где в правой части величина $\frac{1}{t'^2}$ умножается на функцию, не зависящую от t'. Если для простоты обозначим эту функцию через ψ_i, то $n-1$ уравнений (96″) в этом случае примут вид

$$q_i'' = \psi_i - q_i'\psi_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и составят нормальную систему второго порядка относительно $n-1$ неизвестных функций $q_1, \ldots, q_{n-1}$ от q_n, которая сама по себе (т. е. без того, чтобы была необходимость присоединить к ней уравнение (96′)) достаточна для определения траекторий системы (100) или геодезических линий. Поэтому мы заключаем, что эти траектории зависят от $2n-2$ постоянных, т. е. как раз от наименьшего возможного числа их.

Заметим, наконец (не давая этому доказательства), что отмеченное выше свойство является характеристическим для консервативных случаев спонтанного движения, поскольку во всех других случаях консервативных сил или сил, зависящих только от положения (лишь бы они были отличны от нуля), траектории будут действительно зависеть от $2n-1$ произвольных постоянных, если связи, само собой разумеется, не зависят от времени[1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если три точки движутся из состояния покоя под действием только внутренних сил, то касательные к траекториям в одновременных положениях трех точек в любой момент сходятся в одной точке или параллельны.

Достаточно принять во внимание, что количества движения трех точек, если считать их приложенными к этим точкам, образуют в любой момент уравновешенную систему векторов.

2. Посредством рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 15, показать, что человек, стоящий на горизонтальном полу, может повертываться вокруг вертикали, даже если пол абсолютно гладкий, совершая подходящие движения рукой.

3. Предположим, что однородная цепочка, полная длина которой l, перекинута через малый блок C, не имеющий трения. Одна часть цепочки переменной длины $CA = q$ висит свободно, а другая, тоже висящая вертикально, имеет постоянную длину $CP = c$; остальная часть цепочки $l - c - q$ покоится в собранном виде на горизонтальной неподвижной подставке, причем ее следует уподобить одной материальной точке P.

Допустим, что единственная действующая сила есть вес, и рассмотрим промежуток времени, в течение которого конец A цепи опускается вертикально. Что произойдет, например, в том случае, если в начальный момент имеем $q > c$ и система предоставлена самой себе в состоянии покоя.

Обозначим через ν плотность (линейную) цепочки, через $v = \dot{q}$ — скорость разматывания, которая является в то же время скоростью точки A, и, нако-

[1]) Ср. P. Painlevé, Sur les mouvements et les trajectoires des systèmes. *Bull. de la Soc. math. de France*, т. XXII, 1894.

нец, через T — натяжение в точке P цепочки, возникающее благодаря связи вертикальной части PC цепочки с лежащей частью.

Для того чтобы написать уравнение движения задачи, введем вертикальную реакцию R, действию которой подвергается цепочка в C со стороны блока, и применим теорему о количестве движения в проекциях на вертикаль, отдельно для обеих частей цепочки CA и PC. Исключая R, найдем

$$\nu(q+c)\dot{v} = g\nu(q-c) - T.$$

Так как $v = \dot{q}$, то это уравнение будет служить для определения движения, но оно недостаточно для определения T. Для этой цели достаточно еще один раз применить теорему о количестве движения к материальному элементу цепочки, покидающему опору за элемент времени dt, следующий за любым моментом t, и располагающемуся затем вертикально. При данном значении q длина такого элемента будет как раз dq, а его масса νdq. С другой стороны, в начале элемента времени он имеет скорость, равную нулю, а в конце — скорость v, так что приращение проекции количества движения на вертикаль, направленную вверх, будет равно $\nu v dq$, а отношение этого приращения к dt будет νv^2. Это отношение надо приравнять сумме аналогичных проекций (на вертикаль, направленную вверх) внешних сил, действующих на элемент цепочки, которых в действительности будет четыре: вес, реакция опоры и два натяжения на концах элемента, о котором идет речь. Из этих натяжений то, которое происходит от связи с вертикальным куском, будет само вертикальным, направленным вверх и равным T; другое будет горизонтальным и поэтому не даст составляющей, направленной вверх. Что же касается веса и реакции, то эти силы обе бесконечно малы, и, следовательно, ими можно пренебречь, поэтому остается

