что мы будем иметь теорему Рэлея: *увеличение инерции в колеблющейся системе может только уменьшить ее основную частоту и частоту последней гармоники.*

Этому предложению можно дать более общую форму, так как тот же самый эффект от увеличения инерции распространяется и на всякую другую из остальных главных частот.

Это выводится из естественного обобщения только что использованного алгебраического замечания, в силу которого, обращаясь к геометрическому рассмотрению, изложенному в начале этого пункта, мы увидим, что также и промежуточные корни уравнения (11) приобретают характер абсолютных максимумов после введения $1, 2, \ldots, n-2$ связей.

Наоборот, если представим себе, что увеличивается потенциальная энергия $B=-V$, то можно заключить, что *увеличение емкости системы по отношению к энергии* *) *повышает или, по крайней мере, не понижает отдельных главных частот колеблющейся системы.*

§ 4. Устойчивые решения системы дифференциальных уравнений

16. Безусловная устойчивость или устойчивость по Дирихле. Как уже указывалось в п. 7, мы предполагаем распространить здесь понятие об устойчивости со случая состояний равновесия (§ 1) на случай явлений движения. При этом для более широкой применимости результатов рассмотрим вопрос в наиболее общей и абстрактной форме.

Предположим, что данный процесс определяется в любой момент посредством известного числа n произвольных и независимых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$; пусть эти параметры имеют геометрическую, кинематическую или другую, более свойственную данному процессу природу [5]. Предположим далее, что закон, по которому эти параметры изменяются с временем, определяется известной нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_h}{dt}=X_h(x|t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

где X_h в правой части обозначают n известных функций от аргументов x и t, обладающих всеми теми свойствами непрерывности и правильности, которые в состоянии обеспечить для системы (16), по крайней мере в некоторой области, существование и единственность решений, удовлетворяющих произвольно заданным начальным условиям.

*) Увеличение „жесткости" системы. (*Прим. ред.*)

Обратимся здесь, так же как и в предыдущем пункте, к геометрическому представлению, рассматривая переменные как прямоугольные декартовы координаты в n-мерном пространстве S_n; как и в п. 2, назовем „отклонением" двух точек x', x'' максимум абсолютных величин $|x'_h - x''_h|$ разностей одноименных координат.

В этом пространстве S_n всякое частное решение σ

$$x_h = x_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

системы (16), т. е. всякое частное явление, определяемое этим элементарным законом, будет представлено одной определенной *интегральной кривой*; в силу упомянутых выше теорем существования и единственности, через всякую точку P_0 пространства S_n (или, по крайней мере, через всякую точку той области, в которой функции X_h удовлетворяют условию правильности), принятую за начальную, проходит одна и только одна такая кривая, так что пространство S_n (или указанная выше область) будет покрыто системой ∞^{n-1} (или конгруэнцией) интегральных кривых — изображений различных явлений, определяемых уравнениями (16).

Иногда приходится фиксировать внимание на частном решении $\bar{\sigma}$, определяемом некоторыми начальными значениями $x_h = \bar{x}_h^0$ координат при $t = t_0$, и сравнивать его с решениями σ, которые вначале близки к $\bar{\sigma}$. Если удастся установить, что все решения σ, которые получаются в результате небольшого начального возмущения, остаются при безграничном возрастании времени в непосредственной близости к $\bar{\sigma}$, то можно сказать, что общий ход явления, описываемый уравнениями (16), характеризуется одним только решением $\bar{\sigma}$, по крайней мере для некоторой области начальных данных. Решение $\bar{\sigma}$, однако, не будет характеризовать в этом смысле ход явления, если, при самом незначительном начальном возмущении, решение σ с возрастанием времени в конце концов будет значительно отличаться от $\bar{\sigma}$.

Все это оправдывает разделение решений системы дифференциальных уравнений (16) на *устойчивые* и *неустойчивые* на основании критерия, который мы здесь уточним, высказав его прямо в геометрически-кинематической форме. Частное решение (или интегральная кривая) уравнений (16), которое в момент $t = t_0$, принятый за начальный, проходит через точку $\bar{P}_0(\bar{x}_0)$, называется *устойчивым*, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое другое положительное число η, что если взять за начальную какую-нибудь другую точку $P_0(x_0)$, отклонение которой от $\bar{P}_0$ меньше η, то отклонение точек $\bar{P}$ и P друг от друга на кривых $\bar{\sigma}$ и σ для одного и того же момента времени будет неопределенно долго оставаться меньшим ε.

