Заметим еще, что то, что было изложено, представляет собой, быть может, наиболее замечательный пример лагранжевых функций, соответствующих действительным динамическим задачам и содержащих в себе гиростатические члены.

§ 7. Приложения и примеры

47. Кинетическая интерпретация биномов Лагранжа. Прежде чем иллюстрировать уравнения Лагранжа некоторыми элементарными приложениями, мы покажем на простейшем примере одной материальной точки P интересную кинематическую интерпретацию лагранжевых биномов, входящих в левые части этих уравнений.

Отнесем точку P к каким угодно лагранжевым параметрам q_1, q_2, q_3 (*криволинейные координаты* в пространстве), предполагая для простоты, что время не входит в единственное геометрическое уравнение

$$P = P(q_1, q_2, q_3), \tag{58}$$

определяющее положение точки в зависимости от координат q; при переходе к координатной форме получим три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}\right\} \tag{58'}$$

Если в уравнении (58) заставить изменяться только одну из координат q, например q_1, приписывая вполне определенные значения q_2^0, q_3^0 остальным двум, то точка P опишет кривую, определяемую в лагранжевых координатах двумя уравнениями: $q_2 = q_2^0$, $q_3 = q_3^0$, для которой q_1 будет геометрическим параметром. Она называется *координатной линией* q_1; ясно, что при изменении q_2^0, q_3^0 получится система ∞^2 (или *конгруэнция*) линий q_1, так что через всякую точку любой области пространства, в которой уравнения (58') разрешимы однозначно относительно q, пройдет одна и только одна из этих кривых. То же самое можно сказать и о линиях q_2 и q_3.

По известному свойству вектора, являющегося производной от переменной точки (т. I, гл. I, п. 66), производная $\frac{\partial P}{\partial q_h}$, если остальным двум q, отличным от q_h, приписываются определенные значения, представит собой вектор, касательный к соответствующей линии q_h, который будет единичным только тогда, когда q_h будет длиной s дуги рассматриваемой линии. Во всяком случае, обозначая через t_h касательный единичный вектор, направленный в сторону возрастания q_h, будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial q_h} = \left|\frac{\partial P}{\partial q_h}\right| t_h \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{59}$$

Возьмем теперь снова тождества (42) п. 37 и представим себе, что в них вместо τ_h подставлены их выражения (38) из п. 36. В нашем случае одной точки P получатся следующие три соотношения:

$$a\cdot\frac{\partial P}{\partial q_h}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\qquad (h=1,\ 2,\ 3).$$

Принимая во внимание соотношения (59), мы получим отсюда уравнения

$$a\cdot t_h=\frac{1}{\left|\frac{\partial P}{\partial q_h}\right|}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)\qquad (h=1,\ 2,\ 3),\quad (60)$$

устанавливающие простое соотношение между биномом, стоящим в левой части любого, отдельно взятого уравнения Лагранжа, и составляющей ускорения по соответствующей обобщенной координате q; в частности, мы будем иметь тождество между тем и другим, если координата q есть как раз длина дуги рассматриваемой координатной линии.

48. Применим только что полученные формулы (60) к случаю, когда за лагранжевы координаты точки берутся ее полярные (сферические) координаты: ρ (радиус-вектор), φ (долгота) и θ (полярный угол). Здесь координатными линиями ρ являются лучи, выходящие из полюса, линиями φ — *параллели* (т. е. окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси z, и имеющие центры на этой оси), линиями θ — меридианы (т. е. полуокружности с центром в полюсе, имеющие диаметр на оси z). В совокупности они составят триортогональную систему (т. е. кривые трех различных систем, проходящие через любую точку пространства, будут попарно взаимно ортогональны).

В этом случае уравнения (58′) принимают, как известно, вид

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta;\qquad (61)$$

поэтому для живой силы получим выражение

$$2T=\dot\rho^2+\rho^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta).$$

Отсюда следует, что левые части уравнений Лагранжа, относящиеся соответственно к координатам ρ, φ, θ, будут иметь вид

$$\ddot\rho-\rho(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta),$$
$$\rho\sin\theta\,[2\dot\varphi(\dot\rho\sin\theta+\rho\dot\theta\cos\theta)+\rho\ddot\varphi\sin\theta],$$
$$2\rho\dot\rho\dot\theta+\rho^2(\ddot\theta-\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta).$$

Так как на основании уравнений (61) имеем

$$\left|\frac{\partial P}{\partial\rho}\right|=1,\qquad \left|\frac{\partial P}{\partial\varphi}\right|=\rho\sin\theta,\qquad \left|\frac{\partial P}{\partial\theta}\right|=\rho,$$

