Как в том, так и в другом случае точка M будет точкой положения равновесия; но тогда как в первом случае это равновесие, очевидно, будет устойчивым (как и в случае прямой), наоборот, во втором случае оно будет неустойчивым, даже если смещение будет очень малым, т. е. если точка M будет сколь угодно близка к точке O.

Наконец, к тому же заключению мы придем также и аналитическим путем, применяя общий критерий предыдущего пункта. В самом деле, представим себе, что уравнение связи выражает y как функцию от x (правильную в окрестности начала) в виде

$$y = a + bx + cx^2 + \dots,$$

при постоянных a, b, c, ... Отсюда получим

$$\delta y = (b + 2cx + \dots)\,\delta x, \quad \delta^2 y = (2c + \dots)\,\delta x^2,$$

где опущенные члены содержат по крайней мере x^2 в выражении δy и, следовательно, по крайней мере x в выражении $\delta^2 y$; поэтому квадратичная форма, которая должна быть рассмотрена, будет определена, по крайней мере до членов, содержащих множителем x, посредством равенства

$$\delta^2\Omega = \omega^2(\delta x^2 + \delta y^2 + y\delta^2 y) = \omega^2(1 + b^2 + ac + \dots)\,\delta x^2.$$

Поэтому, если допустить, что смещение равновесия является достаточно малым (и, следовательно, такой же будет абсцисса x нового положения равновесия), то критерий для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости будет даваться знаком трехчлена $1 + b^2 + ac$. Для линейной связи c равно нулю, и, следовательно, мы будем иметь устойчивость, каково бы ни было значение a (а не только значение b); тогда как, наоборот, в общем случае, как бы ни было мало a, т. е. как бы близко от начала ни проходила кривая L, всегда можно приписать коэффициенту c такие значения, что трехчлен будет отрицательным и, следовательно, смещенное положение равновесия будет неустойчивым.

§ 3. Малые колебания голономной системы в окрестности одной из ее конфигураций устойчивого равновесия

12. Приведение двух квадратичных форм к каноническому виду. Начнем с повторения следующей теоремы из алгебры *). Пусть даны две квадратичные формы с n переменными

$$\mathrm{A} = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk} z_h z_k, \qquad \mathrm{B} = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} z_h z_k;$$

*) См., например, Бохер М., Введение в высшую алгебру, 1933; Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 1946; Окунев А. Я., Высшая алгебра, 1949. (*Прим. ред.*)

обозначая через ρ некоторый параметр, рассмотрим алгебраическое уравнение степени n относительно ρ

$$\| \beta_{hk} - \rho \alpha_{hk} \| = 0, \tag{11}$$

которое получается, если мы приравняем нулю дискриминант квадратичной формы $\mathrm{B} - \rho\mathrm{A}$. Если форма A является определенной положительной, то корни этого уравнения все будут действительными (не необходимо различными); обозначим эти корни через ρ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Существует по крайней мере одно линейное преобразование (не вырожденное) с действительными коэффициентами, посредством которого можно представить z_h в виде некоторых линейных однородных комбинаций n таких новых переменных x_i, что обе данные формы примут соответственно вид:

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2.$$

13. Нормальные координаты. Главные колебания и главные частоты. После этого отступления обратимся, как в п. 4, к голономной системе S с n степенями свободы, находящейся под действием консервативных сил с потенциалом U, и рассмотрим конфигурацию C^0 устойчивого равновесия, предполагая, что действительный максимум функции U в C^0 будет общего типа, т. е. о его существовании можно судить на основании рассмотрения местных значений одних только вторых производных функций U.

Мы знаем, что если это состояние равновесия возмущено достаточно мало, то система благодаря устойчивости равновесия в C^0 будет двигаться неопределенно долго в непосредственной близости от этой конфигурации; изучим здесь характер этого движения.