Для избежания недоразумений необходимо лучше выяснить смысл и свойства этого последнего условия, заключающегося в том, что отклонение точек $\overline{P}$ и P друг от друга остается *неопределенно долго* меньше ε. Если ограничиться сравнением решений $\overline{\sigma}$ и σ в промежутке времени T, хотя и большом, но вполне определенном, то всегда возможно (в тех условиях, в которых теоремы существования общих интегралов, имеющие силу при каком-нибудь t, обеспечивают им непрерывность в отношении произвольных постоянных) при всяком ε поставить ему в соответствие начальное отклонение η, достаточно малое, для того чтобы во всяком интервале времени от t_0 до t_0+T отклонение между точками в один и тот же момент времени оставалось меньше ε. Может, однако, случиться, что когда заставляют T возрастать до бесконечности, η будет стремиться к нулю (при всяком ε, заданном достаточно малым). Решение $\overline{\sigma}$ называется устойчивым, когда эта возможность исключена.

В ближайших главах мы дадим различные простые и наглядные примеры устойчивости движения.

Заметим, между прочим, что в динамических случаях, когда мы имеем голономные системы со связями, не зависящими от времени, находящиеся под действием консервативных (или даже только позиционных) сил, уравнения движения остаются неизменными при замене t на $-t$, т. е. все движения *обратимы*. Поэтому в таких случаях, как и в случаях равновесия, понятие устойчивости приложимо без ограничения времени, т. е. от наиболее отдаленного прошедшего до наиболее далекого будущего (при t, изменяющемся от $-\infty$ до $+\infty$). Но, как мы увидим далее, в некоторых случаях, в частности, когда входят силы *трения, вязкости* или вообще так называемые *диссипативные силы* (§ 7), движения оказываются необратимыми; тогда необходимо ограничиться для каждого отдельного движения разбором *устойчивости в будущем*, т. е. только при $t \geqslant 0$.

17. Обобщенная теорема Дирихле. В связи с содержанием предыдущего пункта мы обратим здесь внимание на одно замечание, которое само по себе не имеет большого значения, однако ценно в том отношении, что лучше выясняет, при сопоставлении, сущность теоремы Дирихле для динамических задач.

Предположим, что система (16) имеет интеграл (который может зависеть явно от t)

$$H(x|t) = \mathrm{const}$$

и что для некоторого статического решения $\overline{\sigma}$, т. е. такого решения, для которого соответствующие x_h приводятся к постоянным и, следовательно, сохраняют постоянно свои начальные значения $\overline{x}_h^0$, функция $H(x|t)$ имеет действительный максимум или минимум *при* *любом значении* t. В таком случае статическое решение $\bar{\sigma}$ *устойчиво* в том смысле, как это разъяснено в предыдущем пункте. Доказательство по смыслу тождественно с доказательством, которое мы дали теореме Дирихле в собственном смысле, поэтому мы ограничимся ссылкой на рассуждение п. 5 или, лучше, на синтетическое, интуитивное рассмотрение п. 6 [6].

Остановимся немного на сопоставлении теоремы Дирихле с этим ее обобщением. Мы должны допустить здесь, что 1) $x_h = x_h^0$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) является решением (статическим) уравнений (16) и 2) $H(\bar{x}^0|t)$ для $H(x|t)$ есть действительный максимум или минимум, каково бы ни было t. Оба эти предположения не зависят друг от друга и в общей их сложности являются весьма ограничительными.

Наоборот, в динамическом случае (теорема Дирихле в собственном смысле) предположение о том, что уравнения движения допускают статическое решение, т. е. что для системы существует конфигурация равновесия C^0, влечет за собой количественные условия (обращение в нуль первых производных от потенциала), необходимые для существования минимума полной энергии, так что для обеспечения действительного минимума не нужны сверх только что указанных количественных условий какие-либо другие, кроме чисто качественных. Можно сказать, что, в конце концов, большая важность теоремы Дирихле зависит от этого обстоятельства, которое *вообще* не встречается в случае какой угодно обобщенной лагранжевой системы.

Здесь сказано *вообще*, потому что, как это прямо вытекает из предыдущего рассуждения, указанное выше обстоятельство представится, помимо динамического случая, также и для обобщенных лагранжевых систем, для которых $\mathfrak{L}$ не зависит от времени; мы вернемся к этому в § 1 гл. X [7].

18. Приведенная устойчивость или устойчивость по Раусу[1]**.** Обращаясь к общему учению об устойчивости, добавим некоторые замечания, имея в виду приложения, которыми мы будем заниматься в ближайших главах.

Иногда случается, что между параметрами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяющими в любой момент какое-нибудь явление движения, некоторые параметры, например $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ($m < n$), выделяются среди остальных по своему значению в том смысле, что они одни достаточны для определения характерных черт хода явления. Когда

[1]) Е. Дж. Раус (Edwad John Routh) родился в Квебеке (Канада) в 1831 г., умер в Кэмбридже в 1907 г. Был преподавателем и экзаминатором и вел научную работу в Кэмбридже и Лондоне. Разработал вопросы, касающиеся линейной устойчивости (в смысле, который будет указан в п. 22) в его Essay on the stability of steady motion (Cambridge, 1877), премированном Кэмбриджским университетом. Ему принадлежит введение приведенной лагранжевой функции (гл. I, пп. 45, 46), называемой поэтому некоторыми авторами *функцией Рауса*.

