выражает производные от $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ в функциях от всех параметров. Поэтому, когда путем интегрирования частичной системы (16') будут найдены $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$, дополнительную систему можно привести, в свою очередь, к системе только с $n-m$ остальными неизвестными x_{m+k} $(k=1, 2, \ldots, n-m)$.

Очевидно, что в этих случаях устойчивость (или неустойчивость) решений полной системы (16'), (16''), *приведенной к параметрам* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, будет тождественна с безусловной устойчивостью решений частичной системы (16') [8].

Некоторые интересные примеры на устойчивость этого типа мы встретим в ближайших главах.

§ 5. Малые колебания около устойчивого решения системы дифференциальных уравнений. Критерии неустойчивости

19. Уравнения в вариациях. Возьмем снова систему (16)

$$\frac{dx_h}{dt}=X_h(x|t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n)$$

и рассмотрим ее устойчивое решение $\bar{\sigma}$

$$\bar{x}_h=\bar{x}_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n);$$

представим уравнения какого-нибудь другого решения σ системы (16) в виде

$$x_h=\bar{x}_h(t)+\xi_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \quad (17)$$

где ξ_h обозначают n новых неизвестных функций.

Из самого определения устойчивости решения $\bar{\sigma}$ (п. 16) следует, что достаточно взять для σ начальные значения x^0 переменных x, достаточно близкие к одновременным значениям $\bar{x}^0$ решения $\bar{\sigma}$ (т. е. достаточно близкие к нулю начальные значения ξ^0 неизвестных ξ), для того чтобы функции ξ оставались *неопределенно* долго меньшими по абсолютной величине некоторого наперед заданного постоянного числа ε.

Если теперь в выражениях функций X в правых частях системы (16) мы будем рассматривать t как параметр и предположим, что самые функции X могут быть разложены в ряд Тэйлора по отношению к переменным $\xi=x-\bar{x}$, то, принимая во внимание уравнения (17), будем иметь

$$X_h=(X_h)_{x=\bar{x}}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(\frac{dX_k}{dx_k}\right)_{x=\bar{x}}+R_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где остаточные члены R_h относительно ξ будут по меньшей мере второго порядка. Так как для всех решений σ, вначале близких к $\bar{\sigma}$, всегда имеем $\xi_k<\varepsilon$, то этими остаточными членами R_h можно будет пренебречь всякий раз, когда значение ε будет задано достаточно малым для того, чтобы можно было его рассматривать как величину первого порядка. Допуская явно это предположение и замечая, что, так как $\bar{\sigma}$ есть решение системы (16), имеем тождественно

$$\frac{d\bar{x}_h}{dt}=(X_h)_{x=\bar{x}} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

путем подстановки выражений (17) в уравнения (16) мы убедимся, что функции для решений σ, вначале близких к устойчивому решению $\bar{\sigma}$, определятся по меньшей мере до членов, весьма малых по сравнению с ε, из системы уравнений

$$\frac{d\xi_h}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right)_{x=\bar{x}} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{18}$$

Уравнения (18) называются *уравнениями в вариациях* системы (16) по отношению к ее устойчивому решению $\bar{\sigma}$[1]).

В заключение заметим, что функции ξ, определенные из системы (18), после подстановки в решения (17), дают приближенное представление всех решений системы (16), близких к устойчивому решению $\bar{\sigma}$, справедливое для сколь угодно большого промежутка времени, если начальные значения ξ^0 выбраны достаточно малыми. Такие решения системы (16) называются *малыми колебаниями около устойчивого решения* $\bar{\sigma}$.

С аналитической точки зрения заметим, что так как $\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right)_{x=\bar{x}}$ после вычисления будут известными функциями от одной независимой переменной t, то уравнения в вариациях (18) образуют систему из n линейных однородных уравнений относительно n неизвестных функций ξ, так что с точки зрения соответствующего интегрирования остается в силе вся известная теория этих уравнений.

20. Вывод общего интеграла уравнений в вариациях из интеграла конечных уравнений. Ограничимся здесь замечанием, что всякий раз, когда известно общее решение уравнений (16), из него можно непосредственно вывести одним только дифференцированием общее решение системы в вариациях (18).