Можно предположить прежде всего, что аддитивная постоянная выбрана так, чтобы потенциал U в C^0 был равен нулю. С другой стороны, вследствие предположения о равновесии (или о максимуме функции U), будут равны нулю также и все первые производные от потенциала; поэтому, разлагая эту функцию по формуле Тэйлора в окрестности конфигурации C^0 и полагая для краткости

$$q_h - q_h^0 = z_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

будем иметь

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \right)^0 z_h z_k + \ldots$$

Во всяком движении, достаточно близком к состоянию равновесия, z_h вместе с их производными $\dot{q}_h$ останутся сколь угодно малыми, так что в силу этого в предыдущем разложении функции U можно пренебречь, по сравнению с написанными членами второго порядка относительно z, всеми опущенными членами, которые будут более высокого порядка; аналогично и в выражении живой силы

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k$$

вместо коэффициентов a_{hk}, зависящих исключительно от q, можно подставить числовые значения $a^0{}_{hk}$, соответствующие конфигурации равновесия C^0, и написать

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}} a^0{}_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k. \tag{12}$$

Полагая временно

$$a^0{}_{hk}=\alpha_{hk}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h\,\partial q_k}\right)^0=\beta_{hk},$$

рассмотрим две квадратичные формы:

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}\alpha_{hk}z_h z_k, \qquad \frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}\beta_{hk}z_h z_k, \tag{13}$$

первая из которых, как и живая сила, из которой она получается путем подстановки z вместо $\dot{q}$, является определенной положительной. Поэтому существует (предыдущий пункт) по крайней мере одно невырожденное линейное однородное преобразование, в результате которого переменные z_h заменяются линейными однородными функциями с постоянными действительными коэффициентами от новых n переменных x_i, после чего две формы (13) соответственно перейдут в следующие:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2, \tag{13'}$$

где ρ_i суть действительные постоянные. Так как мы допускаем, что максимум функции U — общего типа, то можем прибавить, что вторая из форм (13), вследствие самого ее происхождения, и, следовательно, вторая из форм (13') является *определенной отрицательной*, так что все ρ_i *будут необходимо отрицательными*.

Положив теперь

$$\rho_i=-\omega_i^2 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

заключаем, что потенциал U в окрестности C^0, по крайней мере с точностью до членов порядка выше второго, принимает вид

$$U=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 x_i^2. \tag{14}$$

Что касается живой силы, то заметим, что вследствие предположения $z_h = q_h - q_h^0$ $(h=1, 2, \ldots, n)$ и благодаря постоянным значениям коэффициентов линейного преобразования переменных z к переменным x то же преобразование дает переход от $\dot{q}$ к $\dot{x}$, так что тем же самым способом, каким первая из форм (13) преобразуется в первую из форм (13'), выражение (12) живой силы преобразуется в следующее:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2. \tag{15}$$

Это выражение и будет представлять, по крайней мере до членов порядка выше второго, живую силу нашей системы для состояния движения, близкого к состоянию равновесия в C^0.

Переменные x_i, для которых потенциал и живая сила системы вблизи состояния устойчивого равновесия принимают соответственно формы (14), (15), называются нормальными координатами (относительно этого состояния равновесия).

Далее, в этих нормальных координатах функция Лагранжа рассматриваемого нами движения определится равенством (предыдущая глава, п. 40)

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2),$$

так что соответствующие уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, мы видим, что во всяком движении голономной системы (со связями без трения) в непосредственной близости от конфигурации устойчивого равновесия (общего типа) каждая из нормальных координат x_i изменяется по гармоническому закону.

Приписав индексу i какое-нибудь одно из значений от 1 до n, рассмотрим то частное колебательное движение системы, в котором x_i изменяется гармонически с частотой $\omega_i/2\pi$, в то время как остальные $n-1$ нормальных координат x_j (при $j \gtrless i$) остаются постоянно равными нулю. Эти n простых гармонических независимых колебаний, определенных в соответствии с n значениями индекса i, называются *главными колебаниями*. Очевидно, что наиболее общее колебательное движение системы в окрестности конфигурации рассматриваемого устойчивого равновесия можно представить себе получающимся посредством наложения или *сложения* этих n главных колебаний. Следовательно, нормальное выражение (15) для T показывает, что живая сила колебаний в общем случае равна сумме живых сил составляющих главных колебаний.

