Глава VI

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ

1. Исследование динамической устойчивости, изложенное для одной точки в гл. II, § 6, и последующее изучение малых колебаний около положения устойчивого равновесия можно распространить, пользуясь уравнениями Лагранжа, на случай какой угодно голономной системы.

Это обобщение представляет особый интерес не только с теоретической стороны, но также и с точки зрения физических и технических приложений. Имея в виду главным образом эти приложения, мы и будем рассматривать в этой главе вопросы, связанные с устойчивостью и колебаниями.

В физических и технических проблемах встречаются и другие виды естественных движений, а также некоторые виды движения тех же самых голономных систем, которые, хотя и выражаются уравнениями более общими, чем уравнения Лагранжа, но могут быть сопоставлены с состояниями равновесия голономной системы благодаря тому, что уравнения допускают соответствующие частные решения (статические или меростатические решения). Мы распространим наше исследование и на эти решения. Наконец, мы введем, наряду со строгим определением понятия устойчивости, приближенное понятие, соответствующее устойчивости в течение конечного, но достаточно длительного промежутка времени, или *линейной* устойчивости *), исследованием которой мы и будем часто ограничиваться в силу непреодолимых математических трудностей, возникающих при анализе устойчивости в строгом смысле.

Это последнее направление исследований практических вопросов носит название теории малых колебаний.

Отметим, наконец, что в механизмах, используемых в технике и в лабораториях, встречаются пассивные сопротивления, содействующие устойчивости; но при исследовании устойчивости в этом случае потребуются рассуждения несколько иного характера, чем для консервативных систем. Рассмотрению этого вопроса посвящен § 7. Здесь же мы ограничимся указанием на новый замеча-

*) Как будет видно из дальнейшего, взгляды автора на линейную устойчивость или устойчивость по первому приближению не совпадают с общепринятыми. *(Прим. ред.)*

тельный критерий Э. Треффтца[1]) для характеристики устойчивости движения, в полной мере отвечающий требованиям техники.

§ 1. Динамическое понятие устойчивости равновесия для голономных систем. Теорема Дирихле

2. Вернемся к рассмотрению любой материальной голономной системы S, имеющей произвольное число степеней свободы n, и отнесем ее к любым n независимым лагранжевым координатам q.

Как мы уже знаем, всякое движение системы определяется соответствующими уравнениями,

$$q_h = q_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

производные от которых

$$\dot{q}_h = \dot{q}_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

в любой момент дают соответствующие лагранжевы скорости.

Чтобы придать нашим рассуждениям наиболее удобную и наглядную форму, условимся прибегать к гиперпространственному геометрическому представлению, рассматривая $2n$ параметров q и $\dot{q}$ как декартовы прямоугольные координаты в пространстве A_{2n} $2n$ измерений. Так как всякая точка этого пространства представляет состояние движения нашей системы, то A_{2n} можно назвать *пространством состояний движения.*

В пространстве A_{2n} движение (1) или, лучше сказать, непрерывная последовательность составляющих его состояний движения будет представлено кривой с параметрическими уравнениями (1), (2).

Введем здесь следующий удобный для дальнейшего способ выражения: будем называть „отклонением" двух точек $q', \dot{q}'$ и $q'', \dot{q}''$ пространства A_{2n} или двух соответствующих состояний движения максимум абсолютных величин

$$|q'_h - q''_h|, \quad |\dot{q}'_h - \dot{q}''_h| \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

от $2n$ разностей одноименных координат.

Далее, известно, что в A_{2n} *гиперсферой с центром в* q^0, $\dot{q}^0$ *и радиусом* $r\,(>0)$ называется гиперповерхность (или многообразие $2n-1$ измерений), определяемая уравнением

$$\sum_{h=1}^{n}([q_h - q_h^0]^2 + [\dot{q}_h - \dot{q}_h^0]^2) = r^2.$$

[1]) E. Trefftz, Zu den Grundlagen der Schwingungstheorie, *Math. Ann.*, т. 95, 1925, стр. 307—312.

