Речь идет о следующей теореме Ляпунова, уже указанной в упомянутом выше пункте.

Дана голономная система, находящаяся под действием консервативных сил; если потенциал U имеет в данной конфигурации C^0 системы стационарное значение, которое не является максимумом, то равновесие в C^0 не будет устойчивым, по крайней мере всякий раз, когда отсутствие максимума можно видеть из рассмотрения местных значений вторых производных от U.

Доказательство почти очевидно, так как последнее предположение в формулировке заключает в себе то, что в канонической форме потенциала (отнесенного к нормальным переменным), т. е. в выражении

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2,$$

где ρ_i обозначают корни (все действительные) уравнения (11), по крайней мере один из этих корней будет положительным. Если, например, $\rho_h>0$, то характеристическое уравнение (28′) допускает два действительных корня $\pm\sqrt{\rho_h}$ (характеристические показатели), откуда следует в силу критерия предыдущего пункта, что конфигурация равновесия C^0 будет наверное неустойчивой.

Мы можем прибавить, что эта конфигурация оказывается тем менее устойчивой, чем больше будет число неотрицательных значений ρ_i. Действительно, достаточно обратиться к дифференциальным уравнениям малых колебаний, т. е. к уравнениям

$$\ddot{x}_i-\rho_i x_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

чтобы убедиться, что из нормальных переменных x_i те, которым соответствуют $\rho_i<0$, будут во всяком случае изменяться по гармоническому закону, тогда как все те, для которых $\rho_i\geqslant 0$, при подходящем выборе начальных условий в конце концов будут возрастать неограниченно вместе с временем. На основании этого можно сказать, что конфигурация неустойчивого равновесия имеет столько *степеней неустойчивости*, сколько имеется в соответствующей канонической форме потенциала неотрицательных коэффициентов.

§ 6. Линейная устойчивость и критерий, даваемый методом малых колебаний

23. Приближенная устойчивость первого порядка или линейная. Вернемся к общим рассуждениям пп. 16, 18, чтобы по возможности быстрее перейти затем к рассмотрению дальнейших замечательных исследований.

Мы уже говорили (п. 21), что на конкретных примерах доказана недостаточность, в общем случае, необходимого условия устойчивости статического решения, найденного Ляпуновым [11].

Следует, однако, заметить, что всякий раз, как оно выполняется, т. е. всякий раз, как все характеристические показатели статического решения $\bar{\sigma}$ чисто мнимые, удается показать, что отклонение решений $\bar{\sigma}$ и σ друг от друга, вначале весьма малое, хотя и не остается неопределенно долго бесконечно малым, но обнаруживается только после более длительного промежутка времени, чем во всех других случаях, т. е. мы имеем в этом случае *устойчивость* в первом приближении, которую можно назвать *линейной*, поскольку принимается во внимание только линейная часть дифференциальных уравнений, о которых идет речь.

Когда имеет место эта линейная устойчивость, решения σ, близкие вначале к рассматриваемому решению $\bar{\sigma}$, называются попрежнему *малыми колебаниями* около $\bar{\sigma}$.

Далее, иногда при схематической постановке конкретных задач оказывается возможным считать удовлетворительным такое приближенное представление явлений, которое сохраняет свое значение если не на все время, то по крайней мере в течение конечного, но достаточно длительного промежутка времени. Это и является основанием того, что в конкретных приложениях, если не удается прийти к устойчивости в строгом смысле, удовлетворяются лишь решением вопроса, оказывается ли данное статическое решение строго неустойчивым, или же оно устойчиво в только что рассмотренном линейном смысле. А для этой цели достаточно применить так называемый *метод малых колебаний* (т. е. решение уравнений в вариациях) и критерий, даваемый рассмотрением характеристических показателей.

В дальнейшем нам придется часто рассматривать вопрос об устойчивости или в строгом смысле, когда задача допускает это, или ограничиваясь первым приближением, на основе исследования характеристических показателей. Здесь же, продолжая следовать дальше в развитии идей общего порядка, мы покажем, как сама физическая реальность во многих случаях подсказывает рассмотрение линейной устойчивости в будущем.