$$\nu v^2 = T.$$

Если примем во внимание, что

$$\dot{v} = \frac{dv}{dq}\dot{q} = v\frac{dv}{dq},$$

то будем иметь уравнение, связывающее скорость v падения цепи с параметром q,

$$(q+c)v\frac{dv}{dq} + v^2 = g(q-c).$$

Это уравнение непосредственно интегрируется после того, как умножим обе его части на $2(q+c)$. Интеграл имеет вид

$$(q+c)^2 v^2 = 2g\left(\frac{1}{3}q^3 - c^2 q\right) + \text{const}.$$

Если движение начинается из состояния покоя, причем A находится на уровне немного более низком уровня точки $P(q_0 = c)$, то постоянная будет равна $\frac{4qc^3}{3}$. При этом предположении, если $l = 12c$, то скорость, которую будет иметь конец A в тот момент, когда вся цепочка придет в движение, будет равна 22/39 скорости свободного падения.

4. Тяжелая однородная цепочка AP длины l подвешена в A таким образом, что, свешиваясь вертикально, другим концом P слегка касается неподвижной горизонтальной плоскости. В заданный момент ($t = 0$) верхний конец ее отпускается, в силу чего цепочка падает, складываясь в P. Продолжительность падения, очевидно, есть $\sqrt{\frac{2l}{g}}$. Рассуждая аналогично тому, как в предыдущем упражнении, и применяя теорему о количестве движения к элементам цепочки, которые один за другим будут укладываться на опоре, показать, что реакция плоскости в любой момент $t<\sqrt{\frac{2l}{g}}$ будет равна утроенному весу той части цепочки, которая уже находится на плоскости в этот момент.

5. Материальная система, деформируемая как угодно, выходит из состояния покоя, подвергаясь только действию внутренних консервативных сил. Показать, что она может при случае принять снова первоначальную конфигурацию, в отличном от начального положении, но никогда с отличной от него ориентацией. Ср. Painlevé, Comptes Rendus, т. 139, 1904, стр. 1170—1174.

6. Установившееся движение нити. Предполагается, что гибкая и нерастяжимая нить пробегает вдоль самой себя с постоянной скоростью v таким образом, что ее конфигурация остается неизменной. Указать условия, при которых такое движение осуществляется.

Для этого достаточно применить принцип Даламбера, подставляя в естественные уравнения равновесия (т. I, гл. XIV, п. 34) вместо единичной силы $\boldsymbol{F}$ потерянную силу $\boldsymbol{F}-\nu\boldsymbol{a}$ (ν — линейная плотность нити).

Вывести отсюда, что натяжение, которое испытывает нить, в предполагаемом установившемся движении будет равно статическому натяжению, уменьшенному на $\frac{\nu v^2}{r}$ (r — радиус кривизны конфигурации нити в любой ее точке).

7. Дана материальная система со связями, не зависящими от времени. Две какие угодно системы активных сил Σ_1, Σ_2 определяют для нее, начиная от состояния покоя, такие перемещения, что работа, совершаемая силами системы Σ_1 на перемещениях, соответствующих Σ_2, равна работе, совершаемой силами системы Σ_2 на перемещениях, соответствующих Σ_1. Ср. Morera, *Rend. Lincei*, серия V, т. II, 1893_2, стр. 245—246.

8. Для материальной системы, находящейся под действием каких-нибудь сил, Клаузиус[1]) называл *вириалом* системы сил относительно какой-нибудь точки O функцию

$$V=\sum_{i=1}^{N} F_i \overrightarrow{OP_i},$$

где F_i обозначает, как обычно, полную силу, действующую на любую точку P_i системы.