Речь идет о *замкнутой* поверхности, делящей пространство A_{2n} на две области: область *внешних* и область *внутренних* точек. Точка пространства будет внешней или внутренней, смотря по тому, будет ли левая часть уравнения этой поверхности при подстановке в нее вместо q_h, $\dot{q}_h$ координат рассматриваемой точки больше или меньше r^2, или, как условимся говорить, смотря по тому, будет ли расстояние точки $(q, \dot{q})$ от точки $(q^0, \dot{q}^0)$ больше или меньше r.

Очевидно, что отклонение точек внутренней области от центра не может превосходить r (иначе левая часть уравнения превосходила бы r^2), отклонение точек внешней области от центра будет, конечно, больше чем $r/\sqrt{2n}$ (иначе левая часть была бы меньше r^2).

3. Для дальнейшего будет полезно, наряду с предыдущими геометрическими предпосылками, напомнить здесь некоторые понятия из анализа.

Предположим, что в пространстве A_{2n} задана функция точки H, т. е. функция от $2n$ аргументов q, $\dot{q}$, однозначная, конечная и непрерывная вместе с ее $2n$ частными производными первого порядка, по крайней мере в некоторой связной области $2n$ измерений, которой мы будем ограничиваться в наших рассуждениях.

Говорят, что функция H имеет *действительный* (или изолированный) минимум в некоторой точке M, если для любой точки P, достаточно близкой к M, но отличной от нее, удовлетворяется неравенство

$$H_P - H_M > 0,$$

где H_P и H_M суть значения функции H в точках P и M.

Иными словами, в случае минимума существует такая окрестность $2n$ измерений точки M, что во всякой ее точке P, отличной от M, имеет место предыдущее *неравенство*. Для краткости эту окрестность точки M мы будем называть „окрестностью, в которой чувствуется минимум".

Если мы теперь будем рассматривать гиперсферу с центром в точке M и радиусом η, достаточно малым для того, чтобы все ее точки Q (т. е. все точки Q, имеющие от M расстояние η) принадлежали к только что определенной окрестности точки M, то разность $H_Q - H_M$ при изменении положения точки Q на гиперсфере будет иметь вследствие непрерывности функции H некоторый минимум μ и этот минимум (так как во всех точках Q чувствуется минимум) будет обязательно больше нуля.

Аналогичные замечания, если изменен только смысл неравенства, будут справедливы и в случае *действительного максимума*.

4. Устойчивость состояния равновесия. Предположим теперь, что голономная система S имеет связи, не зависящие от времени,

и находится под действием консервативных сил, потенциал которых обозначим через U. Этот потенциал, в силу только что допущенных предположений, будет зависеть исключительно от q; в рассматриваемом поле мы будем предполагать его, как обычно, однозначным, непрерывным и правильным вместе с его первыми и вторыми производными.

Мы уже знаем, что если функция $U(q)$ при частных значениях q^0 координат q, т. е. при заданной конфигурации C^0 системы, допускает стационарное значение (в частности, максимум или минимум), так что исчезают лагранжевы составляющие Q_h действующих сил, то C^0 будет для системы конфигурацией равновесия (т. I, гл. XV, п. 28).

Мы имеем здесь возможность полностью исследовать устойчивость этого состояния равновесия, пользуясь, вместо статического критерия, указанного в только что упоминавшемся п. 28, более общим и более точным определением динамического характера, совершенно аналогичным определению, которое мы приняли в частном случае одной свободной материальной точки (гл. II, п. 35).

Обобщая обычным образом данное в гл. II, п. 35 определение устойчивости, мы будем называть конфигурацию равновесия C^0 *устойчивой*, если при достаточно малом *возмущении* равновесия (т. е. при начальной конфигурации, достаточно близкой к C^0, и достаточно малой живой силе T^0) будет иметь место движение, при котором система остается сколь угодно близкой к C^0, и в то же время сохраняет сколь угодно малую живую силу, т. е. одновременные скорости всех отдельных точек системы остаются как угодно малыми.