Действительно, пусть функции

$$x_h=f_h(t\,|\,x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{19}$$

определяют общее решение системы (16), где произвольные постоянные задаются в виде начальных значений x_h^0 какого-либо решения. Решение $\bar{\sigma}$ по предположению определяется своими

---

[1]) Относительно тех, кто ввел в механику математическое изучение уравнений в вариациях, см. Poincaré, Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, т. I, гл. IV, Paris, 1892.

начальными значениями $x_h^0 = \bar{x}_h^0$, и на основании соотношений (17) начальные значения, определяющие любое решение σ, бесконечно близкое к $\bar{\sigma}$, будут вида $\bar{x}_h^0 + \xi_h^0$, где ξ_h^0 надо рассматривать как бесконечно малые. При этих значениях x_h^0 правые части уравнений (19) можно написать в виде

$$\bar{x}_h + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k^0}\right)_{x^0 = \bar{x}^0} \xi_k^0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда, применяя еще раз формулы (17), придем к уравнениям

$$\xi_h(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k^0}\right)_{x^0 = \bar{x}^0} \xi_k^0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

которые дают общее решение линейных уравнений в вариациях в функции от независимого переменного t и начальных смещений ξ_k^0 решения σ от $\bar{\sigma}$, а также, как это естественно, от постоянных $\bar{x}_h^0$, определяющих решение $\bar{\sigma}$.

Аналогичным образом найдем, что если для уравнений (16) известно не общее решение, а только семейство решений, зависящее от $m < n$ произвольных постоянных (существенных), то из него можно вывести только дифференцированием семейство решений для уравнений в вариациях, зависящее линейно от m произвольных постоянных.

Особенно простое приложение этого замечания мы имеем в случае системы (16), правые части уравнений которой не содержат явно t; в этом случае ясно, что если $x_h = x_h(t)$ есть частное решение, то из него непосредственно выводим класс ∞^1 решений, заменяя t на $t - t_0$, где t_0 — произвольная постоянная; дифференцируя $x_h(t - t_0)$ по t_0 и опуская дифференциал $-\delta t_0$ (который здесь появляется как мультипликативная произвольная постоянная), мы получим как частное решение системы (18) уравнения

$$\xi_h = \dot{x}_h(t - t_0) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

21. Малые колебания около статического решения. Характеристические показатели. Критерий неустойчивости. Простой и в то же время очень важный для механики случай будем иметь, когда функции X не зависят явно от t:

$$\frac{dx_h}{dt} = X_h(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

и, кроме того, устойчивое решение $\bar{\sigma}$, около которого рассматриваются малые колебания, является статическим.

В этом предположении уравнения в вариациях (18) будут уравнениями с постоянными коэффициентами.

Полагая для краткости

$$\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right)_{x=\bar{x}^0} = c_{hk} \qquad (h,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

приведем уравнения в вариациях к виду

$$\frac{d\xi_h}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_{hk}\xi_k \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{21}$$

Из анализа известно, что при интегрировании системы (21) следует поступать так же, как и при интегрировании линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами с одной неизвестной функцией (ср. т. I, гл. II, пп. 42—43), т. е. следует искать частные решения вида

$$\xi_h = \lambda_h e^{zt} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{22}$$

где λ_h и z обозначают постоянные, которые затем надо определить. Подставляя функции (22) в уравнения (21), мы тотчас же увидим, что для того, чтобы эти уравнения удовлетворялись, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись n уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_{hk}\lambda_k = z\lambda_h \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

которые по отношению к n неизвестным λ являются линейными и однородными; они будут совместными только тогда, когда будет равен нулю определитель из коэффициентов при λ, т. е. когда постоянная z будет корнем алгебраического уравнения n-ой степени, называемого *характеристическим уравнением* системы (21)

$$\Delta(z) \equiv \| c_{hk} - \delta_{hk} z \| = 0, \tag{23}$$

где по обыкновению δ_{hk} обозначает единицу, если индексы h и k совпадают, и нуль, если они не совпадают. Корни z_s ($\bar{s} = 1,\ 2,\ \ldots$) этого уравнения называются *характеристическими показателями* системы (21) или, еще лучше, статического решения $\bar{\sigma}$ уравнений (20), к которым относятся уравнения в вариациях (21).