то, применяя формулу (60), заключаем, что составляющие ускорения по линиям ρ, φ, θ имеют следующие выражения:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta),$$

$$a_\varphi = 2\dot{\varphi}(\dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta) + \rho\ddot{\varphi}\sin\theta,$$

$$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta).$$

49. Пример динамической эквивалентности. Рассмотрим твердый материальный диск какой угодно формы и структуры, который может свободно двигаться в своей плоскости. Обозначим через G его центр тяжести, через ξ_0, η_0 — координаты точки G относительно осей $\Omega\xi\eta$, неподвижных относительно плоскости, в которой происходит движение, и, наконец, через φ — угол, составляемый с осью ξ какой-нибудь ориентированной прямой, неизменно связанной с диском. Следовательно, речь идет о голономной системе со связями, не зависящими от времени, имеющей три степени свободы, за лагранжевы координаты которой можно принять три параметра: ξ_0, η_0 и θ.

Для того чтобы написать соответствующие уравнения Лагранжа, необходимо прежде всего найти выражение живой силы T в функции от ξ_0, η_0, θ, к которому можно придти, пользуясь определением живой силы или применяя теорему Кёнига (гл. IV, п. 8). В этом последнем случае достаточно вспомнить, что живая сила поступательного движения будет $m\frac{\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2}{2}$, живая сила вращательного движения вокруг G будет $\frac{A\dot{\theta}^2}{2}$ (гл. IV, п. 10), где m обозначает массу диска и A — его момент инерции относительно перпендикуляра к диску в центре тяжести G или, что все равно, полярный момент инерции относительно G. Вводя вместо A соответствующий радиус инерции δ, получим

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \delta^2\dot{\theta}^2);$$

если за третий лагранжев параметр вместо θ примем $\zeta_0 = \delta\theta$, то это выражение живой силы диска приведется к виду

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2). \tag{62}$$

Оно тождественно с выражением живой силы одной материальной точки с массой m и координатами ξ_0, η_0, ζ_0, свободно движущейся в пространстве, а в этом и заключается, в смысле, разъясненном в п. 38, динамическая эквивалентность диска и свободной материальной точки.

Левые части уравнений Лагранжа, вычисленные, исходя из выражения (62) для живой силы, относительно лагранжевых координат ξ_0, η_0, ζ_0, приводятся к ньютоновой форме $m\ddot{\xi}_0$, $m\ddot{\eta}_0$, $m\ddot{\zeta}_0$, тогда как правые части, составляющие активной силы по координатам ξ_0, η_0, ζ_0, зависят, естественно, на основании соотношений (37) от активных сил; и так как относительно последних не делается никаких дальнейших предположений, то ничего нельзя прибавить к тому, что уже было сказано в общем случае в пп. 37—40. Таким образом, если речь идет о консервативных силах, при наличии которых всегда имеется функция Лагранжа $L = T + U$, не зависящая от времени, то будет существовать и интеграл живых сил. Кроме того, так как живая сила T в этом случае явно не содержит ни одного параметра Лагранжа, а только производные от них, то будем иметь столько первых интегралов, сколько среди аргументов ξ_0, η_0, ζ_0 будет таких, от которых не зависит функция U (п. 42).

Важный тип задач динамики диска встречается в авиации в тех случаях, когда, желая объединить законы движения самолета в вертикальной плоскости, приходится схематически уподоблять его диску с вертикальной плоскостью, в которой движется его центр тяжести; при этом, естественно, из действующих сил в основном учитываются только сила тяжести и сопротивление воздуха, оцениваемое надлежащим образом по отношению к действительному профилю самолета.

50. Тяжелая точка, удерживаемая на поверхности гладкого цилиндра с вертикальными образующими. Пользуясь системой осей, связанных с Землей, примем направленную вниз вертикаль за ось ζ и представим в виде

$$\xi = \xi(s), \quad \eta = \eta(s)$$

параметрические уравнения нормального сечения цилиндра, где за параметр принята длина дуги s этого сечения. Положение материальной точки P, удерживаемой цилиндром, определяется, очевидно, соответствующими значениями s и ζ, которые поэтому можно принять за лагранжевы координаты точки. А так как по определению параметра s имеем

$$d\xi^2 + d\eta^2 = ds^2,$$

то живая сила точки P с массой, равной единице, при указанных условиях определится равенством

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{s}^2 + \dot{\zeta}^2). \tag{63}$$

