Мы не будем здесь задерживаться на этом разборе, требующем знания не совсем элементарной теории дифференциальных уравнений; заметим только, что эти рассуждения об устойчивости, которые, как мы увидим в §§ 4, 5, распространяются со случая равновесия на случай движения, заставляют признать, что неустойчивость составляет правило, тогда как устойчивость является только исключением [1]).

§ 2. Смещение равновесия

8. Определение. Разберем здесь один вопрос, хотя и относящийся к чистой статике, но связанный с понятием об устойчивости с только что выясненной динамической точки зрения.

Рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, материальную голономную систему с независимыми лагранжевыми координатами q_1, q_2, ..., q_n и допустим, что она обладает *внутренней энергией* $\Omega(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, т. е. находится под действием внутренних сил, являющихся производными от потенциала $-\Omega$, предполагаемого, как обычно, однозначным, конечным, непрерывным и дифференцируемым по крайней мере до второго порядка внутри некоторой области (гл. V, п. 34). Пусть, кроме того, C^0 есть конфигурация действительного минимума этой внутренней энергии, т. е., по теореме Дирихле (п. 5), конфигурация устойчивого равновесия для системы, если предположить, что она находится под действием только указанных выше внутренних сил. Такую конфигурацию мы будем называть *естественным положением* системы и для формальной простоты будем предполагать, что она определяется n координатами $q_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Предположим теперь, что к системе приложены другие позиционные силы с лагранжевыми составляющими $Q_h(p)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$. Если эти составляющие не все обращаются в нуль в положении C^0, то равновесия в естественном положении больше не будет, но возможно, что установится (например, после затухающих колебаний) состояние *смещенного равновесия* в новой конфигурации C^0, которая,

[1]) Чтобы оправдать это утверждение в отношении того, что касается состояний равновесия, ограничиваясь при этом случаем, когда о наличии или отсутствии максимума U можно вывести заключение из рассмотрения местных значений вторых производных, достаточно вспомнить, что определяющий критерий для различения устойчивости и неустойчивости состоит в том, будет или не будет определенной отрицательной квадратичная форма с n переменными, имеющая коэффициентами эти местные значения вторых производных. Из алгебры известно, что для того, чтобы такая квадратичная форма была определенной отрицательной, требуется, чтобы известные n определителей порядков n, $n-1$, ..., 1 все имели один и тот же знак; такая комбинация представляется, конечно, весьма случайной среди всех остальных возможных случаев для знаков этих определителей. О том, что относится к состояниям движения, см. Levi-Civita, Sopra alcuni criteri di instabilità, *Annali di Matematica*, т. V, 1901, стр. 221—308.

естественно, будет определяться общими уравнениями статики в лагранжевых координатах (т. I, гл. XV, п. 25)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

На основании предположения, что C^0 является конфигурацией равновесия при отсутствии внешних сил, должны обращаться в нуль при $q_h = 0$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) все частные производные от Ω по q. Поэтому, предполагая внутреннюю энергию в естественном состоянии равной нулю (что равносильно соответствующему выбору несущественной аддитивной постоянной потенциала), мы будем иметь в подходящей окрестности C^0 разложение вида

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \partial q_k}\right)^0 q_h q_k + \cdots \tag{7}$$

Ограничиваясь рассмотрением случая, когда конфигурация C смещенного равновесия находится в непосредственной близости от естественного положения C^0, можно пренебречь остатком предыдущего разложения и удержать для Ω элементарное выражение, представляющее собой квадратичную форму относительно q,

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} q_h q_k, \tag{7'}$$

где для краткости положено

$$\beta_{hk} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \, \partial q_k}\right)^0;$$

с аналогичным приближением можно рассматривать все Q_h как постоянные, со значениями $\overset{0}{Q}_h$, которые эти постоянные имеют в естественном положении системы. Поэтому система (6), от которой зависит определение конфигурации смещенного состояния равновесия, т. е. определение приращений q_k, испытываемых лагранжевыми координатами при смещении системы из C^0 в C, в первом приближении приводится к системе n линейных неоднородных уравнений относительно q

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{hk} q_k = \overset{0}{Q}_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{6'}$$

Эта система однозначно определяет все координаты q во всех тех случаях, когда отличен от нуля определитель

$$\| \beta_{hk} \| = \left\| \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \, \partial q_k}\right)^0 \right\|;$$

заметим, что это обстоятельство необходимо будет иметь место, когда из рассмотрения второго дифференциала можно заключить о действительном минимуме функции Ω в $C^{\bullet}$, так как в этом случае квадратичная форма (7′) будет определенной положительной и, следовательно, дискриминант ее не равен нулю.