Различные между собой характеристические показатели определяют столько же решений вида (22), линейно независимых между собой, системы (21). Здесь нет необходимости останавливаться на рассмотрении того, как находятся путем алгебраических операций другие необходимые частные решения для построения основной системы в том случае, когда число этих различных между собой характеристических показателей окажется меньше n [9]; обратимся прямо к малым колебаниям около статического решения $\bar{\sigma}$.

Легко интуитивным путем прийти к заключению, что в предполагаемом здесь случае устойчивости решения $\bar{\sigma}$ характеристические показатели не могут иметь положительную действительную часть, если говорить об устойчивости в будущем.

В самом деле, предположим, что $z=\mu+i\nu$ при $\mu>0$ есть такой показатель, и пусть функции (22) представляют собой соответствующее решение уравнений (21). Постоянные λ_h наверное не все нули; с другой стороны, вместе с решением (22) система (21) вследствие того, что она является линейной, допускает в качестве решений n функций $\eta\lambda_h e^{zt}$, где η обозначает действительную произвольную постоянную; если возьмем постоянную η достаточно малой по абсолютной величине, то будем иметь решение уравнений (21), вначале сколь угодно близкое к нулю, для которого, при заданном виде показательной функции $e^{zt}=e^{\mu t}e^{i\nu t}$, по крайней мере одна из функций ξ_h (та или одна из тех, для которых $\lambda_h \gtrless 0$) возрастает при t, стремящемся к бесконечности. Заметим, что в предыдущем рассуждении мы ввели решения, которые, вообще говоря, будут комплексными. Но если мы не будем иметь $\nu=0$ (в этом последнем случае только что изложенное рассуждение относится прямо к действительному решению), то характеристическое уравнение вместе с корнем $z=\mu+i\nu$ будет допускать также и сопряженный корень $\bar{z}=\mu-i\nu$. Полагая последовательно $\lambda_h=\rho e^{i\theta}/2$, $\lambda_h=\rho e^{-i\theta}/2$, можно получить для системы (21) действительное решение

$$\eta(\xi_h+\bar{\xi}_h)=\eta\rho e^{\mu t}\cos(\nu t+\theta),$$

которое при заданном η, близком к нулю, вследствие наличия множителя $e^{\mu t}$ нельзя рассматривать как ограниченное при стремлении t к бесконечности; это решение, колеблясь около нуля, принимает сколь угодно большие значения.

Аналогичным образом, если рассмотрим только прошедшее время, то увидим, что нельзя допустить характеристических показателей с отрицательной действительной частью.

Следовательно, для того чтобы решение $\bar{\sigma}$ было устойчивым как в прошедшем, так и в будущем, необходимо, чтобы действительные части всех характеристических показателей были равны нулю. Повидимому, можно было бы думать, что предыдущим интуитивным рассуждениям можно дать совершенно строгую форму; но в действительности аналитическое исследование устойчивости до сих пор было в состоянии установить лишь более или менее косвенные результаты. А. М. Ляпунов пришел к следующему результату, формулировкой которого мы здесь ограничимся.

Для того чтобы статическое решение уравнений (20) *было устойчивым, необходимо, чтобы все его характеристические показатели были чисто мнимыми (за исключением разве лишь одного, равного нулю)* [1]).

---

[1]) Некоторые авторы полагают $z_s=iz_s'$ и называют характеристическими показателями z_s', так что необходимое условие устойчивости будет заключаться в том, чтобы характеристические показатели были все действительными (за исключением разве одного, равного нулю).

Другими словами, мы имеем следующий критерий неустойчивости:

Статическое решение уравнений (20) *будет наверное неустойчивым, если по крайней мере один из его характеристических показателей имеет действительную часть, отличную от нуля.*

Необходимо добавить, что предыдущий результат, к сожалению, вообще говоря, необратим, так как можно показать на конкретных примерах возможность статических решений со всеми характеристическими показателями чисто мнимыми и тем не менее неустойчивых ¹) [10].