Если, наоборот, как бы близка к C^0 ни была начальная конфигурация и как бы ни была мала вначале живая сила, всегда можно сообщить системе такое движение, в котором отклонение системы от конфигурации равновесия C^0, или даже только живая сила, в конце концов превзойдет некоторую постоянную (положительную), *не зависящую от начальных условий* величину, то конфигурация равновесия C^0 называется *неустойчивой*.

Этим критериям устойчивости и неустойчивости можно дать более простую, но менее точную форму, прибегая к геометрическому представлению п. 2. С этой целью заметим, что в пространстве A_{2n} состояний движения состояние равновесия в положении C^0 представляется точкой M с координатами $q_h = q_h^0$, $\dot{q}_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, и всякое состояние движения, близкое к этому состоянию равновесия, представится точкой, имеющей очень малое отклонение от M, и обратно.

Если обозначим через P точку, представляющую состояние движения, которое принимает наша система в любой момент t, отправляясь от начальных условий, представляемых точкой P_0, то указанное выше характеристическое условие устойчивости состояния равновесия в C^0, представляемого точкой M, можно высказать следующим образом: состояние равновесия в C^0 будет устойчивым, если, выбрав сколь угодно малое ε, можно поставить ему в соответствие такое η, что при всяком P_0 внутри гиперсферы с центром в M и радиусом η точка P будет *неопределенно долго* оставаться внутри концентрической гиперсферы с радиусом ε.

Наоборот, состояние равновесия в C^0 будет неустойчивым, если внутри всякой гиперсферы с центром в M и как угодно малым радиусом η всегда будет существовать по крайней мере одна точка P_0, отправляясь от которой точка P в конце концов выйдет из концентрической гиперсферы с радиусом, *не зависящим от* η.

5. Теорема Дирихле. Выяснив таким образом динамическое понятие об устойчивости, докажем теорему Дирихле: *если потенциал U в некоторой конфигурации C^0 имеет действительный максимум, то равновесие в ней будет устойчивым.*

Заметим прежде всего, что при только что установленных предположениях полная энергия $H=T-U$ системы в точке M (представляющей состояние равновесия в конфигурации C^0) имеет действительный минимум. В самом деле, если P есть какая-нибудь точка пространства A_{2n}, то разность H_P-H_M, так как в M живая сила равна нулю, будет равна

$$T_P+(U_M-U_P),$$

откуда видно, что пока точка P близка к M или, еще точнее, остается в такой окрестности точки M, в которой чувствуется максимум U, эта разность остается положительной, за исключением случая, когда P совпадает с M.

Обратимся теперь к интегралу живых сил

$$H=\text{const}.$$

Если возьмем ε достаточно малым для того, чтобы гиперсфера Σ_ε с центром в M и радиусом ε вся была внутри окрестности точки M, в которой чувствуется действительный минимум функции H, то этому ε можно в силу замечаний п. 3 поставить в соответствие такое число μ, что для всех точек Q, лежащих на гиперсфере Σ_ε, будем иметь

$$H_Q-H_M>\mu. \tag{3}$$

Выберем теперь какое-нибудь положительное число $\mu'<\mu$ и заметим, что вследствие непрерывности H относительно своих $2n$ аргументов наверное будет существовать некоторая гиперсфера Σ_η с центром в M и радиусом η, достаточно малым для того, чтобы *во всякой точке* P_0 гиперсферы Σ_η или внутри нее имело место соотношение

$$H_{P_0}-H_M\leqslant\mu'. \tag{4}$$

Далее, поверхность Σ_η есть как раз гиперсфера, фигурирующая в нашем динамическом критерии устойчивости; действительно, если возмущенное начальное состояние представляется точкой P_0, не внешней для Σ_η, благодаря чему вначале будет справедливо соотношение (4), то разность $H_P - H_M$, в силу интеграла живых сил, сохранит в течение всего движения свое начальное значение $\leq \mu'$. Отсюда следует, что изображающая точка P не может уже уходить из гиперсферы Σ_ε, так как, для того чтобы точка P могла уйти из этой гиперсферы, ей нужно было бы пересечь гиперсферу в некоторой точке Q, в которой разность $H_Q - H_M$ в силу неравенства (3) сделалась бы больше μ и, следовательно, больше μ'.