9. Теорема взаимности. Интересное следствие из этих рассуждений мы будем иметь, предполагая, что добавочные силы сводятся к одной единственной составляющей Q по одной из q, например по q_i. Равенства (6′) тогда принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{hk} q_k = \delta_{hi} Q \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где δ_{hi} обозначает нуль или положительную единицу, смотря по тому, будут ли оба индекса h, i между собой различны или равны. Отсюда, предполагая $\|\beta_{hk}\| \neq 0$, применяя правило Крамера [1]) и обозначая через $\beta^{(hk)}$ величину, взаимную с β_{hk} (т. е. соответствующее алгебраическое дополнение, деленное на определитель $\|\beta_{hk}\|$), получим выражение для изменения, испытываемого любой лагранжевой координатой q_k при смещении из положения равновесия, соответствующего рассматриваемым силам,

$$q_k = Q \sum_{h=1}^{n} \beta^{(hk)} \delta_{hi} = \beta^{(ik)} Q \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Предположим теперь, что та же сила Q действует не в направлении координаты q_i, а по направлению какой-нибудь другой координаты, например q_k. В этом случае мы будем иметь другое состояние смещенного равновесия, в котором координата q_i, на основании предыдущей формулы, в предположении, что в ней k заменено через i, будет иметь величину

$$q_i = \beta^{(ki)} Q;$$

если теперь примем во внимание, что $\beta^{(hk)}$, так же как и β_{hk}, составляют симметричную матрицу, то из сравнения двух состояний равновесия получим следующую теорему взаимности [2]): *изменение, которое испытывает какая-нибудь лагранжева координата q_k, исходя из значения, соответствующего естественному положению системы, при смещении положения равновесия, происходящего от*

[1]) Г. Крамер (Gabriel Cramer) родился в Женеве в 1704 г., умер близ Нима в 1752 г., был профессором математики и философии в Академии наук Женевы. Знаменитое правило, носящее его имя, можно найти в Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, 4 тома, Женева, 1750.

[2]) Ср., в частности, Rayleigh, Scientific papers, Cambridge, University Press, т. I, 1901, стр. 232—237.

действия силы только в направлении какой-нибудь другой координаты q_i, тождественно с аналогичным изменением, которое испытывала бы координата q_i, если бы система подвергалась действию такой же силы только в направлении q_k.

Для иллюстрации этой теоремы в схематически наиболее простом случае рассмотрим систему с двумя степенями свободы, обладающую некоторым запасом внутренней энергии Ω. Пусть эта система осуществлена, например, посредством упругих приспособлений и притом так, что если значения соответствующих лагранжевых параметров интерпретировать как декартовы координаты x, y некоторой точки на плоскости, то внутренняя энергия такой изображающей точки получится от некоторой силы с составляющими $-\omega_1^2 x$, $-\omega_2^2 y$ и, следовательно, будет иметь вид

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2).$$

Обращаясь теперь к этому изображению системы как точки на плоскости, представим себе силу величины F, приложенную к точке в направлении единичного вектора $\boldsymbol{u}$ с направляющими косинусами α, β, и пусть $\boldsymbol{v}$ — единичный вектор, нормальный к вектору $\boldsymbol{u}$ и ориентированный относительно него так же, как ось y ориентирована относительно оси x. Под действием этой добавочной силы точка, предполагаемая вначале в естественном положении (т. е. в начале координат), сместится и примет новое положение равновесия, определяемое равенствами

$$\omega_1^2 x = F\alpha, \qquad \omega y_2^2 = F\beta;$$

только тогда, когда добавочная сила направлена по одной из осей ($\alpha = 1$, $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, $\beta = 1$), смещение произойдет в том же самом направлении. Теорема взаимности утверждает, что если сила F действует по направлению какого-нибудь единичного вектора $\boldsymbol{u}$, то нормальная составляющая смещения (по $\boldsymbol{v}$) будет равна соответствующей нормальной составляющей по $\boldsymbol{u}$ смещения, возникающего в том случае, если бы сила F действовала по $\boldsymbol{v}$.