22. Динамический случай. Обращение теоремы Дирихле. Оставим пока общие рассуждения предыдущих пунктов, чтобы показать, как они связываются с задачей о малых колебаниях голономной системы около некоторой конфигурации устойчивого равновесия, изученной уже нами в § 3 при помощи уравнений Лагранжа.

С этой целью начнем с указания того, как способ, изложенный в пп. 19, 21, прилагается к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x_h}{dt^2}=X_h(x) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{24}$$

которая отличается от первоначальной системы (20) только тем, что в левой части вместо производных первого порядка от неизвестных функций входят производные второго порядка. Известно, что такую систему всегда можно привести к виду (20), принимая за неизвестные функции вместе с x_h также и $\dot{x}_h=dx_h/dt$ и рассматривая вместо системы второго порядка (24) эквивалентную ей систему из $2n$ уравнений первого порядка с $2n$ неизвестными функциями

$$\frac{dx_h}{dt}=\dot{x}_h, \quad \frac{d\dot{x}_h}{dt}=X_h(x) \quad (h=1,2,\ \ldots,n). \tag{24'}$$

Предполагая, что для системы (24) известно статическое решение $x_h=\text{const}=\bar{x}_h^0$, будем иметь для системы (24′) решение, тоже статическое, $x_h=\bar{x}_h^0$, $\dot{x}_h=0$; поэтому можно образовать соответствующие этому решению уравнения в вариациях системы (24′) и дальше поступать так, как указано в предыдущем пункте.

Но при заданной частной форме уравнений (24) (именно благодаря отсутствию в правых частях первых производных от x) удобнее оперировать прямо с самими уравнениями (24). Подстановка

$$x_h=\bar{x}_h^0+\xi_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

¹) Levi-Civita, Sopra alcuni criteri di instabilità, *Ann. di Mat.*, серия 3-я, т. 5, 1901, стр. 221—308.

приводит к тому, что уравнения в вариациях, соответствующие решению $x_h = \bar{x}_h^0$, при обозначениях предыдущего пункта принимают вид

$$\frac{d^2\xi_h}{dt^2} = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} c_{hk}\xi_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

т. е. отличаются от уравнений в вариациях (21) системы (20) только тем, что в левую часть входят вторые производные от ξ вместо первых.

Если, далее, мы будем искать частные решения показательного типа $\xi_h = \lambda_h e^{zt}$ при постоянных λ и z, то для z придем к характеристическому уравнению степени $2n$

$$\Delta(z^2) \equiv \| c_{hk} - \delta_{hk} z^2 \| = 0,$$

которое может быть получено из характеристического уравнения (23) системы (20) посредством подстановки z^2 вместо z. Отсюда заключаем, что необходимое условие для устойчивости статического решения уравнений (20), найденное в предыдущем пункте (все корни уравнения $\Delta(z) = 0$ должны быть чисто мнимыми), здесь для системы (24) переходит в условие, что все корни *уравнения* $\Delta(z) = 0$ *степени n должны быть отрицательными.*

Заметим теперь, что предыдущие рассуждения остаются также в силе и для всякой системы вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk} \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_h(z) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

где a_{hk} обозначают n^2 известных функций от x с определителем $\| a_{hk} \|$, не равным тождественно нулю; действительно, такая система только по виду представляется более общей, чем система (24), так как она приводится к виду (24) после разрешения ее относительно вторых производных. Здесь важно рассмотреть непосредственно системы вида (26), потому что, как легко видеть, уравнения Лагранжа голономной системы, подчиненной связям, не зависящим от времени, и находящейся под действием консервативных сил, в непосредственной близости от конфигурации равновесия принимают вид, который, как частный случай, входит в тип уравнений в вариациях относительно статического решения системы (26) общего вида.