С другой стороны, если точка P подвергается действию только силы тяжести, то для активной силы существует потенциал

$$U = g\zeta, \tag{64}$$

относящийся к точке, масса которой равна единице. Теперь, предполагая, что цилиндр является гладким, мы можем прямо применить уравнения Лагранжа, которые на основании соотношений (63) и (64) будут иметь вид

$$\ddot{s} = 0, \quad \ddot{\zeta} = g,$$

т. е. будут тождественны с уравнениями движения свободно падающего тяжелого тела (отнесенного к прямоугольным осям, лежащим в вертикальной плоскости, в которой находится начальная скорость, причем одна из осей совпадает с направленной вниз вертикалью). Поэтому мы заключаем, что если тяжелая точка вынуждена двигаться по гладкому цилиндру с вертикальными образующими и с каким угодно сечением, то ее траектория будет такой кривой, которая после развертывания цилиндра на плоскость обратится в дугу параболы (с возможным вырождением в прямую), имеющую осью образующую цилиндра и обращенную выпуклостью вниз.

Наконец, даже не составляя на самом деле уравнений Лагранжа, можно придти к тому же заключению, замечая, что по отношению к координатам s, ζ живая сила (63) и потенциал (64) нашей точки тождественны с живой силой и потенциалом свободно падающего тяжелого тела, отнесенного, в вертикальной плоскости, содержащей начальную скорость, к осям s и ζ, вторая из которых совпадает с вертикалью, направленной вниз. Мы имеем здесь, таким образом, второй пример динамической эквивалентности (п. 38).

51. Микросейсмограф с двумя горизонтальными составляющими или сферический маятник с подвижным центром подвеса. Сейсмографы, как известно, представляют собой инструменты, предназначенные для автоматической регистрации землетрясений. Они дают непосредственно диаграмму регистрирующей точки, скрепленной каким-либо образом с основанием прибора, неизменно связанным с землей. Сейсмографы бывают большей частью двух типов, соответственно называемых *сейсмографами с горизонтальными составляющими и сейсмографами с вертикальными составляющими*[1]).

Общая теория приборов первого типа может быть построена, если рассмотреть в качестве схемы сферический маятник, точка подвеса O которого может двигаться в зависимости от колебаний земной коры при землетрясениях.

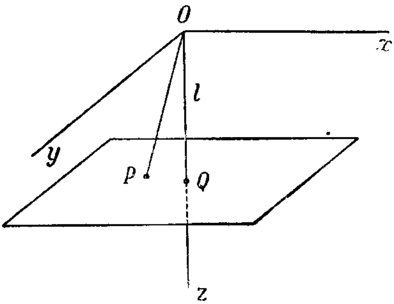
Заметим, кстати, что мы пришли здесь к такому примеру связей, зависящих от времени, который не носит искусственного характера и не является чисто теоретическим. Мы предполагаем здесь уточнить аналитическую постановку задачи о движении такого схематического прибора.

Обозначим через $\Omega\xi\eta\zeta$ оси координат, которые назовем геоидными, вследствие того, что они неизменно связаны с геоидом (или

[1] Б. Голицын, Vorlesungen über seismometrie, Leipzig, Teubner 1914. Ср., в частности, гл. IV, V и VIII.

также с конфигурацией Земли, которую она имела бы при отсутствии колебаний земной коры), и, отвлекаясь от движения Земли, примем их за механическую систему отсчета.

Рассмотрим, далее, маятник длиною l и с массой P, центр сферического подвеса которого пусть будет закреплен в некоторой точке O, связанной с Землей; обозначим через $Oxyz$ оси координат, неизменно связанные с некоторым куском земной коры (в окрестности точки O) и имеющие при сейсмическом покое ось z направленной по вертикали вниз (фиг. 20).



Фиг. 20.

Точка подвеса O, принимая участие во всяком местном сейсмическом движении, определяет колебательное движение массы маятника, и сейсмограф будет регистрировать колебания точки P относительно земных осей $Oxyz$ или, лучше сказать, колебания ее проекции на плоскость $z = l$. Сейсмографическая задача состоит в том, чтобы получить из этих данных неизвестное колебание точки O относительно геоидных осей $\Omega\xi\eta\zeta$.

При землетрясениях скорость $\dot{O}$ точки O является неизвестной векторной функцией времени, составляющие которой по земным осям мы обозначим через u, v, w, в силу чего u и v только *приблизительно* могут быть названы *горизонтальными составляющими* и w — *вертикальной* составляющей сейсмической скорости точки O, так как, строго говоря, эти составляющие должны были бы относиться к геоидным осям. Обозначим через ω угловую скорость, которую во время землетрясения имеет система земных осей $Oxyz$ относительно воображаемой геоидной системы осей, и через p, q, r — соответствующие составляющие по осям $Oxyz$.