исследуется устойчивость движения, то, как и раньше, сравнивают частное решение $\bar{\sigma}$ с каким-либо решением σ, близким к $\bar{\sigma}$ в начальный момент; в данном случае можно ограничиться рассмотрением одновременных отклонений для $\bar{\sigma}$ и σ только этих параметров $x_1, x_2, \ldots, x_m$, не принимая во внимание остальных.

Рассмотрим, например, особенно простое движение точки по заданной траектории при заданных силах, уравнение которого

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s}/t)$$

можно заменить нормальной системой первого порядка

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad \frac{d\dot{s}}{dt} = f(s, \dot{s}|t).$$

При сравнении частного движения $\bar{\sigma}$ и любого другого движения σ, определенных предыдущей системой, иногда может представить интерес вопрос о том, будут ли оставаться близкими скорости для одного и того же момента в том и другом движении, в то время как различие в положениях точек будет иметь небольшое значение или даже вовсе может не иметь значения. Так, в частности, если речь идет о двух равномерных движениях, естественно рассмотреть одно как тип или образец другого, когда соответствующие скорости почти равны; при этом можно отвлечься от того, что координаты точек в конце концов после длительного промежутка времени будут отличаться на сколь угодно большую величину, как бы мало ни было различие скоростей (лишь бы оно не равнялось нулю).

Во всех случаях, когда, руководствуясь соображениями устойчивости, можно или желательно ограничиться при рассмотрении отклонения частью характеристических параметров, мы будем говорить, что речь идет о *приведенной устойчивости* (или неустойчивости) или об *устойчивости по Раусу*; в противоположность этому мы назовем *безусловной устойчивостью* (или неустойчивостью), или *устойчивостью по Дирихле*, устойчивость, которой мы занимались в предыдущем пункте.

Отметим, наконец, что в некоторых случаях (главным образом в тех, в которых рассмотрение приведенной устойчивости ставится природой самого вопроса) „привилегированные" параметры x_1, x_2, …, x_m представляются уже отделенными от остальных в дифференциальной системе (16), поскольку эту систему можно разбить на две, первая из которых будет вида

$$\frac{dx_h}{dt} = X_h(x_1, x_2, \ldots, x_m|t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m), \qquad (16')$$

т. е. содержит только параметры x_1, x_2, …, x_m, а вторая

$$\frac{dx_{m+k}}{dt} = X_{m+k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-m) \qquad (16'')$$

выражает производные от $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ в функциях от всех параметров. Поэтому, когда путем интегрирования частичной системы (16') будут найдены $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$, дополнительную систему можно привести, в свою очередь, к системе только с $n-m$ остальными неизвестными x_{m+k} $(k=1, 2, \ldots, n-m)$.

Очевидно, что в этих случаях устойчивость (или неустойчивость) решений полной системы (16'), (16''), *приведенной к параметрам* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, будет тождественна с безусловной устойчивостью решений частичной системы (16') [8].

Некоторые интересные примеры на устойчивость этого типа мы встретим в ближайших главах.

§ 5. Малые колебания около устойчивого решения системы дифференциальных уравнений. Критерии неустойчивости

19. Уравнения в вариациях. Возьмем снова систему (16)

$$\frac{dx_h}{dt} = X_h(x|t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n)$$

и рассмотрим ее устойчивое решение $\bar{\sigma}$

$$\bar{x}_h = \bar{x}_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n);$$

представим уравнения какого-нибудь другого решения σ системы (16) в виде

$$x_h = \bar{x}_h(t) + \xi_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \quad (17)$$

где ξ_h обозначают n новых неизвестных функций.

Из самого определения устойчивости решения $\bar{\sigma}$ (п. 16) следует, что достаточно взять для σ начальные значения x^0 переменных x, достаточно близкие к одновременным значениям $\bar{x}^0$ решения $\bar{\sigma}$ (т. е. достаточно близкие к нулю начальные значения ξ^0 неизвестных ξ), для того чтобы функции ξ оставались *неопределенно* долго меньшими по абсолютной величине некоторого наперед заданного постоянного числа ε.

Если теперь в выражениях функций X в правых частях системы (16) мы будем рассматривать t как параметр и предположим, что самые функции X могут быть разложены в ряд Тэйлора по отношению к переменным $\xi = x - \bar{x}$, то, принимая во внимание уравнения (17), будем иметь

$$X_h = (X_h)_{x=\bar{x}} + \sum_{k=1}^{n} \xi_k \left(\frac{dX_k}{dx_k}\right)_{x=\bar{x}} + R_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где остаточные члены R_h относительно ξ будут по меньшей мере второго порядка. Так как для всех решений σ, вначале близких к $\bar{\sigma}$, всегда имеем $\xi_k < \varepsilon$, то этими остаточными членами R_h можно будет пренебречь всякий раз, когда значение ε будет задано доста-