорию которых он впервые дал. Не менее фундаментальными являются и результаты, полученные им в области уравнений с частными производными, и его методы интегрирования уравнений небесной механики. Главные из этих методов изложены в его превосходных „Лекциях по динамике" (К. Г. Якоби, Лекции по динамике, М., 1936), опубликованных после его смерти (стараниями Клебша). Наконец, по всеобщему признанию, все его математические произведения, собранные в восьми томах (Берлин, 1881—1890), считаются классическими.

m первых интегралов моментов (интегралов импульсов) (п. 42)

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{const} = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{55}$$

Если предположить, что рассматриваемая система уравнений Лагранжа (50) нормальна, то m уравнений системы (55) будут разрешимы относительно m производных $\dot{q}$, так как определитель, составленный из вторых производных функции $\mathfrak{L}$

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\|,$$

отличен от нуля (п. 41); поэтому отличным от нуля будет по крайней мере один из миноров порядка m, получающихся из m первых строк этого определителя. Следовательно, m уравнениями (55) можно прямо заменить столько же уравнений, выбранных надлежащим образом из лагранжевой системы (50).

Предположим, в частности, что речь идет о динамической системе, так что имеем $\mathfrak{L} = T + U$. В этом предположении, как мы уже знаем (п. 41), гессиан Δ функции $\mathfrak{L}$ сводится к дискриминанту $\| a_{hk} \|$ квадратичной части T_2 живой силы T или полной живой силы T, смотря по тому, зависят или не зависят связи от времени. Так как в обоих случаях речь идет об определенной положительной форме, то дискриминант во всяком случае будет отличным от нуля и положительным, как и все его главные миноры; вместе с другими аналогичными главными минорами найдется минор m-го порядка, образованный пересечением m первых строк и m первых столбцов, также отличный от нуля. Уравнения (55) будут, таким образом, разрешимы относительно m производных $\dot{q}_i$ от m циклических координат $q_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, и потому их можно взять вместо m первых уравнений Лагранжа.

Остальные $n - m$ уравнений, которые по предположению уже не содержат q_i, можно сделать независимыми также и от $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$, подставляя вместо этих производных их выражения через q_h, $\dot{q}_h$, $\ddot{q}_h (h > m)$ и c_i, которые получатся из уравнений (55). Таким образом мы придем к системе дифференциальных уравнений второго порядка, заключающей в себе только $n - m$ неизвестных $q_h (h = m + 1, \ldots, n)$. Докажем теперь одно замечательное свойство, которое, конечно, нельзя было предвидеть a priori, а именно, что эта новая система все еще сохраняет лагранжеву форму, но уже, естественно, не по отношению к первоначальной функции $\mathfrak{L}$, а по отношению к *приведенной лагранжевой функции*

$$\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L} - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{q}_i; \tag{56}$$

здесь, конечно, предполагается, что в функцию $\mathfrak{L}$ вместо $\dot{q}_i$ подставлены их выражения через q_h, $\dot{q}_h$, c_i, полученные из системы (55).

Справедливость этого проверяется непосредственно, так как, обозначая через x какой-нибудь один из аргументов q_h или $\dot{q}_h$ при $h > m$, мы имеем по определению функции $\mathfrak{L}^*$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x} - \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x}$$

или же, на основании системы (55),

$$\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}.$$

То обстоятельство, что определение переменных q_h при $h > m$ можно свести к интегрированию некоторой лагранжевой системы, в которой уже не осталось никакого следа от m координат $q_1, \ldots, q_m$, оправдывает название этого метода *методом игнорирования координат,* которое обычно дается предыдущему приведению. Название „игнорирование" применяется здесь потому, что при определении координат q_h при $h > m$ можно не знать (игнорировать) остальные координаты, входившие вначале при действительном описании задачи. При этом заметим, что в большинстве конкретных задач интегрируемость в квадратурах очень часто является следствием наличия игнорируемых координат.

46. Гиростатические члены, вводимые в динамическом случае методом игнорирования координат. Возвращаясь снова к динамическому случаю с консервативными действующими силами, добавим предположение, что *связи не зависят от времени;* вследствие этого живая сила T будет квадратичной формой относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от q,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h, k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k.$$

Легко видеть, что в этом случае исключение циклических координат $q_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ введет в приведенную функцию Лагранжа $\mathfrak{L}^*$ некоторое число линейных относительно $\dot{q}_h (h = m+1, \ldots, n)$ членов, которые имеют гиростатический характер.

Для доказательства заметим прежде всего, что при указанных выше предположениях, так как $\mathfrak{L} = T + U$ и U не зависит от $\dot{q}$, первые интегралы (55) будут иметь вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (55')$$

Эти m интегралов дадут столько же линейных неоднородных относительно $\dot{q}$ уравнений с *коэффициентами, зависящими только от* $q_h (h = m+1, \ldots, n)$; решая эти уравнения относительно $\dot{q}_i$, получим

$$\dot{q}_i = \gamma_i + \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{55''}$$

где γ_i — известные функции от одних только q_h (и от постоянных c_i), а λ_i обозначают m линейных относительно $\dot{q}_h$ форм с коэффициентами, зависящими только от q_h (но не от c_i).