Любая точка P, неизменно связанная с этими земными осями, имела бы относительно геоидных осей (переносную) скорость

$$v_\tau = \dot{O} + \omega \times \overrightarrow{OP},$$

а (относительное) движение массы P маятника по отношению к осям $Oxyz$ дается диаграммой сейсмографа, так как движение точки P можно заменить движением ее проекции на плоскость $z = l$, если ограничиться малыми колебаниями в смысле п. 52 гл. II, что вполне допустимо для данной задачи. Другими словами, можно принять координату z всегда равной l, так что, обозначая через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ единичные векторы осей x, y, z, будем иметь

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + l\boldsymbol{k},$$

причем можно сказать, что при принятом приближении x, y являются лагранжевыми координатами движущейся точки относительно земных осей.

Отсюда следует, что скорость (относительная) точки P по отношению к осям $Oxyz$ выражается в виде

$$\boldsymbol{v}_r = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j},$$

а скорость (абсолютная) относительно геоидных осей определяется равенством

$$\dot{P} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\tau = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{O} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}.$$

Обозначая через Q положение равновесия точки P в условиях сейсмического покоя (т. е. точку пересечения оси z с плоскостью $z = l$), можем написать тождество:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\overrightarrow{OP}) = \boldsymbol{\omega} \times (\overrightarrow{OQ}) + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{QP}.$$

Если допустим, что ωl имеет тот же порядок, что и скорость проекции точки P, то слагаемым $\omega \times \overrightarrow{QP}$ в правой части, модуль которого будет порядка $\frac{\omega l \cdot QP}{l}$, можно пренебречь, так как дробь $\frac{QP}{l}$ можно рассматривать как малую первого порядка. Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{O} + l\omega \times \boldsymbol{k} = \\ &= (\dot{x} + u + lq)\,\boldsymbol{i} + (\dot{y} + v - lp)\,\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Тогда, если для краткости положим

$$u_0 = u + lq, \qquad v_0 = v - lp, \tag{65}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2 + w^2), \tag{66}$$

где T_0 обозначает живую силу точки Q, масса которой равна единице, то для живой силы T точки P с массой, тоже равной единице, мы найдем выражение

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + u_0\dot{x} + v_0\dot{y} + T_0. \tag{67}$$

Теперь, чтобы написать уравнения Лагранжа, нам остается только рассмотреть активные силы, которые сводятся здесь к силе тяжести, имеющей потенциал

$$U = g\zeta,$$

или, если обозначим через γ третью координату точки O относительно геоидных осей и через γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси ζ относительно земных осей,

$$U = g(\gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z),$$

где z вычисляется из уравнения сферы с центром в O и радиусом l. Чтобы перейти от этого точного выражения к достаточному для нашей цели приближенному, заметим, что в дифференциальные уравнения входят первые производные от потенциала, поэтому мы можем пренебречь в выражении для U только членами порядка выше второго. Можно положить, следовательно,

$$z = l\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{l^2}\right);$$

с другой стороны, принимая отклонение прямой OP от вертикали за малую величину, т. е. рассматривая величины γ_1 и γ_2 как малые первого порядка, мы увидим, что третий направляющий косинус $\gamma_3 = \sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}$ будет отличаться от единицы только членами второго порядка; поэтому при только что указанном порядке приближения можно написать

$$U = g\left(\gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + l - \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{l}\right).$$

Отсюда и из выражения (67) для T получаем уравнения движения Лагранжа в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_0 + \ddot{x} &= g\left(\gamma_1 - \frac{x}{l}\right), \\ \dot{v}_0 + \ddot{y} &= g\left(\gamma_2 - \frac{y}{l}\right), \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

где u_0, v_0, γ_1, γ_2 суть неизвестные заранее функции от t, а x и y и, следовательно, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ нужно рассматривать как известные, так как они могут быть получены из инструментальных диаграмм.