Чтобы проверить это, заметим прежде всего, что если обозначить через $\bar{a}_{hk}$ значения, которые принимают a_{hk} для статического решения, и при этом воспользоваться обычными обозначениями, то уравнения в вариациях системы (26) примут вид

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{hk} \frac{d^2\xi_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} c_{hk}\xi_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{27}$$

так что соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\| c_{hk} - z^2 \bar{a}_{hk} \| = 0. \tag{28}$$

С другой стороны, обращаясь к § 3, возьмем снова найденные там выражения для живой силы T и для потенциала U в непосредственной близости от конфигурации равновесия C^0. Эти выражения, если написать $\dot{z}_h$ вместо $\dot{q}_h$, что возможно на основании того, что было положено $z_h = q_h - q_h^0$, принимают вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk} \dot{z}_h \dot{z}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} z_h z_k.$$

Если на основании этих выражений составим уравнения Лагранжа, то придем к уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk} \frac{d^2 z_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{hk} z_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{27'}$$

которые и будут как раз типа уравнений (27); но, как мы уже отмечали, уравнения (27′) составляют их частный случай, потому что в уравнениях (27) c_{hk}, a_{hk} суть действительные числа, не подчиненные никакому условию, тогда как a_{hk}, β_{hk} в уравнениях (27′) суть коэффициенты двух квадратичных форм ($a_{hk} = a_{kh}$, $\beta_{hk} = \beta_{kh}$), первая из которых является *определенной положительной*.

Характеристическое уравнение для уравнений (27′) имеет вид

$$\| \beta_{hk} - z^2 a_{hk} \| = 0, \tag{28'}$$

и поэтому получается посредством подстановки $\rho = z^2$ из уравнения (11) § 3

$$\| \beta_{hk} - \rho a_{hk} \| = 0,$$

которое в известном смысле можно рассматривать как резольвенту задачи о малых колебаниях голономной системы в окрестности конфигурации устойчивого равновесия.

Отметим попутно, что из самой формы характеристического уравнения (28), которое действительно для всех дифференциальных систем вида (27) и, в частности, для уравнений малых колебаний, следует, что если z есть его корень, то корнем будет также и $-z$. Отсюда имеем: *характеристические показатели статического решения дифференциальной системы типа* (26) *и, в частности, динамической задачи попарно равны по модулю и противоположны по знаку.*

Важнее всего то, что, применяя критерий неустойчивости предыдущего пункта, мы придем к обращению теоремы Дирихле, уже упоминавшемуся в п. 7, по крайней мере в случаях общего типа.

Речь идет о следующей теореме Ляпунова, уже указанной в упомянутом выше пункте.

Дана голономная система, находящаяся под действием консервативных сил; если потенциал U имеет в данной конфигурации C^0 системы стационарное значение, которое не является максимумом, то равновесие в C^0 не будет устойчивым, по крайней мере всякий раз, когда отсутствие максимума можно видеть из рассмотрения местных значений вторых производных от U.

Доказательство почти очевидно, так как последнее предположение в формулировке заключает в себе то, что в канонической форме потенциала (отнесенного к нормальным переменным), т. е. в выражении

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2,$$

где ρ_i обозначают корни (все действительные) уравнения (11), по крайней мере один из этих корней будет положительным. Если, например, $\rho_h > 0$, то характеристическое уравнение (28') допускает два действительных корня $\pm\sqrt{\rho_h}$ (характеристические показатели), откуда следует в силу критерия предыдущего пункта, что конфигурация равновесия C^0 будет наверное неустойчивой.

Мы можем прибавить, что эта конфигурация оказывается тем менее устойчивой, чем больше будет число неотрицательных значений ρ_i. Действительно, достаточно обратиться к дифференциальным уравнениям малых колебаний, т. е. к уравнениям

$$\ddot{x}_i - \rho_i x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

чтобы убедиться, что из нормальных переменных x_i те, которым соответствуют $\rho_i < 0$, будут во всяком случае изменяться по гармоническому закону, тогда как все те, для которых $\rho_i \geqslant 0$, при подходящем выборе начальных условий в конце концов будут возрастать неограниченно вместе с временем. На основании этого можно сказать, что конфигурация неустойчивого равновесия имеет столько *степеней неустойчивости*, сколько имеется в соответствующей канонической форме потенциала неотрицательных коэффициентов.

§ 6. Линейная устойчивость и критерий, даваемый методом малых колебаний

23. Приближенная устойчивость первого порядка или линейная. Вернемся к общим рассуждениям пп. 16, 18, чтобы по возможности быстрее перейти затем к рассмотрению дальнейших замечательных исследований.