Следует заметить, что та же теорема взаимности справедлива также и в случае непрерывных систем с бесконечным числом степеней свободы; очень наглядную иллюстрацию теоремы в этом случае мы получим, рассматривая упругую пластинку, закрепленную по горизонтальному контуру. Если к внутренней точке P прикладывается нагрузка, то пластинка изгибается, и любая ее точка Q испытывает некоторое вертикальное перемещение h. Если та же нагрузка будет приложена, наоборот, в Q, то точка P при соответствующем изгибе пластинки испытает, в свою очередь, вертикальное перемещение h.

10. Влияние добавочных консервативных сил и новых связей на смещение равновесия и вопросы устойчивости [1]). Возьмем снова систему п. 8, т. е. голономную систему с n степенями свободы, обладающую внутренней энергией $\Omega(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ и имеющую в конфигурации C^0 ($q_h=0$; $h=1, 2, \ldots, n$) свое естественное положение (действительный минимум Ω); поставим себе целью изучить смещение положения равновесия, которое испытывает система, если в дальнейшем она подвергается действию внешних сил и действию некоторого числа $l<n$ голономных, не зависящих от времени, связей

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, l), \tag{8}$$

не исключая, конечно, тех частных случаев, когда будет действовать только одно из этих двух возмущающих влияний.

Чтобы иметь возможность сделать некоторые интересные выводы, удобно здесь присоединить к предыдущим гипотезам следующие дополнительные предположения качественного характера.

Допустим прежде всего, что по второму дифференциалу можно заключить о действительном минимуме энергии Ω; тогда мы нашли бы, что квадратичная форма

$$A_0=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_h\,\partial q_k}\right)^0 q_h q_k,$$

к которой приводится в первом приближении эта энергия, является определенной положительной; если мы примем во внимание, что этот характер формы следует из некоторых неравенств, которым должны удовлетворять коэффициенты формы, то на основании непрерывности функции Ω можем заключить, что аналогичная форма A, в которой коэффициенты относятся к любой конфигурации C, близкой к C^0, останется определенной положительной в подходящей окрестности этого естественного положения.

С другой стороны, рассмотрим потенциал $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, производными от которого являются добавочные силы. Предположим, что, помимо обычных условий однозначности, конечности, непрерывности и дифференцируемости до второго порядка, потенциал имеет еще и то свойство, что его вторые производные остаются в окрестности конфигурации C^0 *достаточно малыми* по абсолютной величине. Так как эти вторые производные суть не что иное, как производные от лагранжевых составляющих $\frac{\partial U}{\partial q_h}$ добавочных сил, то предыдущее предположение равносильно допущению, что поле силы, в которое предполагается помещенной наша система,

[1]) Levi-Civita, Sullo spostamento dell'equilibrio, *Atti del R. Ist. Ven.*, т. 71, ч. II, 1911—1912, стр. 241—249.

в окрестности естественного положения C^0 системы является *почти однородным*.

Если, далее, построим квадратичную форму B от переменных q, имеющих коэффициентами вторые производные от U (вычисленные в любой конфигурации C), то из только что указанного предположения, очевидно, будет следовать, что, вычитая B из аналогичной формы A, мы получим форму $A-B$, которая наравне с первоначальной формой A остается определенной положительной, по крайней мере в некоторой окрестности I естественного положения C^0.