Предполагается, в частности, что речь идет о силах внутреннего происхождения, зависящих только от взаимных расстояний между точками. В этом случае, если через Δ_{ij} обозначим расстояние между любыми двумя точками

[1]) Рудольф Клаузиус (Rudolf Clausius) родился в Кеслине (Померания) в 1822 г., умер в Бонне в 1888 г., был профессором физики в университетах Цюриха, Вюрцбурга и Бонна. Классическими являются его исследования по теории тепла и по термодинамике в ее наиболее общей постановке, собранные в двух томах. Всеобщее внимание ученых в свое время привлекла также одна его формула, относящаяся к элементарным законам электродинамики.

P_i, P_j, то составляющая по $P_i P_j$ силы, которую испытывает P_i со стороны P_j, будет вида $\varphi(\Delta_{ij})$; та же сила в векторной форме представится в виде

$$\frac{\varphi(\Delta_{ij})}{\Delta_{ij}} \overrightarrow{P_i P_j}.$$

Естественно, что P_j будет испытывать со стороны P_i действие прямо противоположной силы.

Показать далее, что вириал внутренних сил этого типа будет независимым от O и равным

$$-\frac{1}{2} \boldsymbol{S} \Delta_{ij} \varphi(\Delta_{ij}),$$

где символ $\boldsymbol{S}$ обозначает сумму, распространенную на простые попарные сочетания из индексов $1, 2, \ldots, N$.

9. Для какой-нибудь движущейся точки P относительно произвольной неподвижной точки O имеет место тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OP}^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}^2,$$

где $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}$ обозначают скорость и ускорение точки.

Отсюда, для какой угодно системы материальных точек P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, находящихся под действием сил $\boldsymbol{F}_i$, вывести тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP}_i^2 = V + 2T,$$

где V обозначает вириал системы относительно точки O (предыдущее упражнение) и T — живую силу.

На основании этой формулы доказать, что если движение системы является периодическим, то среднее значение живой силы T в течение одного периода равно аналогичному среднему значению вириала.

Это замечание принадлежит Клаузиусу, который нашел интересные применения его к механической теории тепла.

10. Из тождества предыдущего упражнения вывести, что если силы $\boldsymbol{F}_i$ являются производными от потенциала U, представляющего собой однородную функцию второй степени от координат x_i, y_i, z_i точек P_i системы, то полярный момент инерции

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP}_i^2$$

будет квадратичной функцией времени (теорема Якоби).

11. Доказать посредством рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 37, что для голономной системы с какими угодно связями имеем

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h.$$

Отсюда, принимая во внимание тождества

$$\frac{d}{dt} \delta P_i = \delta \boldsymbol{v}_i, \quad \boldsymbol{a} \cdot \delta P_i = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{v}_i \cdot \delta P_i) - \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{v}_i,$$

вывести соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h - \delta T$$

и непосредственно подтвердить, что правая часть приводится к

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h,$$

где, как обычно, τ_h обозначают лагранжевы биномы.

Приравнивая это выражение виртуальной работе $\sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h$, мы, естественно, найдем уравнения Лагранжа во второй форме. Этот способ вывода дан Бельтрами[1]). Ср. Beltrami, Opere, т. IV, стр. 537.

12. Если для голономной системы живая сила T имеет постоянные коэффициенты, то

$$\sum_{h=1}^{n} \overset{0}{\dot{q}}_h \overset{1}{p}_h = \sum_{h=1}^{n} \overset{1}{\dot{q}}_h \overset{0}{p}_h,$$

где $\dot{q}^0, p^0$ обозначают лагранжевы скорости и соответствующие количества движения в любой момент t_0 и $\dot{q}^1$, p^1 — аналогичные элементы в другой момент t_1.

Если в момент t_0 обращаются в нуль все скорости, за исключением $\overset{0}{\dot{q}}_i$, и все моменты, за исключением $\overset{0}{p}_k$, то в течение всего движения мы будем иметь

$$\frac{p_i}{\dot{q}_k} = \text{const}.$$

13. Каким условиям должна удовлетворять функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ положений P_i и скоростей $\boldsymbol{v}_i$ материальных точек, чтобы она не зависела от декартовой системы координат или, что одно и то же, чтобы она зависела только от взаимных положений и относительных скоростей различных точек системы?

