§ 9. Геометрические дополнения: траектории дифференциальной системы второго порядка; спонтанные движения голономной системы и геодезические линии

61. Траектории. В виде дополнения к развитой в предыдущих параграфах теории дифференциальных уравнений движения какой угодно материальной системы (голономной или неголономной) добавим некоторые замечания о геометрическом представлении движения, т. е., с аналитической точки зрения, о различных обстоятельствах, которые могут представиться, когда из уравнений общего интеграла исключается время.

В простейшем случае одной материальной точки мы называли *траекториями* кривые, которые в физическом пространстве описывает движущаяся точка при различных движениях, определяемых динамическим уравнением $ma = F$, соответствующим рассматриваемому случаю. Речь идет о том семействе кривых, уравнения которых получатся после исключения независимого переменного t из уравнений общего решения дифференциального уравнения $ma = F$

$$x = x(t|c_1, c_2, \ldots, c_6), \quad y = y(t|c_1, c_2, \ldots, c_6),$$
$$z = z(t|c_1, c_2, \ldots, c_6),$$

где c обозначают шесть произвольных постоянных интегрирования. В общем случае после исключения t в уравнениях траектории остаются все эти шесть произвольных постоянных. Но при частных предположениях может случиться, что исключение t повлечет за собой исчезновение какой-нибудь из постоянных. Так, например, если сила F есть ньютонианское притяжение, исходящее из некоторого неподвижного центра O, то все траектории будут коническими сечениями, имеющими фокус в точке O (гл. III, § 2); эти кривые зависят только от пяти существенных постоянных (две для определения плоскости орбиты, проходящей через O, одна для ориентации фокальной оси в этой плоскости и остальные две — параметр и эксцентриситет). Если сила равна нулю, то траектории сведутся к ∞^4 прямых (геодезические линии физического пространства).

Все эти рассуждения можно обобщить на движения, определяемые общей нормальной системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{q}_h = \varphi_h(q \mid \dot{q} \mid t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{96}$$

в частности лагранжевой системой (50) с гессианом Δ, отличным от нуля.

Для этой цели удобно интерпретировать n лагранжевых параметров q как обобщенные координаты точек абстрактного пространства n измерений Γ_n (*пространство конфигураций*). *Траекториями* системы в этом пространстве называются те кривые, уравнения которых получаются путем исключения t из уравнений $q_h = q_h(t|c)$, представляющих общее решение системы (96). Можно, если угодно, эти последние уравнения рассматривать как параметрические уравнения семейства траекторий, истолковывая t как вспомогательный параметр, и сосредоточить внимание исключительно на последовательности точек в изображающем пространстве Γ_n.

Какой бы из этих способов представления траекторий ни иметь в виду, оказывается выгодным задачу изучения траекторий поставить в дифференциальной форме; таким способом мы достигнем уточнения числа существенных постоянных, от которых зависят траектории, применяя для этого, как увидим, обычные теоремы существования интегралов систем дифференциальных уравнений.

Чтобы сделать более очевидной аналогию с элементарными случаями, приведенными выше, условимся истолковывать обобщенные координаты q в пространстве Γ_n как прямоугольные декартовы координаты; заметим, что при этом направление, исходящее из какой-нибудь точки, характеризуется отношениями дифференциалов dq от q, и любую кривую в пространстве Γ_n можно определить, выражая $n-1$ координат произвольной ее точки как функции от n-й координаты.

Для наших целей удобно заменить в данной системе дифференциальных уравнений (96) время t одной из координат q, рассматривая ее как независимую переменную, а t (наравне с $n-1$ остальными q) как функцию от нее. Это, конечно, можно сделать, так как при этом будут исключены только те возможные решения системы (96), которые соответствуют покою, т. е. в которых *все* q остаются постоянными. Исключая этот случай и изменяя, если необходимо, индексы, мы можем всегда предположить, что координата q_n не будет постоянной, т. е. что производная $\dot{q}_n$ не будет тождественно равна нулю. Обращаясь к интервалу времени, в котором всегда $\dot{q}_n \neq 0$, условимся вместо t принять за независимую переменную q_n; обозначая штрихами производные по этой новой независимой переменной, будем иметь

$$t' = \frac{dt}{dq_n}, \tag{97}$$

и, следовательно,

$$\dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt} = \frac{1}{t'}, \quad \ddot{q}_n = -\frac{t''}{t'^3}; \tag{98}$$

$$\dot{q}_h = \frac{1}{t'} q_h', \quad \ddot{q}_h = \frac{1}{t'^2} q_h'' - \frac{t''}{t'^3} q_h' \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{99}$$

Возьмем теперь снова нашу нормальную систему (96)

$$\ddot{q}_h = \varphi_h(q | \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n | t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

и исключим в правых частях $\dot{q}$ посредством (98), (99) таким образом, чтобы придать им вид

$$\varphi_h \left(q \,\middle|\, \frac{1}{t'} q_1', \ldots, \frac{1}{t'} q_{n-1}', \ldots, \frac{1}{t'} \,\middle|\, t \right);$$