Перейдем теперь к отысканию смещения равновесия, являющегося следствием совместного действия силового поля с потенциалом U и связей (8). Для этой цели достаточно обратиться к общему уравнению статики (т. I, гл. XV, п. 9), на основании которого для равновесия необходимо и достаточно, чтобы при любом перемещении δq_h, совместимом со связями (8), исчезал первый дифференциал от $\Omega - U$

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial q_h} \delta q_h. \tag{9}$$

Если введем множители Лагранжа, то придем (т. I, гл. XV, § 7) к n уравнениям

$$\frac{\partial(\Omega - U)}{\partial q_h} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

образующим совместно с уравнениями (8) дополнительных связей систему, из которой достаточно исключить множители λ, чтобы получить уравнения относительно q, определяющие возможную конфигурацию C смещенного равновесия.

Не будем останавливаться здесь на разборе условий существования и единственности такой конфигурации. Допустим, что такая конфигурация существует и, более того, принадлежит к той окрестности I естественного положения системы, которую мы определили немного выше, и исследуем ее устойчивость.

Для того чтобы равновесие, смещенное к конфигурации C, определяемой уравнениями (8), (10), было устойчивым, достаточно, чтобы функция $\Omega - U$ имела в C действительный минимум по отношению к другим конфигурациям, совместимым со связями; это будет обеспечено, если будет существенно положительным второй дифференциал от $\Omega - U$, вычисленный, принимая во внимание уравнения (8). Если продифференцируем первый дефференциал (9) и примем во внимание, что нельзя прямо положить $\delta^2 q_h = 0$, так как

q надо рассматривать не как вполне независимые переменные, а как связанные уравнениями (8), то в первом приближении получим

$$\delta^2(\Omega - U) = A - B + \alpha;$$

здесь в квадратичной форме $A - B$ аргументами являются приращения δq, а коэффициентами — вторые производные от $\Omega - U$, вычисленные в конфигурации C, и для простоты положено

$$\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial q_h} \delta^2 q_h,$$

т. е. через α обозначен член, происходящий от добавочных связей. Если представим себе, что посредством l уравнений (8) связей исключено столько же переменных q или, более общим образом, если все переменные q выражены через $n - l = \nu$ независимых лагранжевых параметров $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$, то A, B, α станут тремя квадратичными формами от ν аргументов (оставшихся независимыми δq или произвольных приращений δr). Но в то время как форма $A - B$, которая была существенно положительной в n переменных δq, рассматривавшихся как независимые, очевидно, останется такой же и после только что указанного приведения числа ее степеней свободы к меньшему, о добавочном члене α, наоборот, ничего нельзя сказать заранее, так как, вообще говоря, остается сомнительным, будет ли смещенное равновесие устойчивым или неустойчивым; напротив, мы увидим на одном примере в ближайшем пункте, что может представиться как та, так и другая возможность.

Однако предыдущие рассуждения прямо приводят к определению одного случая, в котором устойчивость смещенного равновесия оказывается обеспеченной; это именно будет тот случай, когда вместе с исчезновением всех $\delta^2 q_h$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ исчезает и член α, так что $\delta^2(\Omega - U)$ приводится к определенной квадратичной форме $A - B$.

Это, в частности, будет иметь место, если добавочные связи (8) представляются линейными уравнениями (даже и неоднородными) относительно q, потому что такими же будут и выражения l координат q из них через остальные $n - l = \nu$; если исчезают вторые дифференциалы этих последних ν независимых переменных q, то исчезают также и вторые дифференциалы первых l переменных, которые являются линейными функциями от остальных.

Таким образом, мы пришли к следующей теореме: *состояние равновесия, принимаемое системой вблизи ее конфигурации минимума внутренней энергии, при одновременном действии почти однородного силового поля и линейных связей, будет всегда устойчивым.*

Частный тип линейных связей (вообще говоря, неоднородных), мы будем иметь, давая определенные значения некоторым из координат q, например первым l, что равносильно заданию l из n элементарных перемещений, переводящих систему из конфигурации C^* в ту, которая будет новой конфигурацией равновесия.