Вспомним теперь, что общая задача сейсмологии состоит в определении движения земных осей относительно геоидных, т. е. в определении шести характеристик: u, v, w, p, q, r. Эти характеристики удобно разбить на две группы: u, v, p, q, с одной стороны, и w, r — с другой. Последние две величины даются показанием сейсмографа с вертикальными составляющими, и достаточно вспомнить формулы Пуассона

$$\dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r$$

и принять во внимание, что при нашем порядке приближения γ_3 равно единице, а произведениями $\gamma_2 r$, $\gamma_1 r$ можно пренебречь, как величинами второго порядка, чтобы видеть, что приближенно можно положить

$$\dot{\gamma}_1 = -q, \quad \dot{\gamma}_2 = p. \tag{69}$$

Отсюда мы заключаем, что определение величин γ_1, γ_2 равносильно определению p и q; поэтому маятник с двумя горизонтальными составляющими дает два соотношения между инструментальными данными и неизвестными характеристиками u_0, v_0, p и q.

При помощи двух маятников с различной длиной, но достаточно близких друг от друга для того, чтобы $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$, γ_1, γ_2 можно было рассматривать как совпадающие, получатся четыре уравнения между этими четырьмя неизвестными.

Наконец, нужно отметить, что опыт привел к подтверждению того, что в наиболее часто встречающихся случаях, т. е. когда речь идет о сейсмических возмущениях, вызываемых отдаленными землетрясениями (микроколебания, происходящие от удаленных источников возмущений), можно прямо пренебречь вращением земных осей относительно осей геоидных, так что движение осей $Oxyz$ можно рассматривать как чисто поступательное. В этом случае в силу равенств (65) u_0, v_0 будут равны горизонтальным составляющим u, v скорости сейсмического колебания. Уравнения же (69), вследствие того что вначале (т. е. в условиях покоя) прямая OP направлена вертикально, дают $\gamma_1=\gamma_2=0$, в силу чего уравнения (68) приводятся к следующим:

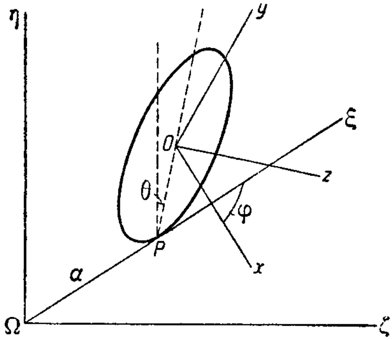
$$\dot{u}=-\left(\ddot{x}+\frac{g}{l}x\right),$$
$$\dot{v}=-\left(\ddot{y}+\frac{g}{l}y\right)$$

и непосредственно дают составляющие горизонтального ускорения.

Чтобы сделать выводы из диаграммы соответствующих горизонтальных перемещений, сейсмологи прибегают к разнообразным приемам, на которых мы здесь не можем останавливаться.

52. Тяжелый диск, катящийся вдоль заданного прямолинейного пути. Этот пример заслуживает особого внимания потому, что если в общем случае условие чистого качения налагает, как мы знаем (т. I, гл. IV, п. 11), неголономную связь, то в этом частном случае это условие переходит просто в дополнительную голономную связь.

Пусть твердый однородный диск с радиусом a и массой m вынужден катиться без трения вдоль заданной неподвижной прямой. Чтобы определить положение диска в любой момент, отнесем его, следуя общему приему, к двум системам осей: к неподвижным осям $\Omega\xi\eta\zeta$ (фиг. 21), из которых ось ξ совпадает с заданным прямолинейным путем, и к осям $Oxyz$, неизменно связанным с диском, начало которых совпадает с центром диска, а ось z перпендикулярна к его плоскости. Ось ξ будет *линией узлов* подвижных осей относительно неподвижных, так что третий угол Эйлера ψ будет тождественно равен нулю. Ясно, что положение диска в любой момент будет однозначно определено, если будут указаны: первая координата α точки P, в которой ось ξ касается диска, угол наклона θ его плоскости к плоскости $\xi\eta$ (первый угол Эйлера) и, наконец, угол φ (второй угол Эйлера, отсчитываемый в правом направлении), на который повернется подвижная ось x вокруг оси z, отправляясь от ориентированного направления линии узлов.



Фиг. 21.

Из условия чистого качения следует, что в любой момент дуга, описанная какой-нибудь точкой окружности диска (в частности, точкой, которая вначале была в соприкосновении с осью ξ), равна расстоянию точки касания в рассматриваемый момент от точки касания в начальный момент. Если обозначим через α_0 и φ_0 значения α и φ в начале движения и примем во внимание, что при качении диска по оси ξ в положительную сторону ось x вращается вокруг оси z в левом направлении, то найдем соотношение

$$\alpha - \alpha_0 = -a(\varphi - \varphi_0). \tag{70}$$

Это равенство подтверждает высказанное в самом начале этого пункта положение, что в данном частном случае условие чистого качения приводит к конечному соотношению между параметрами α и φ, т. е. к голономной связи.