Таким образом, на основании динамического критерия предыдущего пункта подтверждается устойчивость состояния равновесия в M, т. е. в конфигурации C^0.

6. Покажем еще, как предыдущему доказательству теоремы Дирихле можно придать синтетическую форму, которая, требуя, при строгом ее проведении, логических рассуждений, эквивалентных только что изложенным, делает доказательство непосредственно наглядным.

Рассмотрим в пространстве A_{2n} состояний движения гиперповерхность $H = \text{const}$ (*изоэнергетическая гиперповерхность*), записывая уравнение ее в виде

$$H - H_M = c, \tag{5}$$

где c обозначает произвольную постоянную, конечно, не отрицательную вблизи от M. При $c = 0$ эта гиперповерхность сводится к точке M, изображающей состояние равновесия в конфигурации C^0; тогда при $c > 0$ и достаточно малом гиперповерхности (5) будут замкнутыми вокруг M, и при возрастании c будут следовать одна за другой таким образом, что каждая будет содержать внутри себя все предыдущие. Это логически следует из одних только предположений непрерывности H и действительного минимума в M и может быть строго доказано при помощи рассуждений, эквивалентных рассуждениям предыдущего пункта.

Теперь теорема Дирихле, благодаря этим замечаниям, оказывается совершенно наглядной. Действительно, так как имеет место интеграл живых сил, то изображающая точка P, в каком-нибудь возмущенном движении, уже не будет покидать гиперповерхность (5), на которой она находилась вначале, так что нужно только задать достаточно малым начальное возмущение, т. е. по существу постоянную c, соответствующую начальному состоянию движения P_0, чтобы точка P бесконечно долго оставалась сколь угодно близкой к M.

7. Теорема Ляпунова *). Важно отметить, что теорема Дирихле допускает следующее обращение: *если состояние равновесия M соответствует просто некоторому стационарному значению потенциала U, которое не является максимумом, и если, как это имеет место в общем случае, отсутствие максимума можно обнаружить из рассмотрения местных числовых значений вторых производных, то равновесие будет неустойчивым.*

Эту теорему, принадлежащую Ляпунову, мы не будем доказывать; мы только позволим себе указать в дальнейшем, прибегая к некоторым интуитивным соображениям, порядок рассуждений, при помощи которых можно придти к доказательству (§ 5). Здесь же, между прочим, добавим, что Ляпунов доказал также, что неустойчивость будет иметь место и в большей части исключительных случаев, когда для подтверждения отсутствия максимума оказывается необходимым обратиться к производным порядка выше второго.

---

*) Александр Михайлович Ляпунов родился 25 мая 1857 г. в Ярославле, умер 3 ноября 1918 г. в Одессе. Окончил математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета в 1880 г. и был оставлен своим учителем, профессором Бобылевым, при университете. В 1885 г. защитил магистерскую диссертацию на тему „Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости". В 1892 г. блестяще защитил свою докторскую диссертацию на тему „Общая задача об устойчивости движения". Был профессором Харьковского университета с 1885 по 1901 г. В 1900 г. избран членом-корреспондентом, а в 1901 г. — действительным членом Российской академии наук.