Частоты $\frac{\omega i}{2\pi}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ этих составляющих колебаний называются *главными*; самая низшая частота (т. е. та, которая дает самый низкий звук, если колебание соответствует акустическому явлению) носит название ***основной частоты или основного тона***, тогда как другие, расположенные в возрастающем порядке, называются соответственно *первой, второй,* ... ***гармониками*** системы.

Полученные результаты оправдывают в этом случае то общее замечание (т. I, гл. II, п. 34), что все явления незатухающего колебательного характера по существу можно анализировать посредством независимых гармонических движений.

Естественно, что после того, как получено общее решение уравнений малых колебаний в нормальных координатах в виде

$$x_i = r_i \cos(\omega_i t + \theta_i^0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где r_i и θ_i^0 обозначают $2n$ постоянных интеграции (из которых первые n во всех случаях можно предполагать положительными), надо возвратиться к выражениям того же общего решения в первоначальных координатах q, принимая во внимание линейную подстановку, связывающую эти q с x. Если такая подстановка определяется равенствами

$$q_h = q_h^0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{hi} x_i \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

то непосредственно находим

$$q_h = q_h^0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{hi} r_i \cos(\omega_i t + \theta_i^0) \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где q^0 и γ суть вполне определенные постоянные, зависящие от природы колеблющейся системы, а r и θ — постоянные интегрирования.

Для приложений важно заметить, что не всегда удобно приводить живую силу и потенциал к каноническим формам (14), (15), но весьма существенно, чтобы в выражениях T и U исчезали все члены с произведениями координат, т. е. чтобы T и U были приведены к виду

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \dot{y}_i^2, \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2.$$

В этом случае главные частоты определяются из соотношений

$$\omega_i^2 = -\frac{b_i}{a_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

что можно видеть непосредственно или составляя соответствующие уравнения Лагранжа $a_i\ddot{y}_i - b_i y_i = 0$, или представляя себе, что не y_i, а $y_i/\sqrt{a_i}$ являются нормальными координатами. Общее решение уравнений малых колебаний и в координатах y_i приводит для каждой из них к гармоническому движению; по этой причине иногда также называют *нормальными* такие координаты, которые, как y_i, придают T и U одновременно ортогональную форму.

14. Вынужденные колебания. Как и в случае системы с одной степенью свободы (гл. I, п. 59), обычно называют *вынужденными колебаниями* какой-нибудь голономной системы в окрестности конфигурации устойчивого равновесия колебания, определяющиеся совместным действием консервативных сил, к которым относится состояние равновесия, и добавочных сил, например периодических.

Оставляя рассмотрение общего вопроса для упражнений (см., в частности, упражнения 19 и 20), ограничимся здесь утверждением, что мы встретимся с явлениями, аналогичными тем, которые были изучены в случае задач одного измерения (периоды вынужденных колебаний, затухания колебаний, резонанс и т. д.). Естественно, мы встретим более разнообразные случаи, а формальные выкладки, по необходимости, будут более пространными [1]).

Можно прибавить еще, что так как мы ограничились наложением на консервативные силы только периодически действующих сил (функций только времени), то мы получим случай, аналогичный тому идеальному случаю незатухающих колебаний, которым мы занимались, в предположении только одной степени свободы, в п. 64 гл. I.

15. Теоремы Рэлея. Рэлей [2]) исследовал, как изменяются главные частоты в материальной системе, колеблющейся вокруг одной из своих конфигураций устойчивого равновесия, и, в частности, как изменяется основная частота, когда:

а) накладываются новые связи (само собой разумеется, так, чтобы не исключалась конфигурация рассматриваемого равновесия);

б) увеличиваются массы, составляющие систему;

---

[1]) См., например, Рэлей, Теория звука, 1941, т. I, гл. IV, V.