Если внешние силы не действуют ($U = \text{const}$), то мы можем утверждать, что (наравне с $\Omega - U$) ***внутренняя энергия Ω в конфигурации C, в которой снова устанавливается равновесие, если l элементарных перемещений заданы наперед, имеет минимум по сравнению со всеми другими конфигурациями, возможными при произвольных $(n-l)$ элементарных перемещениях.***

11. Пример. Для иллюстрации предыдущих общих рассуждений обратимся к случаю, уже указанному в п. 9, системы с двумя степенями свободы, изображаемой посредством одной точки P, движущейся по плоскости; уточним допущенные там предположения, полагая, что сила, от которой происходит внутренняя энергия, является типичной восстанавливающей силой, притягивающей точку к началу O, с компонентами $-\omega^2 x$ $-\omega^2 y$, так что имеем

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$

Здесь, при отсутствии связей и других сил, точка O есть положение устойчивого равновесия.

Рассмотрим смещение равновесия, которое определится в случае, когда при отсутствии внешних сил ($U = \text{const}$) вводится связь; сначала речь будет идти о линейной связи, т. е. точка P вынуждена будет оставаться на прямой (не проходящей через O). Основание M перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, очевидно, представляет новое положение равновесия; и так как из всех точек прямой M является ближайшей к O, то внутренняя энергия Ω принимает в ней минимальное значение по сравнению со всеми положениями, совместимыми со связью, и равновесие будет все еще устойчивым.

Наоборот, в общем случае, когда точка P вынуждена оставаться на какой-нибудь линии L (отличной от прямой), легко видеть, что смещенное равновесие может оказаться неустойчивым.

Чтобы составить себе наглядное представление, начнем с произвольного закрепления точки M (отличной от O) и обозначим через γ окружность с центром в O, проходящую через M; возьмем кривую L, касательную к γ в точке M, и предположим, единственно с целью сократить рассуждения, что радиус кривизны кривой L в точке M будет отличен от OM; это равносильно допущению, что в непосредственной близости от M кривая L является целиком внешней или целиком внутренней по отношению к окружности γ.

Как в том, так и в другом случае точка M будет точкой положения равновесия; но тогда как в первом случае это равновесие, очевидно, будет устойчивым (как и в случае прямой), наоборот, во втором случае оно будет неустойчивым, даже если смещение будет очень малым, т. е. если точка M будет сколь угодно близка к точке O.

Наконец, к тому же заключению мы придем также и аналитическим путем, применяя общий критерий предыдущего пункта. В самом деле, представим себе, что уравнение связи выражает y как функцию от x (правильную в окрестности начала) в виде

$$y = a + bx + cx^2 + \dots,$$

при постоянных a, b, c, ... Отсюда получим

$$\delta y = (b + 2cx + \dots)\,\delta x, \quad \delta^2 y = (2c + \dots)\,\delta x^2,$$

где опущенные члены содержат по крайней мере x^2 в выражении δy и, следовательно, по крайней мере x в выражении $\delta^2 y$; поэтому квадратичная форма, которая должна быть рассмотрена, будет определена, по крайней мере до членов, содержащих множителем x, посредством равенства

$$\delta^2\Omega = \omega^2 (\delta x^2 + \delta y^2 + y\delta^2 y) = \omega^2 (1 + b^2 + ac + \dots)\,\delta x^2.$$

Поэтому, если допустить, что смещение равновесия является достаточно малым (и, следовательно, такой же будет абсцисса x нового положения равновесия), то критерий для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости будет даваться знаком трехчлена $1 + b^2 + ac$. Для линейной связи c равно нулю, и, следовательно, мы будем иметь устойчивость, каково бы ни было значение a (а не только значение b); тогда как, наоборот, в общем случае, как бы ни было мало a, т. е. как бы близко от начала ни проходила кривая L, всегда можно приписать коэффициенту c такие значения, что трехчлен будет отрицательным и, следовательно, смещенное положение равновесия будет неустойчивым.

§ 3. Малые колебания голономной системы в окрестности одной из ее конфигураций устойчивого равновесия

12. Приведение двух квадратичных форм к каноническому виду. Начнем с повторения следующей теоремы из алгебры *). Пусть даны две квадратичные формы с n переменными

$$A = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk} z_h z_k, \qquad B = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} z_h z_k;$$

*) См., например, Бохер М., Введение в высшую алгебру, 1933; Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 1946; Окунев А. Я., Высшая алгебра, 1949. (*Прим. ред.*)