присоединить к ним ν уравнений динамических связей, чтобы получить систему, определяющую движение.

Это обстоятельство оказывается также осуществленным в нашем примере, потому что, если мы наложим на нашу систему только обычные связи, т. е. если будем рассматривать две точки, свободно движущиеся по прямой, то сервомоторная сила Φ будет совершать работу, равную нулю, когда перемещается только точка P; поэтому будет справедливо уравнение (Лагранжа)

$$m\ddot{x} = X, \tag{75}$$

где m и x обозначают массу и абсциссу точки P, X — соответствующую составляющую силы, приложенной к P, а положение точки P_1 в любой момент определяется (относительно положения точки P) динамической связью.

Чтобы иллюстрировать, насколько существенно связи, осуществляемые динамически, отличаются от обычных (геометрических и кинематических) связей, полезно убедиться на этом схематическом примере, что закон движения в случае динамической связи будет отличаться от того закона, который мы имели бы, если бы на P действовала та же активная сила, а неизменяемость системы точек PP_1 обеспечивалась бы посредством твердого стержня. Действительно, при этом последнем предположении связи допускали бы для системы совокупное поступательное перемещение по прямой, так что имела бы место теорема о движении центра тяжести (п. 22), и уравнение движения вместо (75) имело бы вид

$$(m + m_1)\ddot{x}_0 = X,$$

где m_1 обозначает массу точки P_1, а x_0 — абсциссу центра тяжести точек P и P_1 [1]).

§ 8. Уравнения движения неголономных систем

54. Дифференциальные уравнения движения неголономных систем (т. I, гл. VI, § 2) также можно привести к общей типичной форме, которая заслуживает того, чтобы на ней остановиться, хотя она и далека от структурной простоты уравнений Лагранжа, имеющих место для голономных систем, и вывод ее значительно более сложен.

Предпошлем здесь некоторые вспомогательные рассуждения. Чтобы охарактеризовать самым общим образом систему S с двусторонними (возможно, также и неголономными) связями, отнесем ее сначала к некоторому определенному числу n лагранжевых координат q_h ($h = 1, 2, \ldots, n$), выбранных таким образом, чтобы были

[1]) Более подробное исследование, принадлежащее Бегену (Béghin), можно найти в четвертом издании т. II уже несколько раз цитированного трактата Аппелля (P. Appell, Traité de mécanique rationnelle, IV изд., т. II (1924), стр. 395—400).

учтены все голономные связи системы или только часть их, в силу чего будем иметь (уравнения (32))

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n | t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

После этого выразим остальные связи (которые, если исключить случай голономной системы, будут или все чисто кинематическими (неголономными), или частью голономными и частью кинематическими (неголономными), накладывая на координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ некоторое число s условий в виде линейно независимых уравнений вида (т. 1, гл. VI, п. 10, 17)

$$\sum_{h=1}^{n} b_{jh} dq_h + b_{j0} dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{76}$$

или же в конечной форме

$$\sum_{h=1}^{n} b_{jh} \dot{q}_h + b_{j0} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{76'}$$

где коэффициенты b_{jh} являются функциями от q и t, за исключением случая, когда эти s связей не зависят явно от времени; в последнем случае коэффициенты b_{jh} при $h > 0$ зависят только от q, а b_{j0} тождественно равны нулю [2]. Необходимо отметить, что если материальная система S является неголономной, то система уравнений Пфаффа (76) не может быть вполне интегрируемой, т. е. уравнения (76) не могут получиться посредством полного дифференцирования из s конечных независимых соотношений между q и t.

Мы можем всегда разрешить s линейных независимых уравнений (76') относительно s лагранжевых скоростей $\dot{q}_h$ или, для большей симметрии, обратиться к параметрическому представлению, выражая все лагранжевы скорости $\dot{q}$, удовлетворяющие уравнениям (76'), в виде линейных функций (вообще говоря, неоднородных) от некоторых $\nu = n - s$ произвольных параметров $e_1, \ldots, e_\nu$. Тем самым мы придадим уравнениям, выражающим кинематические связи, следующий вид:

$$\dot{q}_h = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \eta_{h\alpha} e_\alpha + \eta_{h0} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{77}$$

где при связях, зависящих от времени, коэффициенты η будут определенными функциями от q и t, в случае же связей, не зависящих от времени, величины $\eta_{h\alpha}$ при $\alpha > 0$ будут функциями только от q, а η_{h0} будут тождественно равны нулю.