Научные труды А. М. Ляпунова охватывают многие вопросы математики и математической физики, но особенной известностью пользуются его работы по устойчивости движения и по вопросу о фигурах равновесия вращающейся жидкости. Задача об устойчивости движения, впервые поставленная Лагранжем, на протяжении ста лет решалась на основании результатов, получаемых из линейных уравнений первого приближения. Многочисленные и очень важные результаты были получены до Ляпунова Томсоном и Тэтом, Раусом и Н. Е. Жуковским. Однако до Ляпунова никто не делал попытки обосновать законность методов, которыми эти результаты были получены, и заслуга Ляпунова заключается в том, что он впервые отчетливо сформулировал понятие устойчивости движения, разработал методы исследования, получил много весьма важных результатов в более общей форме, чем это было сделано до него, и указал условия, при которых метод малых колебаний доставляет исчерпывающее суждение об устойчивости и неустойчивости движения. Работы А. М. Ляпунова по теории устойчивости движения, доставившие ему мировую славу, ныне нашли себе применение в самых различных областях математического естествознания и техники.

О роли А. М. Ляпунова в науке и, в частности, в развитии учения об устойчивости движения см. некролог, посвященный памяти А. М. Ляпунова академиком Стекловым (в книге А. М. Ляпунова „Общая задача об устойчивости движения", ОНТИ, 1935, стр. 364—382), и некролог, посвященный памяти А. М. Ляпунова академиком А. Н. Крыловым в „Известиях Академии наук СССР" за 1930 г. Значение работ А. М. Ляпунова в развитии теории устойчивости движения подробно охарактеризовано в монографии Н. Д. Моисеева „Очерки развития теории устойчивости", 1949. *(Прим. ред.)*

Мы не будем здесь задерживаться на этом разборе, требующем знания не совсем элементарной теории дифференциальных уравнений; заметим только, что эти рассуждения об устойчивости, которые, как мы увидим в §§ 4, 5, распространяются со случая равновесия на случай движения, заставляют признать, что неустойчивость составляет правило, тогда как устойчивость является только исключением [1]).

§ 2. Смещение равновесия

8. Определение. Разберем здесь один вопрос, хотя и относящийся к чистой статике, но связанный с понятием об устойчивости с только что выясненной динамической точки зрения.

Рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, материальную голономную систему с независимыми лагранжевыми координатами q_1, q_2, ..., q_n и допустим, что она обладает *внутренней энергией* $\Omega(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, т. е. находится под действием внутренних сил, являющихся производными от потенциала $-\Omega$, предполагаемого, как обычно, однозначным, конечным, непрерывным и дифференцируемым по крайней мере до второго порядка внутри некоторой области (гл. V, п. 34). Пусть, кроме того, C^0 есть конфигурация действительного минимума этой внутренней энергии, т. е., по теореме Дирихле (п. 5), конфигурация устойчивого равновесия для системы, если предположить, что она находится под действием только указанных выше внутренних сил. Такую конфигурацию мы будем называть *естественным положением* системы и для формальной простоты будем предполагать, что она определяется n координатами $q_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Предположим теперь, что к системе приложены другие позиционные силы с лагранжевыми составляющими $Q_h(p)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$. Если эти составляющие не все обращаются в нуль в положении C^0, то равновесия в естественном положении больше не будет, но возможно, что установится (например, после затухающих колебаний) состояние *смещенного равновесия* в новой конфигурации C^0, которая,

1) Чтобы оправдать это утверждение в отношении того, что касается состояний равновесия, ограничиваясь при этом случаем, когда о наличии или отсутствии максимума U можно вывести заключение из рассмотрения местных значений вторых производных, достаточно вспомнить, что определяющий критерий для различения устойчивости и неустойчивости состоит в том, будет или не будет определенной отрицательной квадратичная форма с n переменными, имеющая коэффициентами эти местные значения вторых производных. Из алгебры известно, что для того, чтобы такая квадратичная форма была определенной отрицательной, требуется, чтобы известные n определителей порядков n, $n-1$, ..., 1 все имели один и тот же знак; такая комбинация представляется, конечно, весьма случайной среди всех остальных возможных случаев для знаков этих определителей. О том, что относится к состояниям движения, см. Levi-Civita, Sopra alcuni criteri di instabilità, *Annali di Matematica*, т. V, 1901, стр. 221—308.