Благодаря этой связи число степеней свободы сводится к двум. За параметры Лагранжа мы примем два угла: θ и φ, замечая, что из уравнения (70) следует

$$\dot{\alpha} = -a\dot{\varphi}. \tag{71}$$

Теперь, чтобы написать лагранжевы уравнения движения диска, необходимо прежде всего вычислить живую силу T, к которой мы легко придем, применяя формулу (17) гл. IV (п. 10) и принимая за (подвижной) центр приведения в любой момент t ту материальную точку диска, которая находится в соприкосновении с осью ξ и скорость которой в этот момент в силу отсутствия скольжения равна нулю. Если обозначим временно через $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ подвижную систему осей, связанных с диском, ось $\bar{z}$ которой параллельна оси z диска, а ось $\bar{x}$ в момент t совпадает с осью ξ, и через A, B, C — соответствующие моменты инерции диска, то, применяя теорему Гюйгенса и вспоминая, что (центральные) моменты инерции диска относительно оси z и какого-нибудь диаметра равны $\frac{ma^2}{2}$, $\frac{ma^2}{4}$ (т. I, гл. X, пп. 34, 27), будем иметь

$$A = \frac{5}{4}ma^2, \quad B = \frac{1}{4}ma^2, \quad C = \frac{3}{2}ma^2. \tag{72}$$

Что же касается произведений инерции, то имеем

$$\bar{A}' = \bar{B}' = \bar{C}' = 0, \tag{73}$$

и потому оси $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ параллельны трем главным центральным осям инерции диска, а новый центр приведения принадлежит одной из этих центральных осей[1]). Следует заметить, что формулы (72), (73), как не зависящие от времени, остаются в силе уже не только в рассматриваемый момент t, но и в течение всего движения.

Поэтому на основании уже упоминавшейся формулы гл. IV и принимая во внимание, что в любой момент исчезают составляющие u, v, w скорости соответствующего центра приведения, мы будем иметь

$$2T = \frac{1}{4} ma^2 (5p^2 + q^2 + 6r^2),$$

и все сведется к вычислению составляющих p, q, r угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ диска относительно осей $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, первая из которых совпадает с линией узлов, а третья параллельна оси z диска. Обозначая теперь соответственно через $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ единичные векторы линии узлов, подвижной оси z и неподвижной оси ζ, мы будем иметь (т. I, гл. III, п. 34)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{N} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} + \dot{\psi}\boldsymbol{\varkappa},$$

так что при угле ψ, здесь тождественно равном нулю, мы получим

$$p = \dot{\theta}, \quad q = 0, \quad r = \dot{\varphi}$$

[1]) Здесь применяется следующее замечание, часто оказывающееся полезным в приложениях. *Всякая система осей, параллельных главным центральным осям инерции твердого тела и имеющих начало на одной из этих центральных осей, состоит также из главных осей инерции.* Действительно, если $Gxyz$ есть система главных осей инерции твердого тела относительно его центра тяжести G, и мы возьмем за новые оси три прямые $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, параллельные осям x, y, z в точке $O(0, a, 0)$, то произведения инерции относительно новых осей определятся равенствами

$$\bar{A}' = \sum_i m_i \bar{y}_i \bar{z}_i = \sum m_i (y_i - a) z_i,$$

$$\bar{B}' = \sum_i m_i \bar{z}_i \bar{x}_i = \sum m_i z_i x_i,$$

$$\bar{C}' = \sum_i m_i \bar{x}_i \bar{y}_i = \sum_i m_i x_i (y_i - a),$$

и, следовательно, вместе с центральными произведениями инерции и аналогичными статическими моментами $\sum_i m_i x_i$, $\sum_i m_i z_i$ будут равны нулю.

и, следовательно,

$$2T = \frac{1}{4} ma^2 (5\dot{\theta}^2 + 6\dot{\varphi}^2).$$

Все это сохраняет свое значение при каких угодно силах, действующих на диск; поэтому всякий раз, когда речь будет идти о консервативных силах, достаточно выразить их потенциал через θ и φ, чтобы затем написать уравнения Лагранжа.