Произвольные параметры e, введенные таким образом, мы будем называть *кинематическими характеристиками* системы в координатах q для данного момента и соответствующей ему конфигурации.

Это название оправдывается тем соображением, что если задаются момент времени t_0 и конфигурация с координатами q^0, то формулы (77), в которых надо положить $t=t_0$, $q_h=q_h^0$, дадут соответственно ∞^ν возможных выборов значений параметров e_α, все r значений, совместимых со связями лагранжевых скоростей $\dot{q}_h$, или, в более сжатой форме, всевозможные *состояния движения*, которые, в этот момент и в этой конфигурации, система фактически может принять, в согласии со своими связями.

Естественно, что все предыдущее сохраняет свое значение также и в частном случае, когда *все* связи системы будут голономными, не исключая и того случая, когда эти связи выражаются дифференциальными уравнениями Пфаффа (76), которые должны поэтому представлять собой интегрируемую систему. Но в этом предположении кинематические характеристики можно выбрать некоторым частным образом, который необходимо разъяснить. Так как связи, наложенные на лагранжевы координаты q (если число координат превышает число степеней свободы), являются голономными, то конфигурацию системы в любой момент можно определить, выражая q в функциях от других ν независимых лагранжевых параметров $r_\alpha (\alpha=1, 2, \ldots, \nu)$ в виде

$$q_h=q_h(r_1, r_2, \ldots, r_\nu|t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n);$$

чтобы определить состояния движения, возможные для системы начиная с какого-нибудь момента времени t и с любой начальной конфигурации, возможной в этот момент, достаточно взять производные по времени от предыдущих уравнений, в результате чего получим равенства

$$\dot{q}_h=\sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}\dot{r}_\alpha+\frac{\partial q_h}{\partial t} \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \qquad (77')$$

которые и представляют собой уравнения (77), относящиеся к рассматриваемому здесь случаю. Таким образом, мы имеем здесь

$$\eta_{h\alpha}=\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}, \quad \eta_{h0}=\frac{\partial q_h}{\partial t} \quad (h=1, 2, \ldots, n;\ \alpha=1, 2, \ldots, \nu),$$

а кинематические характеристики выражаются лагранжевыми скоростями $\dot{r}_\alpha$.

Вернемся теперь к общему случаю, т. е. к уравнениям (77). Имея в виду следствия, которые мы из них получим, рассмотрим здесь наряду с состояниями движения, возможными для системы, также и ее виртуальные перемещения, лагранжевы составляющие которых δq определяются, как мы знаем, из уравнений, получающихся из уравнений (76) путем отбрасывания в них (если связи зависят от времени) членов $b_{j0}dt$ (т. I, гл. VI, п. 17), т. е. из уравнений

$$\sum_{h=1}^{n} b_{jh}\delta q_h = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Отсюда следует, что общие параметрические выражения δq_h будут получаться из правых частей уравнений (77) путем отбрасывания в них, если они не равны нулю, величин η_{h0} и подстановки вместо кинематических характеристик e_α стольких же бесконечно малых произвольных параметров $\delta\varepsilon_\alpha$. Таким образом, лагранжевы составляющие всех виртуальных перемещений системы, начиная с некоторого момента и любой конфигурации, будут определяться равенствами

$$\delta q_h = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \eta_{h\alpha}\delta\varepsilon_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\delta\varepsilon_\alpha \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{78}$$

соответственно возможным выборам ν бесконечно малых произвольных параметров $\delta\varepsilon_\alpha$.

Из уравнений (78) можно было бы тотчас же получить геометрическое выражение наиболее общего виртуального перемещения нашей материальной системы. Для этого нужно было бы подставить в равенства

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta q_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

которые непосредственно следуют из уравнений (32), вместо δq_h их выражения через q и $\delta\varepsilon_\alpha$ (и, возможно, через t) по формулам (78). В дальнейшем мы не будем, однако, иметь случая применить те формулы, к которым мы пришли бы таким путем.

55. Уравнения Маджи. Предположим теперь, что система S подчинена идеальным связям и находится под действием заданной системы сил F_i; составим уравнения движения системы.