[2]) Рэлей (J. W. Strutt) родился в Лангфорд Грове (Эссекс) в 1842 г., умер в Витгеме в 1919 г. В 1879 г. заместил Максвелла по кафедре физики в Кембридже и в 1887 г. перешел в Королевский институт в Лондоне. Один из крупнейших английских физиков. Особенно известны его труды по оптике и акустике. Его многочисленные работы охватывают все математическое естествознание — от математики до химии. Вспомним, например, его исследования по гидродинамике, по капиллярности, по статистической механике, труды по электрометрологии, объяснение окраски неба, открытие вместе с Рамзеем аргона. Его сочинения собраны в семи томах.

в) увеличивается потенциальная энергия — U.

В случае „б" можно в более общем смысле говорить о том, что увеличивается инерция системы. Что же касается предположения „в", то его можно выразить также, говоря, что увеличивается емкость системы по отношению к энергии *). Чтобы дать себе отчет в этом способе выражения, вспомним, что в окрестности конфигурации C^0 устойчивого равновесия работа

$$L_{CC'} = U_{C'} - U_C,$$

которую совершают действующие силы, когда система переходит из одной определенной конфигурации C в любую другую C', достигает своего максимума тогда и только тогда, когда конфигурация C' совпадает с C^0; это максимальное значение определяется равенством

$$L_{CC^0} = U_{C^0} - U_C.$$

Поэтому достаточно представить себе, что мы можем распорядиться аддитивной произвольной постоянной так, чтобы $U_{C^0} = 0$, чтобы убедиться, что потенциальная энергия — U_C, вычисленная в любой конфигурации C (в окрестности C^0), измеряет *максимум работы*, которую *способна* совершить система, исходя из этой конфигурации.

Рассмотрим сначала случай „а"; чтобы сделать изучение более простым, обратимся к геометрическому представлению, рассматривая нормальные координаты x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, как декартовы прямоугольные координаты линейного пространства n измерений S_n. В этом пространстве эквипотенциальные поверхности

$$-2U = \sum_{=1}^{n} \omega_i^2 x_i^2 = \text{const}$$

составляют семейство эллипсоидов, гомотетичных между собой относительно общего центра O; рассмотрим ту из этих поверхностей, уравнение которой имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i^2}{4\pi^2} x_i^2 = 1,$$

т. е. эллипсоид E, имеющий полуосями периоды $2\pi/\omega_i$ (обратные частотам) главных колебаний. Если представим себе, что индексы приписываются различным частотам так, чтобы

$$\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n,$$

*) Или, как еще можно сказать, увеличивается „жесткость" системы. (*Прим. ред.*)

т. е. таким образом, чтобы $\omega_1/2\pi$ являлась основной частотой и $\omega_2/2\pi$, $\omega_3/2\pi$, ... составляли соответственно первую, вторую, ... гармоники, то максимальное расстояние точек поверхности E от центра определяется, как известно, основным периодом $2\pi/\omega_1$. Условившись в этом, допустим, согласно предположению „а", что увеличивается число связей системы наложением $p<n$ новых голономных связей, которые, естественно, удовлетворяются в конфигурации равновесия C^0 ($x_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$). В непосредственной близости от C^0 и в принятом нами порядке приближения эти связи, выраженные в нормальных координатах, будут представлены p линейными независимыми уравнениями, обязательно однородными, так как эти уравнения должны удовлетворяться величинами $x_i=0$. В пространстве S_n эти p уравнений определяют линейное пространство $n-p$ измерений S_{n-p}, проходящее через O, так что, в то время как с самого начала возможные для системы конфигурации представлялись всеми точками (достаточно близкими к началу) пространства n измерений S_n, добавление новых p связей ограничивает изменение положения изображающей точки указанным выше пространством S_{n-p}.

Чтобы лучше уяснить это рассуждение, обратимся к случаю, доступному для непосредственного представления, $n=3$, $p=1$, в котором речь идет об эллипсоиде E в пространстве S_3 трех измерений, с центром в начале и имеющем полуоси $\frac{2\pi}{\omega_1} \geqslant \frac{2\pi}{\omega_2} \geqslant \frac{2\pi}{\omega_3}$; в то же время изображающее пространство новой связи сводится к плоскости S_2, проходящей через начало.