в силу этого правые части будут функциями, кроме q, от аргументов $q_1', \ldots, q_{n-1}'$, t и t'. Считая теперь, что φ_h имеют указанное выражение, мы можем придать последнему из уравнений (96) следующий вид:

$$t'' = -t'^3 \varphi_n, \tag{96'}$$

если принять во внимание второе из равенств (98). Остальные уравнения (96) на основании второй группы равенств (99) и только что написанного уравнения примут вид

$$q_h'' = t'^2 (\varphi_h - q'_h \varphi_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{96''}$$

Система (96'), (96''), как мы видим, представляет собой все еще нормальную систему второго порядка относительно n неизвестных функций t, $q_1, \ldots, q_{n-1}$ независимого переменного q_n. Поэтому на основании обычной теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений можно утверждать, что для системы (96'), (96'') существует решение и притом единственное, для которого в соответствии с заданным значением $q^0{}_n$ независимой переменной остальные $n-1$ переменных q и соответствующие им производные q' вместе с t и t' принимают наперед заданные произвольные значения. Условие того, что кривая в пространстве Γ_n проходит через заданную точку P_0 в заданном направлении, выражается тем обстоятельством, что при указанном значении q_n^0 координаты q_n остальные $(n-1)$ координат q и их производные q' принимают заданные значения. Отсюда можно заключить, что через каждую точку пространства Γ_n в каждом из возможных направлений проходит *по крайней мере* одна траектория. Так как точек в пространстве Γ_n будет ∞^n и из каждой из них выходит ∞^{n-1} направлений, а на каждой кривой существует ∞^1 точек и в каждой из них, за вычетом лишь исключительных (особых точек), однозначно определяется направление касательной, то можно поэтому сказать, что *траектории дифференциальной системы второго порядка* (96) *с n неизвестными функциями образуют множество, состоящее по крайней мере из ∞^{2n-2} элементов.*

Но даже указав значения, которые при $q_n = q_n^0$ должны принять $2n-2$ функций q_h и q_h' $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$, можно еще произвольно выбирать начальные значения t и t', так что в общей сложности для системы дифференциальных уравнений (96'), (96'') или для эквивалентной ей системы (96) имеются ∞^2 решений, траектории которых в Γ_n выходят из одной и той же точки P_0 в одном и том же направлении; и a priori нельзя решить, соответствуют ли этим ∞^2 решениям действительно столько же различных траекторий, или же эти траектории приводятся к ∞^1, или даже только к одной траектории. Наконец, справедливо также, что в общем решении координаты $q_1, \ldots, q_{n-1}$ представятся при более широких предположениях зависящими существенным образом от переменной

q_n, от геометрических постоянных, соответствующих точке P_0 и заданных направлений через нее, а не только от t_0 и t_0'. Не исключена также возможность и того, что в частных случаях одна из этих постоянных t_0, t_0' или обе вместе могут отсутствовать в указанных выше выражениях координат $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$.

Таким образом, в то время как здесь можно утверждать, что, вообще говоря, система (96) будет иметь ∞^{2n} траекторий, в ближайших пунктах мы покажем на двух особенно наглядных примерах, что число траекторий может быть сведено к ∞^{2n-1} или даже к ∞^{2n-2}.

62. Дифференциальные системы с ∞^{2n-1} траекториями. Предположим, что уравнения системы (96) не содержат явно t. В этом случае эта переменная не появится также и в правых частях уравнений эквивалентной системы (96′), (96″), а с другой стороны, там появится t', и левую часть уравнения (96′) можно написать в виде $\frac{dt'}{dq_n}$. Мы видим, таким образом, что в этом случае систему (96′), (96″) можно рассматривать как нормальную систему с n неизвестными функциями $t', q_1, \ldots, q_{n-1}$ от q_n, разрешенную относительно первой производной от t' и относительно вторых производных от остальных $n-1$ неизвестных функций. Отсюда мы заключаем, что общее решение, в частности, выражения $q_1, \ldots, q_{n-1}$ через q_n, т. е. уравнения траекторий, зависят (самое большее) от $2n-1$ произвольных постоянных.

63. Спонтанные движения. Геодезические линии. Рассмотрим, наконец, спонтанные движения, т. е. движения при отсутствии сил, голономной системы с n степенями свободы и со связями, не зависящими от времени; живая сила такой системы представляется, как обычно, равенством

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ l=1}}^{n} a_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l.$$

Траектории (динамические) в пространстве Γ_n таких спонтанных движений называются геодезическими линиями, к которым мы вернемся в § 4, гл. XI. Здесь же мы предполагаем доказать, что траекторий в этом случае будет ∞^{2n-2}.