Как и в случае голономных систем (п. 32), мы и здесь будем исходить из общего уравнения динамики; так как это уравнение удовлетворяется для всех виртуальных перемещений системы, то оно и здесь будет определять движение. Отделяя кинетические члены (содержащие ускорения) от динамических (содержащих силы), напишем его еще в виде уравнения (35) п. 36

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^{N} F_i \delta P_i.$$

После этого, вводя и в этом случае составляющие

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

активных сил по лагранжевым координатам q_h (здесь уже не независимым, а подчиненным кинематическим связям (76)) и полагая

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

мы сможем придать уравнению (35), как и в п. 36, вид

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h. \tag{79}$$

Но в то время как в случае голономной системы (с n степенями свободы) все δq_h были произвольными (и независимыми), здесь они связаны между собой так, что могут принимать только значения, удовлетворяющие равенствам (78), сообразно с выбором ν произвольных $\delta\varepsilon_\alpha$. Таким образом, подставляя вместо δq_h их выражения (78) и принимая во внимание произвольность $\delta\varepsilon_\alpha$, мы заключаем, что общее уравнение (35) равносильно системе ν уравнений

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \tau_h = \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} Q_h \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{80}$$

Эти уравнения, совершенно аналогичные уравнениям (40) для голономных систем (п. 36), представляют собой уравнения движения нашей системы S. Их можно обычным путем преобразовать и дальше, если воспользоваться приемом, с помощью которого мы пришли к уравнениям Лагранжа (п. 36—37).

Прежде всего полную виртуальную работу прямо приложенных сил

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h,$$

если принять во внимание уравнения (78), можно написать в форме

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \delta\varepsilon_\alpha \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} Q_h,$$

откуда мы видим, что правые части уравнений (80) представляют собой коэффициенты при различных $\delta\varepsilon_\alpha$ в выражении виртуальной работы δL.

Полагая

$$\Phi_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} Q_h \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{81}$$

и вспоминая, что если вводится живая сила T системы, выраженная через q, $\dot{q}$, то существуют (независимо от того факта, что все $\dot{q}$ будут здесь подчинены кинематическим связям (76)) тождества (42) (п. 37)

$$\tau_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

уравнениям (80) можно придать вид

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right) = \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{82}$$

Это и будут уравнения Маджи [3]. Они вместе с уравнениями (77) с аналитической точки зрения дают в дифференциальной форме полную постановку задачи о движении для системы S с двусторонними идеальными (в том числе и неголономными) связями. Действительно, если представим себе, что в уравнения (82) вместо величин $\dot{q}$ подставлены их выражения (77) через q, e и t и выполнено дифференцирование по t, то будет очевидно, что после выполнения всех преобразований в уравнениях останутся, помимо q, e, t, только ν производных $\dot{e}$ от e, которые войдут в них линейно. Замечания, совершенно аналогичные тем, которые были сделаны в п. 36, приводят к выводу, что полученные таким образом из системы (82) ν уравнений разрешимы относительно этих ν производных $\dot{e}$, так что мы заключаем, что уравнения (77) и (82) вместе составляют дифференциальную систему уравнений первого порядка, приводимую к нормальному виду относительно $n+\nu$ неизвестных функций времени q и e. Если конфигурация и состояние движения материальной системы в начальный момент заданы, т. е. указаны произвольные численные начальные значения q (позиционных координат) и e (кинетических характеристик), то движение неголономной системы будет однозначно определено.

56. Так как уравнения (77) и (82) в их совокупности вполне определяют движение системы, то мы заранее можем быть уверены, что в случае связей, не зависящих от времени, эти уравнения должны содержать в себе уравнение живых сил

$$dT = dL.$$

Однако, принимая во внимание важность результата, не бесполезно показать прямым путем, как это соотношение формально получается из уравнений Маджи (82).

Для этой цели заметим прежде всего, что когда все связи (голономные и неголономные) не зависят от времени, то живая сила T принимает вид

$$T=\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k,$$

где a_{hk} суть функции только от q, правые же части уравнений (77) не будут содержать членов η_{h0}, а величины $\eta_{h\alpha}$ при $\alpha>0$ не будут зависеть от t; так что, в частности, для любого действительного перемещения системы будет иметь место выражение (тождественное выражению любого виртуального перемещения, за исключением лишь подстановки $e_\alpha dt$, вместо $\delta\varepsilon_\alpha$)

$$dq_h=\dot{q}_h dt=dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta_{h\alpha}e_\alpha \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{83}$$

Умножая каждое из уравнений (82) на соответствующее $e_\alpha dt$ и складывая почленно, мы получим, принимая во внимание соотношения (78), уравнение

$$\sum_{h=1}^{r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)dq_h=dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\Phi_\alpha e_\alpha,$$

в котором левая часть тождественна с приращением dT живой силы за элемент времени dt (п. 39), а правая часть дает элементарную работу dL, совершаемую активными силами за этот же самый элемент времени, если принять во внимание, что в силу независимости связей от времени равенства (83) оказываются справедливыми для действительных бесконечно малых перемещений.