Эта плоскость пересекает эллипсоид E по некоторому эллипсу E'; новый основной период и период единственной оставшейся гармоники, после добавления последней связи, определяются соответственно максимумом и минимумом расстояния точек кривой E' от O, т. е. двумя полуосями этого эллипса. Первая теорема Рэлея представляет собой прямое истолкование того геометрического факта, что большая полуось E' всегда заключена (включая концы) между максимальной $2\pi/\omega_1$ и средней $2\pi/\omega_2$ полуосями эллипсоида E.

Чтобы убедиться в этом последнем утверждении, заметим, что, в то время как большая полуось эллипса E' не может быть больше максимальной полуоси $2\pi/\omega_1$ эллипсоида E, сечением которого является E', диаметральная плоскость S_2 всегда пересекает по некоторой прямой главную плоскость x_1x_2 двух полуосей максимальной $2\pi/\omega_1$ и средней $2\pi/\omega_2$ эллипсоида E, так что полудиаметр эллипса E', лежащий на этой прямой (и, следовательно, тем более его большая полуось), не может оказаться меньше $2\pi/\omega_2$. Важно добавить, что оба крайние значения $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_2$ большой полуоси E' действительно могут быть достигнуты при подходящем выборе секущей плоскости S_2 (т. е., механически, новой связи); первое значение будет достигнуто всякий раз, когда плоскость S_2 пройдет через наибольшую полуось эллипсоида E, второе — всякий раз, когда S_2 пройдет через среднюю полуось и будет лежать внутри того двугранного угла, образованного двумя диаметральными плоскостями круговых сечений эллипсоида E, который содержит малую полуось.

Аналогичным образом рассуждают и в общем случае $p<n$ новых связей, наложенных на колеблющуюся материальную систему с n степенями свободы. Здесь изображающее пространство S_{n-p} новой системы связей пересекает эллипсоид E по эллипсоиду E' ($n-p-1$ измерений), имеющему $n-p$ главных полуосей (периоды нового основного тона и $n-p-1$ оставшихся гармоник). Максимальная полуось E' (период нового основного тона) не может, очевидно, превосходить максимальную полуось $2\pi/\omega_1$ эллипсоида E, тогда как, с другой стороны, S_{n-p} пересекает всегда главное пространство S_{p+1} $p+1$ измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, определенное первыми $p+1$ полуосями $\frac{2\pi}{\omega_1} \geqslant \frac{2\pi}{\omega_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{2\pi}{\omega_{p+1}}$ эллипсоида E, по диаметральной прямой эллипсоида E', а длина соответствующего полудиаметра (и, следовательно, тем более максимальная полуось эллипсоида E') не может быть меньше $2\pi/\omega_{p+1}$.

Если примем во внимание, что оба крайних значения $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_{p+1}$ максимальной полуоси могут быть действительно достигнуты путем надлежащего выбора секущего пространства S_{n-p} (т. е. пространства новых связей), то придем, беря частоты вместо периодов, *к первой теореме Рэлея*:

В материальной системе с n степенями свободы, колеблющейся около конфигурации устойчивого равновесия, добавление $p<n$ голономных связей, не будучи в состоянии понизить основной тон, не может и поднять его выше частоты $\frac{\omega_{p+1}}{2\pi}$, принадлежащей $(p+1)$-ой гармонике.

Прибавим к этому, что геометрическое рассмотрение, аналогичное только что изложенному, позволяет видеть, что *из других $n-p-1$ главных частот (или гармоник) новой колеблющейся системы γ-ая, при $\gamma \leqslant n-p-1$, будет всегда заключена (включая концы) между $\frac{\omega_{\gamma+1}}{2\pi}$ и $\frac{\omega_{\gamma+p+1}}{2\pi}$.*

Перейдем теперь к случаям „б“ и „в“, которые можно рассматривать почти одновременно. Здесь опять удобно обратиться к алгебраическим соображениям п. 12 и вспомнить, что когда имеются две квадратичные формы A и B от n переменных z_h ($h=1, 2, \ldots, n$), из которых A — определенная положительная, то отношение B/A, как бы ни изменялись z, за исключением $z_h=0$, остается всегда заключенным между наибольшим и наименьшим из корней уравнения (11) [1]). Если теперь представим себе, что A увеличивается в том смысле, что она заменяется формой A′ с коэффициентами, измененными так, что соответственно одним и тем же значениям (не равным нулю одновременно) переменных всегда имеем $A' > A$, то очевидно, что как максимум, так и минимум отношения B/A могут только уменьшиться; и, наоборот, они могут только увеличиться, если увеличивается B.