---

[1]) Евгений Бельтрами (Eugenio Beltrami) родился в Кремоне в 1835 г., умер в Риме в 1900 г. После того как вынужден был прервать в 1856 г. обучение в университете, начатое им в Павии, он поступил на службу (на железную дорогу), на которой прослужил шесть лет, т. е. до того момента, когда обнаружилось его значение, как математика, благодаря его первым работам по дифференциальной геометрии. Получил звание профессора алгебры и аналитической геометрии в университете в Болонье. Затем перешел к чтению более сложных лекций в университетах Пизы, Павии и Рима. С 1876 г. до смерти преподавал математическую физику. Был президентом Академии наук (Accademia dei Lincei) и сенатором. Его работы, собранные в четырех томах in folio, показывают плодотворную разносторонность его таланта и с точки зрения формы представляют образец научной прозы. Основную важность представляют его исследования о ньютоновском потенциале и его дифференциальные параметры; знаменитым является его Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea, где он дает конкретное осуществление геометрии Лобачевского на обыкновенной поверхности вращения (псевдосфере).

Чтобы найти такие условия, достаточно выразить, что $\mathfrak{L}$ остается неизменной при всяком преобразовании декартовых координат или, что одно и то же, при всяком перемещении системы точек P_i и векторов $\boldsymbol{v}_i$ как неизменяемой системы; можно ограничиться рассмотрением любого бесконечно малого перемещения системы как неизменяемого твердого тела, так как всякое конечное перемещение можно разложить на такие перемещения.

Далее, если dO и $d\boldsymbol{\omega}$ суть характеристические векторы бесконечно малого перемещения системы точек P_i и векторов $\boldsymbol{v}_i$ как твердого тела, то для отдельных точек P_i будем иметь (т. I, гл. III, п. 24)

$$dP_i = dO + d\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

что касается векторов $\boldsymbol{v}_i$, то достаточно заметить, что предполагаемое бесконечно малое перемещение можно рассматривать как переносное движение, чтобы заключить (т. I, гл. IV, п. 10), что

$$d\boldsymbol{v}_i = d\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

после чего, обозначая через x_i, y_i, z_i координаты точки P_i, через $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ — составляющие вектора $\boldsymbol{v}_i$ и принимая во внимание произвольность векторов dO и $d\boldsymbol{\omega}$, мы увидим, что желаемые условия выразятся равенствами

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \left\{ y_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i} + \dot{y}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} - \dot{z}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} \right\} = 0$$

и аналогичными им, которые выводятся из них посредством круговой перестановки букв x, y, z.

14. В предположении, что функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ системы из N материальных точек P_i, отнесенных к декартовым осям, удовлетворяет условиям, указанным в предыдущем упражнении, доказать, что $3N$ лагранжевых уравнений движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

допускают первые интегралы

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} = \text{const}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \left(y_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} - z_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} \right) = \text{const}$$

и остальные четыре, получающиеся из них путем круговой перестановки букв x, y, z.

Этот результат обобщает обычные интегралы количеств движения и интегралы моментов, которые существуют для $\mathfrak{L} = T - U$, где U зависит только от конфигурации системы.

15. Маятник переменной длины. Из замечаний гл. I, п. 34 непосредственно следует, что живая сила маятника, длина которого l изменяется с временем по какому-либо закону, определяется равенством

$$T = \frac{1}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{l}^2),$$

если для простоты масса маятника принимается равной 1. Для потенциала (единичного) имеем здесь $U = gl \cos \theta$.

Движение определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}(l^2\dot{\theta}) + gl \sin \theta = 0,$$

к которому можно было бы придти также и на основании теоремы о результирующем моменте количеств движения относительно нормали к плоскости колебаний в центре подвеса.