57. Замечания об уравнениях кинематических связей. Уравнениям (82) можно придать более выразительный вид, разбивая в каждом из них левую часть на два слагаемых, из которых одно характеризует *неголономность* связей (оно тождественно исчезает при исключительно голономных связях), а другое, если отнести систему к голономным характеристикам, сведется к соответствующим лагранжевым биномам.

Чтобы сделать возможным такое преобразование уравнений (82), мы предпошлем несколько замечаний о кинематических связях системы, которые мы будем предполагать заданными в параметрической форме (77). Изменения лагранжевых координат q за элемент времени dt (начиная от любого момента и любой конфигурации), совместимые с этими связями, выразятся равенствами (77′)

$$dq_h=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta_{h\alpha}d\varepsilon_\alpha+\eta_{h0}dt \qquad (h=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

где через $d\varepsilon_\alpha$ обозначены бесконечно малые произвольные количества $e_\alpha dt$. Как мы уже знаем, если связи не зависят от времени, то количества $\eta_{h\alpha}$ при $\alpha > 0$ будут функциями только от q, а все η_{h0} тождественно обратятся в нуль; наоборот, если связи зависят от времени, все $\eta_{h\alpha}$ вместе с η_{h0} будут функциями от q и t.

В этом последнем предположении, для однообразия обозначений, удобно переменную t обозначить через q_0, а изменение времени dt — через $d\varepsilon_0$, поэтому к уравнениям (77') мы присоединим $(n+1)$-е уравнение

$$dq_0 = d\varepsilon_0$$

или, что одно и то же, будем рассматривать уравнения (77') сохраняющими значение также и при индексе $h=0$, при условии, что все $\eta_{0\alpha}$ будут тождественно равны нулю, за исключением $\eta_{00}=1$. Таким образом, вместо уравнений (77') мы будем иметь уравнения

$$dq_h = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \eta_{h\alpha} d\varepsilon_\alpha \quad (h=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n); \tag{77''}$$

при этом важно иметь в виду, что если мы выполняем вычисления для связей, не зависящих от времени, то индекс h нужно изменять от 1 до n, а не от 0 до n, и индекс α — от 1 до ν, а не от 0 до ν.

Выберем теперь две произвольные системы: $d'\varepsilon_\alpha$, $d''\varepsilon_\alpha$ ($\alpha=0$, 1, 2, ..., ν) бесконечно малых количеств. Обозначив через d' и d'' соответствующие операции варьирования, будем иметь на основании уравнений (77'')

$$d''d'q_h = \sum_{\alpha=0}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_\gamma} d'\varepsilon_\alpha d'' q_\gamma + \sum_{\alpha=0}^{\nu} \eta_{h\alpha} d''d'\varepsilon_\alpha$$

или же, принимая во внимание те же равенства (77''),

$$d''d'q_h = \sum_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}^{\nu}\sum_{\gamma=0}^{n} \eta_{\gamma\beta} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_\gamma} d'\varepsilon_\alpha d''\varepsilon_\beta + \sum_{\alpha=0}^{\nu} \eta_{h\alpha} d''d'\varepsilon_\alpha.$$

Отсюда, меняя порядок варьирования d' и d'' и принимая во внимание, что для независимых переменных ε_α имеем

$$d'd''\varepsilon_\alpha = d''d'\varepsilon \quad (\alpha=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \nu),$$

получим при $h=0$, естественно, тождество, а при $h=1, 2, \ldots, n$ будем иметь n уравнений:

$$d''d'q_h - d'd''q_h = \sum_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}^{\nu} \eta_{h|\alpha\beta} d'\varepsilon_\alpha d''\varepsilon_\beta \qquad (h=1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{84}$$