24. Меростатические движения и типичная форма уравнений малых колебаний около них. Рассмотрим динамическую систему с голономными связями, не зависящими от времени, на которую действуют консервативные силы, и предположим, что циклический характер некоторых лагранжевых координат допускает приложение метода игнорирования этих координат (предыдущая глава, п. 45).

Обозначая через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ неигнорируемые координаты, сделаем дальнейшее предположение, что соответствующая *при-*

веденная лагранжева система допускает статическое решение $q_h = q_h^0 (h = 1, 2, \ldots, n)$. В действительности, движение системы, соответствующее такому решению, может называться статическим только частично, т. е. только по отношению к неигнорируемым координатам, потому что остальные координаты, вообще говоря, не будут постоянными, а будут изменяться с временем. Такое движение называется меростатическим (т. е. частично статическим); при этом следует заметить, что в конкретных задачах как раз для этого типа движений чаще всего и интересуются вопросом об устойчивости.

Вспомним, что (приведенная) лагранжева функция, которая здесь не будет зависеть от времени, содержит члены второй, первой и нулевой степени относительно $\dot{q}_k$ (предыдущая глава, п. 46), так что, обозначая ее через $\mathfrak{L}$, мы можем, при обычном значении символов, положить

$$\mathfrak{L} = T_2 + T_1 + T_0 + U,$$

где, как мы знаем, члены T_1, линейные относительно $\dot{q}_h$, имеют гиростатический характер.

Представим себе теперь, что вместо q введены n соответствующих *нормальных координат*, т. е. n таких линейных независимых между собой форм x_i от $q_h - q_h^0$, что в окрестности значений $x_i = 0$, соответствующих меростатическому движению, квадратичная часть T_2 живой силы и функция $T_0 + U$ имеют соответственно вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2, \qquad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2,$$

который в п. 13 мы придали живой силе и потенциалу, независимо от какого-либо игнорирования координат.

Что касается части T_1 гиростатического характера, то она после замены переменных, естественно, представится в виде линейной функции относительно $\dot{x}$, а коэффициент при любом $\dot{x}_i$, разложенный в ряд в окрестности решения, о котором идет речь, будет иметь вид

$$b_i + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k + \ldots \tag{29}$$

Если перейдем теперь к составлению уравнений Лагранжа для малых колебаний, то тотчас же увидим, что в них не войдут ни известные члены b_i, ни члены, опущенные в разложении (29); эти уравнения принимают в рассматриваемом случае вид

$$\ddot{x}_i - \rho_i x_i + \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \dot{x}_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

где для простоты положено

$$e_{ik}=b_{ik}-b_{ki} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, мы видим, что благодаря членам гиростатической природы в функции Лагранжа в уравнениях малых колебаний появляются линейные члены относительно лагранжевых нормальных скоростей с *антисимметричными* (постоянными) *коэффициентами*.

§ 7. Наличие пассивных сопротивлений. Диссипативность

25. Уравнения (30) предыдущего пункта не составляют еще наиболее общий тип уравнений малых колебаний, встречающихся при схематической постановке физических проблем.

Действительно, даже ограничиваясь случаем голономных систем со связями, не зависящими от времени, и находящихся под действием позиционных сил консервативной природы, необходимо принимать во внимание неизбежные пассивные сопротивления (трение, вязкость и пр.), которые, как мы уже видели в элементарном случае только одной степени свободы (см., например, гл. I, п. 58), можно вообще рассматривать схематически как силы, зависящие от скоростей точек системы; эти силы совершают существенно отрицательную работу на каком угодно перемещении системы.

В окрестности конфигурации равновесия $x_i=0$ лагранжевы составляющие $X_i (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ таких сил будут, как правило, представлены линейными формами с постоянными коэффициентами относительно лагранжевых скоростей $\dot{x}$, и эти формы должны быть такими, чтобы выражение элементарной работы

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i=dt\sum_{i=1}^{n} X_i\dot{x}_i$$

было отрицательным для всякого перемещения, не равного тождественно нулю, т. е. при всяком выборе значений $\dot{x}$, не равных одновременно нулю. Другими словами, квадратичная форма относительно $\dot{x}$

$$\Psi=-\sum_{i=1}^{n} X_i\dot{x}_i$$

должна быть определенной положительной.

Предположим теперь, что

$$X_i=-\sum_{k=1}^{n} d_{ik}\dot{x}_k \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$