Рассмотреть, в частности, случай, когда длина l нити есть линейная функция времени, причем речь идет только о малых колебаниях. В этом случае, выбирая подходящим образом начало отсчета времен, можно положить $l=ut$ и подставить θ вместо $\sin\theta$. Если, наконец, за неизвестную функцию принять $y=l\theta$ вместо θ и за независимое переменное $x=\frac{gl}{u^2}$ вместо t, то в конце концов придем к уравнению

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+y=0.$$

Из этого уравнения, в частности, можно получить, что для маятника, длина которого изменяется очень медленно, продолжительность одного простого колебания (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями через вертикаль) приблизительно равна аналогичной продолжительности для некоторого математического маятника, постоянная длина которого является средней от длин, принадлежащих рассматриваемому маятнику за рассматриваемый промежуток времени. (См., например, Lecornu, Dynamique appliquée, II изд., Paris, 1925 г., п. 164.)

16. Концы A, B твердого стержня длиной l скользят без трения в вертикальной плоскости соответственно по двум направляющим Ox, Oy, первая из которых горизонтальна, а вторая вертикальна и направлена вверх. Такая система, очевидно, имеет только одну степень свободы. За ее лагранжеву координату можно принять угол (острый) $\theta=\widehat{OAB}$.

Обозначая через λ расстояние центра тяжести стержня G от конца A, доказать, что живая сила системы определяется равенством

$$T=\frac{1}{2}(I+mr^2)\dot{\theta}^2,$$

где m — полная масса, I — полярный момент инерции (постоянный) стержня относительно G и

$$r=\sqrt{(l-\lambda)^2\cos^2\theta+\lambda^2\sin^2\theta}$$

есть переменное расстояние G от O.

Если стержень находится под действием только своего веса, то потенциал будет иметь значение

$$U=-mgl\sin\theta.$$

Показать, в частности, что в случае однородного стержня дифференциальное уравнение относительно $\theta(t)$, определяющее его движение, будет тождественно с дифференциальным уравнением качаний математического маятника длиной $\frac{2l}{3}$.

17. Кусок гибкой и нерастяжимой нити длиной l скользит без трения внутри трубки (т. е., схематически, вдоль некоторой заданной кривой, как в упражнении 6). Такую материальную систему, очевидно, можно рассматривать как голономную с одной степенью свободы, принимая, например, за обобщенную координату q криволинейную абсциссу положения, занимаемого внутри трубки одним из концов нити.

Если нить предполагается однородной и если ее линейную плотность обозначить через ν, то живая сила определится равенством $T=\frac{\nu l v^2}{2}$, где скорость скольжения v надо выразить через q и $\dot{q}$; в случае, когда нить находится под действием только консервативных сил с потенциалом $U(q)$, закон движения непосредственно получится из интеграла живых сил $T-U=\text{const}$.

Если эти силы сводятся к весу и z_0 обозначает высоту по вертикали центра тяжести нити (которая зависит от заданной кривой и от положения, занимаемого на ней куском нити, и будет вполне определенной функцией от q), то предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}v^2-gz_0=\text{const}.$$

В виде приложения рассмотрим U-образную трубку с двумя прямолинейными, вертикальными, направленными вниз ветвями, соединенными в двух точках на одной и той же высоте посредством криволинейного куска длиной λ. Условимся ограничивать наши выводы промежутком времени, в течение которого нить, скользя под действием тяжести внутри трубы, имела бы первый конец A в одной из двух вертикальных ветвей, а второй конец A' — в другой. Обозначая в любой момент q, q' высоты по вертикали концов A, A', отсчитываемые, как положительные, вниз и от уровня, на котором начинается криволинейный кусок соединяющей трубы, мы будем иметь $q'=l-\lambda-q$; если для определенности предположим, что конец A движется вниз, то будем иметь $v=\dot{q}$. С другой стороны, имеем тождество

$$l\nu z_0=q\nu\frac{q}{2}+q'\nu\frac{q'}{2}+\mu,$$

где μ — величина постоянная (доля той части нити, которая находится в соединительной трубке); таким образом мы заключаем, что движение определяется уравнением