где положено

$$\eta_{h|\alpha\beta}=\sum_{\gamma=0}^{n}\left(\eta_{\gamma\beta}\frac{\partial\eta_{h\alpha}}{\partial q_\gamma}-\eta_{\gamma\alpha}\frac{\partial\eta_{h\beta}}{\partial q_\gamma}\right) \tag{85}$$

$$(h=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ldots,\ \nu).$$

Эти функции $\eta_{h|\alpha\beta}$ от $q_0, q_1, \ldots, q_n$, в силу их определения, удовлетворяют тождествам

$$\eta_{h|\alpha\beta}+\eta_{h|\beta\alpha}=0,$$

т. е. при всяком индексе h составляют кососимметричную систему (относительно индексов α и β); знакопеременные билинейные формы (84) представляют собой так называемые *билинейные ковариантны* пфаффианов, стоящих в правых частях уравнений (77″) при $h=1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что название *ковариантов* они получили благодаря тому обстоятельству, что при всякой замене независимых переменных преобразованные выражения этих форм будут точно совпадать с теми билинейными знакопеременными формами, которые получились бы, если бы определяющие первоначальные формы уравнения (84) были приложены к преобразованным выражениям исходных пфаффианов[1]).

Эти ковариантны, в силу их знакопеременного характера относительно двух рядов переменных, $d'\varepsilon_\alpha$, $d''\varepsilon_\alpha$, будут исчезать всякий раз, когда будут совпадать вариации d', d'', и они будут обращаться в нуль тождественно, т. е. *при всяком выборе* d' и d'', если связи окажутся исключительно голономными (т. е., по существу, если уравнения Пфаффа (77″) получаются путем полного дифференцирования стольких же конечных уравнений между переменными). Действительно, в этом случае все q_h являются функциями от ν лагранжевых независимых параметров r_α, а кроме того, возможно, и времени, которое здесь, в согласии с тем, как это было сделано раньше, мы обозначим через r_0. Принимая за кинематические характеристики $\dot r_\alpha$ $(\alpha=1,\ 2,\ldots,\ \nu)$, мы должны будем рассматривать вместо уравнений (77″) при $h=1, 2, \ldots, n$ равенства

$$dq_h=\sum_{\alpha=0}^{\nu}\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}dr_\alpha \qquad (h=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

---

[1]) См., например, T. Levi-Civita, Lezioni di calcolo differenziale assoluto (raccolte da E. Persico), Roma, Stock, 1925, стр. 30, 184; или же Goursat, Leçons sur le probléme de Pfaff, Paris, Hermann, 1922, гл. I. Интересно отметить, что принятое в тексте предположение, что $d'd''\varepsilon_\alpha=d''d'\varepsilon_\alpha$, не является существенным для установления инвариантного характера билинейной знакопеременной формы в правой части (84). Энгель (Engel) доказал, что это свойство будет иметь место, если даже не делать никаких частных предположений относительно системы вторых дифференциалов. Ср. *Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, дополнительный том V (1914), стр. 16.

Поэтому будем иметь

$$\eta_{h\alpha}=\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha},$$

и достаточно прямо вычислить любой билинейный ковариант $d''d'q_h-d'd''q_h$, чтобы убедиться, что он тождественно равен нулю.

Возвращаясь к общему случаю, когда связи не все голономны, рассмотрим тот случай, когда из двух операций дифференцирования d', d'' одна соответствует любому действительному перемещению материальной системы, а другая — любому виртуальному перемещению.

Положим

$$\begin{matrix} d'\varepsilon_0=dt, & d'\varepsilon_\alpha=e_\alpha dt \\ d''\varepsilon_0=0, & d''\varepsilon_\alpha=\delta\varepsilon_\alpha \end{matrix} \qquad (\alpha=1,2,\ldots,\nu).$$

Обозначая через χ_h $(h=1, 2,\ldots, n)$ соответствующие билинейные ковариантны при этом выборе d', d'', получим

$$\chi_h=\delta dq_h-d\delta q_h=dt\sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\eta_{h|0\beta}+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta_{h|\alpha\beta}e_\alpha\right)\delta\varepsilon_\beta$$

или также (при перестановке двух индексов α, β)

$$\chi_h=dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\varphi_{h\alpha}\delta\varepsilon_\alpha \qquad (h=1, 2,\ldots, \nu), \tag{86}$$