Рассмотрим частный случай этой задачи, предполагая, что заданный путь горизонтален и что диск подвергается действию исключительно силы тяжести. Приняв, что всегда возможно, неподвижную плоскость ξ, η за горизонтальную и нисходящую вертикаль — за ось ζ, мы будем иметь для потенциала при высоте центра тяжести (предполагаемого выше плоскости $\xi\eta$), равной $-a \sin \theta$, выражение

$$U = -mag \sin \theta,$$

так что уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{5}{4} a \ddot{\theta} = -g \cos \theta, \quad \ddot{\varphi} = 0. \tag{74}$$

Второе из этих уравнений показывает, что угол собственного вращения диска φ изменяется равномерно, а первое, если положить $\theta = \theta_1 - \pi/2$, преобразуется в следующее:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{\frac{5}{4} a} \sin \theta_1,$$

т. е. тождественно с уравнением колебаний простого маятника длиной $l = \frac{5}{4} a$. Очевидное частное решение системы (74) (*статическое решение,* о котором мы будем говорить в § 4 гл. VI) мы будем иметь, полагая $\dot{\varphi} = \text{const} = r_0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ (и, следовательно, $\theta_1 = \pi$), т. е. воображая, что диск катится с произвольной постоянной угловой скоростью, оставаясь вертикальным.

В статике (т. I, гл. XIII, п. 23) было отмечено, что положение равновесия маятника (с твердым стержнем), соответствующее значению π угла θ_1, оказывается существенно неустойчивым. Этому обстоятельству здесь соответствует тот факт, что качение диска вдоль прямолинейного пути тоже будет неустойчивым. Этот результат, который будет лучше освещен при общем рассмотрении в § 5 и 6 гл. VI и § 2 гл. IX, поясняет, хотя и в очень грубом приближении, что̀ произойдет с велосипедистом, когда одно из колес велосипеда попадет в колею трамвайного рельса.

53. Динамическое осуществление связей и сервомоторных сил. Удаляясь несколько от прямых приложений уравнений Лагранжа, займемся здесь в заключение одним видом связей, которые при постановке соответствующих динамических задач будут рассматриваться с точки зрения, отличной от общепринятой.

Если задана материальная система S из N точек P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ с двусторонними связями (даже и неголономными), то можно предположить, что на нее наложены другие связи, осуществляемые посредством автоматических приспособлений (например, электромагнитных), которые являются источником некоторых сил Φ_i, приложенных к точкам P_i системы и совершающих не равную нулю работу при всяких виртуальных перемещениях δP_i, совместимых со связями системы. Эти силы Φ_i называются *сервомоторными*, а приспособления, осуществляющие их, *сервомоторами*. Осуществляемые таким образом связи можно отличать от обычных связей, называя их *динамическими*.

Чтобы дать простейший пример, рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек P, P_1, движущихся без трения по прямой Ox, и предположим, что, в то время как точка P подвергается действию какой-нибудь активной силы, составляющая которой по оси x есть X, при помощи подходящего автоматического устройства осуществляется воздействие на точку P_1 некоторой силы Φ, вынуждающей эту точку следовать за P при ее движении на *неизменном расстоянии*. Сервомоторная сила Φ, осуществляющая эту динамическую связь, не удовлетворяет всем условиям, характеризующим идеальные связи, так как работа этой силы не равна нулю при всяком бесконечно малом перемещении, совместимом со связями. Действительно, здесь единственной связью является динамическая связь, вынуждающая точку P_1 сохранять неизменным ее расстояние от точки P, а так как перемещение δx точки P, равное перемещению точки P_1, остается произвольным, то работа $\Phi\delta x$ сервомоторной силы отлична от нуля, поскольку, вообще говоря, не исчезают ни тот, ни другой сомножители. Отсюда следует, что сервомоторная сила Φ при постановке задачи о движении должна рассматриваться как прямо приложенная к системе, а не как реактивная сила, осуществляющая связь без трения неизменяемой системы двух точек: PP_1.

Аналогичные обстоятельства имеют место и для любой системы S, находящейся под действием двусторонних связей, не только кинематических, но также и динамических. Сервомоторные силы Φ_i сами по себе, как предназначенные для осуществления связей, принадлежат к классу реакций связей, в постановке же задачи о движении они должны быть причислены к прямо приложенным силам (аналогично тому, как это делается в случае пассивных сопротивлений и трения). Таким образом, мы должны рассматривать систему S как подчиненную только обычным связям (геометрическим и кинематическим) и движущуюся под действием всех активных сил F_i и сервомоторных сил Φ_i. Следовательно, общее уравнение динамики на основании уравнения (12) п. 21 должно здесь иметь вид

$$\sum_{i=1}^{N}(F_i+\Phi_i-m_ia_i)\cdot\delta P_i=0; \qquad (12')$$

оно должно иметь место при всех виртуальных перемещениях δP_i, совместимых с кинематическими связями.