$$v^2-\frac{g}{l}\{q^2+(l-\lambda-q)^2\}=\text{const}.$$

Рассмотреть, в частности, случай, когда соединительная часть трубки очень мала по сравнению с l ($\lambda=0$); так как вначале q приблизительно равно q', то опускание начнется со стороны A с ничтожной скоростью ($v_0=0$); доказать, что когда A' достигает самой высокой точки своей вертикальной ветви ($q'=0$), то скорость, приобретенная концом A, будет равна половине той скорости, которую он имел бы на той же высоте при свободном падении.

18. Гибкая и нерастяжимая нить, полная длина которой l, намотана на катушку. Один конец A нити закрепляется, и катушку пускают свободно падать вдоль вертикали так, что нить будет разматываться. Предполагая, что под действием подходящих приборов без трения ось катушки падает вертикально, оставаясь горизонтальной и параллельной самой себе, изучить движение.

При допущенных предположениях система имеет только одну степень свободы и за обобщенную координату q можно принять длину куска нити, размотавшегося до некоторого произвольного момента t. Обозначим через ν линейную плотность нити, через r — радиус катушки, через m — ее массу без нити, через μ — ее момент инерции относительно оси. Принимая во внимание, что центр тяжести катушки падает со скоростью $\dot{q}$, вращаясь вокруг ее оси с угловой скоростью, которая, если пренебречь толщиной нити, будет равна $\dot{q}/r$, мы найдем для живой силы T и потенциала U веса, пренебрегая во всех случаях толщиной нити, выражения

$$T=\frac{1}{2}(m+[l-q]\nu)\dot{q}^2+\frac{1}{2}(\mu+[l-q]\nu r^2)\frac{\dot{q}^2}{r^2},$$

$$U=g(m+[l-q]\nu)q+\frac{\nu g}{2}q^2+\text{const}.$$

Показать, что если пренебречь массой нити, то катушка опускается так как будто она скатывается по вертикальной плоскости.

19. Показать, что любая однородная треугольная пластинка, масса которой m, эквивалентна в смысле, разъясненном в п. 38, системе из трех точек, помещенных посредине сторон, неизменно связанных между собой и имеющих каждая массу $m/3$.

20. Две массы m_1, m_2, движущиеся в вертикальной плоскости, связаны очень тонкой нитью постоянной длины l, которая продета через неподвижное колечко O. Рассмотреть движение системы в предположении, что нить остается натянутой и действуют только веса этих масс.

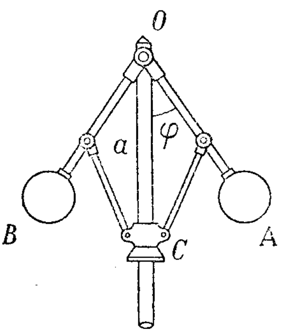
Речь идет, очевидно, о голономной системе с тремя степенями свободы, так как положение системы можно определить тремя координатами: углами θ_1, θ_2 между направлениями нитей и вертикалью через точку O, направленною вниз, и радиусом-вектором ρ массы m_1 относительно O; аналогичный радиус-вектор массы m_2 будет $l-\rho$. Показать, что живая сила и потенциал определяются равенствами

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot\rho^2+[l-\rho]^2\dot\theta_2^2),$$
$$U=g(m_1\rho\cos\theta_1+m_2[l-\rho]\cos\theta_2);$$

написать уравнения движения и т. д.

21. Масса m, движущаяся без трения по горизонтальной плоскости, привязана к нити длины l; нить проходит через небольшое отверстие в плоскости и несет на другом конце массу m_1. Изучить движение под действием силы тяжести, принимая во внимание, что система (при натянутой нити) имеет две степени свободы и что имеют место интеграл живой силы и интеграл площадей для горизонтальной плоскости.