где для краткости положено

$$\varphi_{h\alpha}=\eta_{h|0\alpha}+\sum_{\beta=1}^{\nu}\eta_{h|\beta\alpha}e_\beta \quad (h=1, 2,\ldots, n;\ \alpha=1, 2,\ldots, \nu). \tag{87}$$

58. Члены неголономности. После этих предпосылок вернемся снова к уравнениям (82) движения системы, связи которой не все голономны (п. 55); вспоминая, что на основании уравнений (78) п. 54 имеем

$$\eta_{h\alpha}=\frac{\partial\dot q_h}{\partial e_\alpha} \qquad (h=1, 2,\ldots, n;\ \alpha=1, 2,\ldots, \nu),$$

можно написать эти уравнения в форме

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\dot q_h}{\partial e_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)=\Phi_\alpha \qquad (\alpha=1, 2,\ldots, \nu). \tag{82'}$$

Как было сказано в начале предыдущего пункта, речь идет о том, чтобы показать, что мы можем разбить в каждом из этих уравнений левую часть на два слагаемых, одно из которых можно назвать *неголономным*, а другое — *голономным*, в том смысле, что когда все связи являются голономными, первое слагаемое тождественно исчезает, а второе для голономных характеристик приводится к соответствующему лагранжеву биному.

Напомним, что в уравнениях (82') живая сила T рассматривается как функция от $q, \dot{q}$ и, возможно, от t. Если на основании уравнений (77) мы представим себе живую силу выраженной через q, e и, возможно, также через t, и обозначим ее через T^*, то будем иметь

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_h}=\frac{\partial T}{\partial q_h}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_h},\quad \frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha}=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}$$

$$(h=1,\ 2,\dots,\ n;\ \alpha=1,\ 2,\dots,\ \nu);$$

отсюда, составляя линейные комбинации первых из этих равенств и дифференцируя полным образом по t вторые, получим, очевидно, тождества

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\frac{\partial T}{\partial q_h}=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\frac{\partial T^*}{\partial q_h}-\sum_{\substack{h=1\\ j=1}}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_h}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha},$$

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha}-\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}.$$

Вычитая первое тождество из второго, найдем

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)=\mathrm{A}_\alpha+\Omega_\alpha\qquad(\alpha=1,\ 2,\dots,\ \nu),\tag{88}$$

где положено

$$\mathrm{A}_\alpha=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial e_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\right\}\tag{89}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\dots,\ \nu)$$

$$\Omega_\alpha=\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha}-\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\frac{\partial T^*}{\partial q_h}.\tag{90}$$

На основании тождеств (88) уравнения (82') могут быть написаны в виде

$$\mathrm{A}_\alpha+\Omega_\alpha=\Phi_\alpha\qquad(\alpha=1,\ 2,\dots,\ \nu);\tag{91}$$

теперь можно показать, что A_α представляют собой члены неголономности, а Ω_α — члены голономности.

С этой целью умножим обе части (89) на $dt\delta\varepsilon_\alpha$ и просуммируем от $\alpha=1$ до $\alpha=\gamma$. Таким образом, получим тождество

$$dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\mathrm{A}_\alpha\delta\varepsilon_\alpha=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\left\{dt\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_j}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial e_\alpha}\delta\varepsilon_\alpha-d\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\delta\varepsilon_\alpha\right\}.$$

Принимая во внимание уравнения (78) п. 54

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha} \delta\varepsilon_\alpha = \delta q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

можно написать последнее тождество в виде

$$dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} A_\alpha \delta\varepsilon_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \left\{ dt \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_j} \delta q_j - d\delta q_h \right\}$$

или, замечая, что $\dot{q}_h dt = dq_h$, и обозначая, как в предыдущем пункте, через χ_h билинейный ковариант $\delta dq_h - d\delta q_h$, в виде

$$dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} A_\alpha \delta\varepsilon_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \chi_h. \tag{92}$$

Так как в случае исключительно голономных связей билинейные ковирианты χ_h тождественно исчезают (предыдущий пункт), мы заключаем, что при таком предположении из этого тождества следует

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} A_\alpha \delta\varepsilon_\alpha = 0$$

при любом выборе $\delta\varepsilon_\alpha$; а это как раз равносильно тождественному исчезанию отдельных членов A_α, характер неголономности которых таким образом обнаружен.