Силы Φ_i, наравне с любыми другими реакциями связей, вообще являются неизвестными; известна только природа связей, которые они накладывают на систему (в предыдущем примере неизменность расстояния PP_1). Но, естественно, нельзя утверждать, что этих сил Φ_i будет ровно столько, сколько точек в системе, и что таким образом появляются $3N$ неизвестных составляющих. Может случиться, что эти $3N$ неизвестных приводятся к меньшему числу в силу того ли, что сервомоторные силы действуют только на некоторые точки системы, или же в силу способа их действия на соответствующие точки (например, параллельно плоскости или прямой и т. п.).

Предположим, для определенности, что материальная система S, если отвлечься от динамических связей, является голономной с n степенями свободы и что, с другой стороны, сервомоторные силы, действующие на нее, выражаются известными функциями от ν параметров σ, которые следует рассматривать при всяком движении системы как функции от времени t, вид которых заранее неизвестен. В этом предположении соотношение (12), где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ являются лагранжевыми координатами системы S, равносильно n дифференциальным уравнениям Лагранжа, заключающим, помимо q, $\dot q$, $\ddot q$, еще параметров σ, представляющих собой тоже неизвестные функции времени. Поэтому, если динамические действия Φ_i регулируются таким образом, что в любой момент между параметрами σ существуют точно ν независимых соотношений, то движение системы будет определенным. Очевидно, то же будет иметь место и в указанном вначале примере, так как в нем при наличии единственной вспомогательной неизвестной Φ имеем $\nu=1$, а с другой стороны, динамическая связь вполне характеризуется только одним уравнением (именно тем, которое выражает неизменность расстояния PP_1).

В частности, следует отметить тот случай, когда сервомоторные силы совершают работу, равную нулю при всех тех виртуальных перемещениях, допускаемых обычными связями, при которых изменяются только $n-\nu$ параметров Лагранжа, например $q_{\nu+1}, \ldots, q_n$; это можно также выразить, говоря, что лагранжевы составляющие всех сервомоторных сил по этим $n-\nu$ параметрам равны нулю. В этом предположении последние $n-\nu$ лагранжевых уравнений движения системы не будут зависеть от Φ, и достаточно присоединить к ним ν уравнений динамических связей, чтобы получить систему, определяющую движение.

Это обстоятельство оказывается также осуществленным в нашем примере, потому что, если мы наложим на нашу систему только обычные связи, т. е. если будем рассматривать две точки, свободно движущиеся по прямой, то сервомоторная сила Φ будет совершать работу, равную нулю, когда перемещается только точка P; поэтому будет справедливо уравнение (Лагранжа)

$$m\ddot{x} = X, \tag{75}$$

где m и x обозначают массу и абсциссу точки P, X — соответствующую составляющую силы, приложенной к P, а положение точки P_1 в любой момент определяется (относительно положения точки P) динамической связью.

Чтобы иллюстрировать, насколько существенно связи, осуществляемые динамически, отличаются от обычных (геометрических и кинематических) связей, полезно убедиться на этом схематическом примере, что закон движения в случае динамической связи будет отличаться от того закона, который мы имели бы, если бы на P действовала та же активная сила, а неизменяемость системы точек PP_1 обеспечивалась бы посредством твердого стержня. Действительно, при этом последнем предположении связи допускали бы для системы совокупное поступательное перемещение по прямой, так что имела бы место теорема о движении центра тяжести (п. 22), и уравнение движения вместо (75) имело бы вид

$$(m + m_1)\ddot{x}_0 = X,$$

где m_1 обозначает массу точки P_1, а x_0 — абсциссу центра тяжести точек P и P_1 [1]).

§ 8. Уравнения движения неголономных систем

54. Дифференциальные уравнения движения неголономных систем (т. I, гл. VI, § 2) также можно привести к общей типичной форме, которая заслуживает того, чтобы на ней остановиться, хотя она и далека от структурной простоты уравнений Лагранжа, имеющих место для голономных систем, и вывод ее значительно более сложен.

Предпошлем здесь некоторые вспомогательные рассуждения. Чтобы охарактеризовать самым общим образом систему S с двусторонними (возможно, также и неголономными) связями, отнесем ее сначала к некоторому определенному числу n лагранжевых координат $q_h (h = 1, 2, \ldots, n)$, выбранных таким образом, чтобы были

[1]) Более подробное исследование, принадлежащее Бегену (Béghin), можно найти в четвертом издании т. II уже несколько раз цитированного трактата Аппелля (P. Appell, Traité de mécanique rationnelle, IV изд., т. II (1924), стр. 395—400).