Приведенная функция Лагранжа на основании формулы (56) определится равенством

$$\mathfrak{L}^* = T + U - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{q}_i, \tag{56'}$$

где вместо $\dot{q}_i$ нужно подставить как в T, так и в сумму их выражения через $\dot{q}_h$. Все упомянутые выше гиростатические члены получатся только от этой суммы (и при произвольных значениях c_i будут неприводимыми). Это объясняется тем замечательным обстоятельством (которое, однако, нельзя было предвидеть a priori), что T по выполнении подстановки не будет содержать линейных членов с $\dot{q}_h$, а будет заключать в себе только члены второй и нулевой степеней относительно $\dot{q}_h$. Это можно проверить, представив уравнения (55'') в явной форме и выполнив на самом деле подстановку в T, но мы предпочтем идти иным путем, с меньшими выкладками. Отделим в T члены, квадратичные относительно $\dot{q}_i$ и $\dot{q}_h$ и билинейные относительно $\dot{q}_i$, $\dot{q}_h$, полагая

$$T = T' + B + T'',$$

где

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{m} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=m+1}^{n} a_{ih} \dot{q}_i \dot{q}_h,$$

$$T'' = \frac{1}{2} \sum_{h, k=m+1}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k.$$

Равенства (55') можно написать в виде

$$\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} = c_i - \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{55'''}$$

где $\dfrac{\partial B}{\partial \dot{q}_i}$ суть линейные формы только по отношению к $\dot{q}_h$; вследствие этого, выполняя в равенстве

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} + 2 \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \right) + T''$$

первое частичное исключение $\dot{q}_i$, получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \left(c_i + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \right) + T''. \tag{57}$$

Так как T'' уже есть квадратичная форма относительно $\dot{q}_h$, то остается только показать, что после выполнения подстановки до конца выражение под знаком суммы не будет содержать линейных членов, или, другими словами, что оно остается неизменным при изменении знака у всех $\dot{q}_h$.

Для доказательства полагаем $\bar{\dot{q}}_h = -\dot{q}_h$ и соответственно $\bar{\dot{q}}_i = \gamma_i - \lambda_i$, обозначая таким образом через $\bar{\dot{q}}_i$ те величины, в которые обращаются $\dot{q}_i$ на основании формул (55‴) после изменения знака у всех $\dot{q}_h$. Так как $\frac{\partial B}{\partial \bar{\dot{q}}_i}$ являются линейными формами относительно $\dot{q}_h$, то имеем

$$\frac{\partial B}{\partial \bar{\dot{q}}_i} = -\frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i},$$

так что вместе с соотношениями (55‴) будут иметь место еще и равенства

$$\frac{\partial T'}{\partial \bar{\dot{q}}_i} = c_i + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (55^{IV})$$

И так как T' есть квадратичная форма относительно $\dot{q}_i$, то вследствие симметричности соответствующей билинейной формы (полярной) справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{\dot{q}}_i \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \frac{\partial T'}{\bar{\dot{q}}_i}$$

или же на основании формул (55‴) и (55^{IV})

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{\dot{q}}_i \left(c_i - \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \left(c_i + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i}\right);$$

это тождество как раз и показывает, что сумма в равенстве (57), а следовательно, и сама живая сила T, остается неизменной при изменении знака у всех $\dot{q}_h$, т. е. что T не содержит линейных членов.

Отсюда следует, что в приведенной лагранжевой функции (56′) [1] линейные члены относительно $\dot{q}_h$, происходящие от суммы и поэтому появляющиеся на основании формул (55″) в сумме

$$-\sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i,$$

не могут сократиться; а так как $\mathfrak{L}^*$ не зависит от времени, то заключаем, что речь идет о таком же числе гиростатических членов.

Заметим еще, что то, что было изложено, представляет собой, быть может, наиболее замечательный пример лагранжевых функций, соответствующих действительным динамическим задачам и содержащих в себе гиростатические члены.

§ 7. Приложения и примеры

47. Кинетическая интерпретация биномов Лагранжа. Прежде чем иллюстрировать уравнения Лагранжа некоторыми элементарными приложениями, мы покажем на простейшем примере одной материальной точки P интересную кинематическую интерпретацию лагранжевых биномов, входящих в левые части этих уравнений.

Отнесем точку P к каким угодно лагранжевым параметрам q_1, q_2, q_3 (*криволинейные координаты* в пространстве), предполагая для простоты, что время не входит в единственное геометрическое уравнение

$$P = P(q_1, q_2, q_3), \tag{58}$$

определяющее положение точки в зависимости от координат q; при переходе к координатной форме получим три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}\right\} \tag{58'}$$

Если в уравнении (58) заставить изменяться только одну из координат q, например q_1, приписывая вполне определенные значения q_2^0, q_3^0 остальным двум, то точка P опишет кривую, определяемую в лагранжевых координатах двумя уравнениями: $q_2 = q_2^0$, $q_3 = q_3^0$, для которой q_1 будет геометрическим параметром. Она называется *координатной линией* q_1; ясно, что при изменении q_2^0, q_3^0 получится система ∞^2 (или *конгруэнция*) линий q_1, так что через всякую точку любой области пространства, в которой уравнения (58') разрешимы однозначно относительно q, пройдет одна и только одна из этих кривых. То же самое можно сказать и о линиях q_2 и q_3.

По известному свойству вектора, являющегося производной от переменной точки (т. I, гл. I, п. 66), производная $\frac{\partial P}{\partial q_h}$, если остальным двум q, отличным от q_h, приписываются определенные значения, представит собой вектор, касательный к соответствующей линии q_h, который будет единичным только тогда, когда q_h будет длиной s дуги рассматриваемой линии. Во всяком случае, обозначая через $\mathbf{t}_h$ касательный единичный вектор, направленный в сторону возрастания q_h, будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial q_h} = \left|\frac{\partial P}{\partial q_h}\right| \mathbf{t}_h \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{59}$$