Теперь, прежде чем перейти к членам Ω_α, укажем попутно на крайне сжатую форму, которая в общем случае, т. е. когда не все связи голономны, получается для членов неголономности A_α из соотношения (92). Достаточно вместо χ_h подставить их выражения (86) и приравнять в обеих частях коэффициенты при произвольных величинах $\delta\varepsilon_\alpha$, чтобы получить равенства

$$A_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \varphi_{h\alpha}, \tag{93}$$

где $\varphi_{h\alpha}$ определяются равенствами (87).

Переходя затем к членам Ω_α, определяемым равенствами (90), вспомним, что если связи окажутся все голономными и если $r_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu)$ представляют собой ν независимых лагранжевых координат, позволяющих выразить первоначальные координаты q, число которых превышает число степеней свободы, то будем иметь (п. 54)

$$\eta_{h0} = \frac{\partial q_h}{\partial t}, \quad \eta_{h\alpha} = \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}, \quad e_\alpha = \dot{r}_\alpha, \quad \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha} = \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha};$$

таким образом, на основании формул (90), в этом случае, т. е. в случае, когда T^* обозначает живую силу, выраженную через r, $\dot{r}$ и, возможно, через t, получим

$$\Omega_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{r}_\alpha} - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial q_h}\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha},$$

т. е. как раз

$$\Omega_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{r}_\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial r_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Заметим, что впервые выделил в уравнениях неголономных систем члены неголономности Вольтерра[1] *), который применял для этой цели способ, существенно отличный от способа, характеризующегося систематическим применением пфаффианов и их билинейных ковариантов[2]).

Вольтерра же принадлежит одно важное замечание относительно интегрирования неголономных систем, которым мы займемся в следующем пункте.

59. Гиростатический характер членов неголономности. Системы с независимыми характеристиками по Вольтерра. Предположим, что связи, среди которых обязательно есть неголономные, не зависят от времени. В этом предположении γ_{h0} будут тождественно равны нулю, и, следовательно, в силу соотношений (85) будут равны нулю и все $\eta_{h|0\alpha}$, так что формулы (87) примут вид

$$\varphi_{h\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \eta_{h|\beta\alpha} e_\beta \qquad (h = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

---

[1]) Volterra, Atti dell'Acc. di Torino, т. XXXIII, 1897, стр. 451—475, 542—558.

*) Несколько раньше члены неголономности выделил С. А. Чаплыгин [4]. Сергей Алексеевич Чаплыгин родился 5 апреля 1869 г. в г. Раненбурге Рязанской губ., умер в 1942 г. После окончания Московского университета в 1890 г. был оставлен Н. Е. Жуковским при университете; защитил магистерскую диссертацию в 1898 г. и докторскую в 1903 г. Первые работы Чаплыгина были посвящены динамике твердого тела и, в частности, неголономным системам. В дальнейшем С. А. Чаплыгин много работал в области аэродинамики и вместе с Н. Е. Жуковским создал всю аэродинамику плоско-параллельного движения, а также заложил основы пространственной аэродинамики. В своей работе „О газовых струях“ (сообщено Московскому математическому обществу в 1896 г.) С. А. Чаплыгин заложил основы современной газовой динамики. С. А. Чаплыгин был профессором Московского университета, руководил научно-исследовательским институтом ЦАГИ, а в 1929 г. был избран действительным членом Академии наук СССР. *(Прим. ред.)*

[2]) По этому вопросу надо также указать более новые исследования Г. Гамеля. См., в частности, G. Hamel, Uber nicht holonome Systeme. *Math. Annalen*, т. 92, 1924, стр. 31—41.

С другой стороны, в этом случае виртуальные перемещения не будут отличаться от действительных (за исключением разве лишь того обстоятельства, не имеющего здесь значения, что в первых время остается неизменным, а во вторых и оно также испытывает приращение dt); поэтому, вспоминая что при $d' = d''$ билинейные коварианты исчезают, мы выводим из равенств (86) тождества

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \varphi_{h\alpha} e_\alpha = 0. \tag{94}$$

Если теперь, как это делалось в п. 56 для уравнений (82), образуем и для уравнений (91) дифференциал живых сил

$$dL = dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} \Phi_\alpha e_\alpha = dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\mathrm{A}_\alpha + \Omega_\alpha) e_\alpha$$

и примем во внимание, что в силу соотношений (93) имеем тождественно

$$dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathrm{A}_\alpha e_\alpha = dt \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \varphi_{h\alpha} e_\alpha,$$

то увидим на основании тождеств (94), что члены A_α ничего не прибавляют к этой интегрируемой комбинации. Другими словами, *члены* A_α, *происходящие исключительно от неголономных связей, имеют гироскопический характер* в смысле, разъясненном в п. 44. Это и есть упомянутое выше замечание Вольтерра.