Заметим прежде всего, что при отсутствии сил уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} a_{jh}\dot{q}_j - \sum_{\substack{j=1\\ l=1}}^{n} \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_h}\dot{q}_j\dot{q}_l = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

и если выполнить дифференцирование и ввести так называемые *символы Кристоффеля* [1]) *первого рода*

$$\begin{bmatrix} jl \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jh}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{hl}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_h}\right) \quad (j,\ h,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,n),$$

то можно написать

$$\sum_{j=1}^{n} a_{hj}\ddot{q}_j - \sum_{\substack{j=1\\ l=1}}^{n} \begin{bmatrix} jl \\ h \end{bmatrix} \dot{q}_j q_l = 0 \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Для того чтобы привести систему к нормальному виду, мы должны разрешить предыдущие уравнения относительно $\ddot{q}$, для чего умножим обе части каждого из h уравнений на величину $a^{(hi)}$, взаимную с a_{hi} (алгебраическое дополнение, деленное на определитель) и сложим полученные уравнения. Таким образом, вводя при этом символы Кристоффеля второго рода

$$\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} = \sum_{h=1}^{n} a^{(hi)} \begin{bmatrix} jl \\ h \end{bmatrix},$$

мы получим дифференциальные уравнения спонтанных движений в разрешенной форме

$$\ddot{q}_i = - \sum_{\substack{j=1\\ l=1}}^{n} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} \dot{q}_j \dot{q}_l \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{100}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (96), мы видим, что φ_i обладают в этом случае двумя особенностями: не содержат явно времени t и являются однородными функциями второй степени относительно $\dot{q}$. Если теперь, пользуясь способом п. 61, мы примем за новую независимую переменную q_n вместо t, то получим, принимая во внимание уравнения первого порядка (98), (99) и имея в виду отмеченную однородность φ_i, тождества

$$\varphi_i\left(q \,\middle|\, \frac{1}{t'} q'_1, \ldots, \frac{1}{t'} q'_{n-1},\ \frac{1}{t'}\right) = \frac{1}{t'^2}\varphi_i \quad (q \mid q'_1, \ldots, q'_{n-1}, 1),$$

[1]) Эльвин Бруно Кристоффель родился в Монжуа (на Рейне) в 1829 г., умер в Страсбурге в 1900 г. Был профессором в Политехнической школе в Цюрихе, в Берлинской промышленной академии и в Страсбургском университете. Прямой ученик Дирихле, а в широком смысле — и Римана, он дал ряд замечательных исследований в области алгебраических и абелевых функций, инвариантов, уравнений с частными производными и дифференциальной геометрии.

где в правой части величина $\frac{1}{t'^2}$ умножается на функцию, не зависящую от t'. Если для простоты обозначим эту функцию через ψ_i, то $n-1$ уравнений (96″) в этом случае примут вид

$$q_i'' = \psi_i - q_i'\psi_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и составят нормальную систему второго порядка относительно $n-1$ неизвестных функций $q_1, \ldots, q_{n-1}$ от q_n, которая сама по себе (т. е. без того, чтобы была необходимость присоединить к ней уравнение (96′)) достаточна для определения траекторий системы (100) или геодезических линий. Поэтому мы заключаем, что эти траектории зависят от $2n-2$ постоянных, т. е. как раз от наименьшего возможного числа их.

Заметим, наконец (не давая этому доказательства), что отмеченное выше свойство является характеристическим для консервативных случаев спонтанного движения, поскольку во всех других случаях консервативных сил или сил, зависящих только от положения (лишь бы они были отличны от нуля), траектории будут действительно зависеть от $2n-1$ произвольных постоянных, если связи, само собой разумеется, не зависят от времени [1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если три точки движутся из состояния покоя под действием только внутренних сил, то касательные к траекториям в одновременных положениях трех точек в любой момент сходятся в одной точке или параллельны.

Достаточно принять во внимание, что количества движения трех точек, если считать их приложенными к этим точкам, образуют в любой момент уравновешенную систему векторов.

2. Посредством рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 15, показать, что человек, стоящий на горизонтальном полу, может повертываться вокруг вертикали, даже если пол абсолютно гладкий, совершая подходящие движения рукой.

3. Предположим, что однородная цепочка, полная длина которой l, перекинута через малый блок C, не имеющий трения. Одна часть цепочки переменной длины $CA = q$ висит свободно, а другая, тоже висящая вертикально, имеет постоянную длину $CP = c$; остальная часть цепочки $l - c - q$ покоится в собранном виде на горизонтальной неподвижной подставке, причем ее следует уподобить одной материальной точке P.

Допустим, что единственная действующая сила есть вес, и рассмотрим промежуток времени, в течение которого конец A цепи опускается вертикально. Что произойдет, например, в том случае, если в начальный момент имеем $q > c$ и система предоставлена самой себе в состоянии покоя.

Обозначим через ν плотность (линейную) цепочки, через $v = \dot{q}$ — скорость разматывания, которая является в то же время скоростью точки A, и, нако-

---

[1]) Ср. P. Painlevé, Sur les mouvements et les trajectoires des systèmes. *Bull. de la Soc. math. de France*, т. XXII, 1894.