Отождествим теперь, как в п. 13, форму A с живой силой T колеблющейся системы (за исключением только замены переменных $\dot{x}$ через x), а форму B — с потенциальной энергией — U; вследствие этого корни уравнения (11) можно отождествить с $\rho_i = -\omega_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Если у всех материальных точек системы или даже только у некоторых из них возрастает масса, то увеличится, при прочих равных условиях, $A = T$ в смысле, разъясненном выше, так

---

[1]) Так как речь идет о хорошо известной теореме, не бесполезно напомнить ее доказательство. Представим себе, что вместо первоначальных переменных z подставлены те их линейные комбинации x, которые мы назвали нормальными координатами (пп. 13, 14) и в которых обе квадратичные формы принимают канонический вид

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad B = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2,$$

где ρ_i обозначают корни уравнения (11); введем отношения

$$\alpha_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

представляющие собой обычное обобщение, для n переменных, направляющих косинусов ориентированной прямой, для которых существует тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{B}{A} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \alpha_i^2,$$

или, принимая во внимание только что упомянутое тождество

$$\frac{B}{A} = \rho_1^2 + \sum_{i=1}^{n} (\rho_i - \rho_1)\alpha_i^2 = \rho_n^2 - \sum_{i=1}^{n} (\rho_n - \rho_i)\alpha_i^2;$$

отсюда непосредственно следует, что если ρ_1, ρ_n суть соответственно минимум и максимум ρ_i, то

$$\rho_1 \leq \frac{B}{A} \leq \rho_n.$$

что мы будем иметь теорему Рэлея: *увеличение инерции в колеблющейся системе может только уменьшить ее основную частоту и частоту последней гармоники.*

Этому предложению можно дать более общую форму, так как тот же самый эффект от увеличения инерции распространяется и на всякую другую из остальных главных частот.

Это выводится из естественного обобщения только что использованного алгебраического замечания, в силу которого, обращаясь к геометрическому рассмотрению, изложенному в начале этого пункта, мы увидим, что также и промежуточные корни уравнения (11) приобретают характер абсолютных максимумов после введения $1, 2, \ldots, n-2$ связей.

Наоборот, если представим себе, что увеличивается потенциальная энергия $\mathrm{B} = -V$, то можно заключить, что *увеличение емкости системы по отношению к энергии* *) *повышает или, по крайней мере, не понижает отдельных главных частот колеблющейся системы.*

§ 4. Устойчивые решения системы дифференциальных уравнений

16. Безусловная устойчивость или устойчивость по Дирихле. Как уже указывалось в п. 7, мы предполагаем распространить здесь понятие об устойчивости со случая состояний равновесия (§ 1) на случай явлений движения. При этом для более широкой применимости результатов рассмотрим вопрос в наиболее общей и абстрактной форме.

Предположим, что данный процесс определяется в любой момент посредством известного числа n произвольных и независимых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$; пусть эти параметры имеют геометрическую, кинематическую или другую, более свойственную данному процессу природу [5]. Предположим далее, что закон, по которому эти параметры изменяются с временем, определяется известной нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_h}{dt} = X_h(x|t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

где X_h в правой части обозначают n известных функций от аргументов x и t, обладающих всеми теми свойствами непрерывности и правильности, которые в состоянии обеспечить для системы (16), по крайней мере в некоторой области, существование и единственность решений, удовлетворяющих произвольно заданным начальным условиям.

*) Увеличение „жесткости" системы. (*Прим. ред.*)