Прибавим еще, что Вольтерра назвал *системами с независимыми характеристиками* такие системы, для которых левые части $\mathrm{A}_\alpha + \Omega_\alpha$ уравнений движения содержат явно только кинематические характеристики e (т. е. не зависят от q).

В этом случае определение так называемого *спонтанного движения* системы, т. е. движения при отсутствии активных сил, которое определяется уравнениями

$$\mathrm{A}_\alpha + \Omega_\alpha = 0,$$

может быть разбито на две отдельные операции: определение характеристик e на основе предыдущей системы и последующее определение q на основе параметрических уравнений связей (77).

Следует заметить, что для систем со связями, не зависящими от времени, члены голономности Ω_α можно всегда сделать не зависящими от q посредством подходящего выбора характеристик e_α, какова бы ни была природа связей (77). Действительно, заметим, что при допущенном предположении T^* после вычисления будет определенной положительной квадратичной формой относительно e_α с коэффициентами, которые, естественно, в общем случае будут зависеть от q. Далее, как известно, можно всегда бесконечным числом способов вместо e_α подставить столько же их линейных комбинаций e'_α с коэффициентами, зависящими от q, и притом так, чтобы привести T^* к канонической форме

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\nu} e'^2_\alpha;$$

после этого на основании формул (90) будем иметь

$$\Omega_\alpha = \dot{e}'_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

60. Уравнения Аппелля. Обращаясь снова к уравнениям движения системы с неголономными связями (82)

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \right) = \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

покажем, что их левые части, как это было и в случае уравнений Лагранжа, все можно выразить посредством одной единственной функции [1]), которая, однако, будет значительно менее простой, чем живая сила T. Эта функция составляется из ускорений $\boldsymbol{a}_i$ точек P_i так же, как живая сила составляется из скоростей $\boldsymbol{v}_i$. Речь идет о функции (называемой также *энергией ускорений системы*)

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i,$$

которую нужно рассматривать выраженной (помимо времени, если связи зависят от него) в зависимости от лагранжевых координат q, кинематических характеристик e и их производных $\dot{e}$.

Чтобы выяснить, каким образом левые части уравнений (82) могут быть выражены посредством функции S, будем исходить от выражений скоростей отдельных точек P_i (33)

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

и, рассматривая в них $\dot{q}_h$ выраженными посредством q, e, t при помощи (77), продифференцируем их еще раз по t. Таким образом, получим

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{h=1}^{n} \ddot{q}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

[1]) Appell, *Comptes Rendus*, т. 129, 1899; *Crelle*, т. 121 (1900); *Journal de math.*, 5-я серия, т. VI, 1900.

где опущенные члены не зависят от $\ddot{q}$ или, точнее, как это следует из формул (77), зависят только от q, e, t. Поэтому, если возьмем частную производную от ускорения a_i по любому $\dot{e}_\alpha$, то эти опущенные члены совсем не появятся в результате, и мы получим

$$\frac{\partial a_i}{\partial \dot{e}_\alpha} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \ddot{q}_h}{\partial \dot{e}_\alpha} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N, \ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{95}$$

Повторяя, начиная с соотношений (77), выводы, которые привели нас от уравнений (33) к уравнениям (95), получим

$$\frac{\partial \ddot{q}_h}{\partial \dot{e}_\alpha} = \eta_{h\alpha} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

так что уравнениям (95) мы можем придать вид

$$\frac{\partial a_i}{\partial \dot{e}_\alpha} = \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, \ldots, N; \\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \end{matrix} \tag{95'}$$

Вспоминая теперь первоначальное выражение (38) лагранжевых биномов

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

можно левые части уравнений (82) написать в виде

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

или же

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

или, наконец, принимая во внимание уравнения (95'),

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial a_i}{\partial \dot{e}_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2 \ldots, \nu).$$

Мы видим таким образом, что получили частные производные от S по $\dot{e}_\alpha$; уравнения (82) можно написать теперь в крайне сжатой форме, принадлежащей Аппеллю,

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{e}_\alpha} = \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$