22. Схематическая теория центробежного регулятора Уатта[1]). Речь идет о приборе R, предназначенном для уничтожения возможных возмущений равномерного вращательного движения.



Фиг. 23.

Пусть a есть ось, которую мы будем предполагать вертикальной и неизменно связанной с вращающейся системой S. Вращение системы S требуется поддерживать приблизительно равномерным. Регулятор R состоит прежде всего из двух равных стержней OA и OB (фиг. 23), связанных шарниром в неподвижной точке O оси a таким образом, что они могут вращаться в одной и той же плоскости, проходящей через эту ось. Стержни несут на концах две равные массы m и связаны тоже шарнирно посредством меньших и равных между собой стержней с муфтой C, скользящей вдоль a. Таким образом обеспечивается то, что в любой момент оба стержня OA и OB образуют с a один и тот же угол φ. Если вращение системы S происходит от паровой машины, то регулятор управляет впуском пара в распределительную коробку, пропуская его туда тем меньше, чем больше возрастает угол φ.

Можно точно определить зависимость между изменением угла φ и возможной неправильностью движения. Прежде всего заметим, что системы S и R в целом составляют материальную систему с двумя степенями свободы,

---

[1]) Джемс Уатт родился в Гриноке (Шотландия) в 1736 г., умер около Бирмингема в 1819 г., известен благодаря усовершенствованиям, внесенным в паровую машину.

так как за обобщенные координаты можно принять угол θ, определяющий положение плоскости регулятора R (и тем самым системы S) относительно неподвижной системы отсчета, и угол φ, определяющий конфигурацию регулятора R в этой плоскости.

Живая сила всей системы S, R будет типа

$$T = I\dot{\theta}^2 + J\dot{\varphi}^2,$$

где I и J суть функции угла φ. Чтобы иметь дело с простейшим случаем, представим себе, что в системе R масса стержней ничтожна по сравнению с m. В этом предположении, обозначая через C момент инерции системы S относительно a, очевидно, будем иметь

$$I = C + 2ml^2 \sin^2\varphi, \quad J = 2ml^2.$$

Что же касается активных сил Q_θ, Q_φ, то мы ограничимся предположением, что входят только вес и момент относительно оси вращения (если пренебречь возможным сопротивлением), совпадающий, как легко проверить, с Q_θ. Все, что относится к весу, допускает потенциал U, который определяется, по крайней мере до аддитивной постоянной, произведением полного веса всей системы S, R на высоту ее центра тяжести; но так как центр тяжести S остается неподвижным, то с точностью по крайней мере до несущественной постоянной можно отождествить U с потенциалом двух масс A и B, т. е. положить

$$U = 2mgl\cos\varphi.$$

На основании этих предпосылок получаются уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = Q_\theta, \quad \frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\frac{\partial I}{\partial\varphi} = \frac{\partial U}{\partial\varphi}.$$

Эти уравнения приобретают особый интерес при изучении малых колебаний системы около установившегося состояния движения ($\dot{\theta} = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$). Мы встретимся с этими уравнениями в упражнении 8 следующей главы.

23. Дана голономная система. Показать, что если каждая точка P_i этой системы находится под действием силы вязкого сопротивления $-\lambda \boldsymbol{v}_i$, где λ — положительная постоянная и $\boldsymbol{v}_i$ — скорость точки P_i, то лагранжевым составляющим таких сил можно придать вид

$$Q_h = -\lambda\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где T обозначает живую силу системы.

Достаточно отправиться от формулы (37) и принять во внимание указанные выражения для $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$ в п. 37.

24. На основании предыдущего упражнения уравнениями Лагранжа, определяющими движение голономной системы, находящейся под действием вязкого сопротивления, будут

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказать, что посредством замены независимого переменного $dt_1 = e^{-\lambda t}dt$ предыдущие уравнения приводятся к уравнениям спонтанного движения системы[1]).

---

[1]) См. L e v i-C i v i t a, Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionale alle rispettive velocità. *Atti Ist. Veneto*; т. LIV, 1896, стр. 1004—1008.