отсюда, обозначая, как обычно, через $\bar{z}_i$ комплексную величину, сопряженную с z_i ($\bar{z}_i = z_i$, если корень действителен), получим

$$\frac{\gamma(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}=\frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_3}+\frac{\bar{z}_4}{z_4\bar{z}_4};$$

отсюда непосредственно видно, что z_i не могут иметь все действительную часть, равную нулю, или отрицательную, так как в этом случае действительная часть суммы в правой части была бы нулем или отрицательной, в то время как левая часть является существенно действительной и положительной. Таким образом, оказывается действительно подтвержденным в случае $n=2$ то положение, что гиростатическая устойчивость не имеет векового характера.

Типичным примером, иллюстрирующим только что полученный результат, является так называемый *спящий волчок*, т. е. волчок, который, после того как его привели в весьма быстрое вращательное движение вокруг собственной оси, поставленной вертикально на горизонтальном полу, и предоставили самому себе, кажется неподвижным всякому, кто смотрит на него издали. При отсутствии вращения около собственной оси его состояние равновесия при вертикальном направлении оси будет неустойчивым (если центр тяжести выше точки опоры); когда угловая скорость вращения волчка около оси сделается достаточно большой, его состояние меростатического вращения становится устойчивым (не только в линейном, но даже и в строгом смысле), если в качестве действующей силы рассматривается только сила веса. Но если принять во внимание сопротивление воздуха, то в уравнения малых колебаний войдут диссипативные силы, и мы теоретически найдем, как это и имеет место в действительности, что угловая скорость, хотя и медленно, будет убывать, так что в конце концов волчок упадет. Исчерпывающее объяснение этого явления будет дано в гл. VIII, § 7.

§ 8. Малые колебания около какого-нибудь решения

30. Заметим, наконец, что формальный способ составления уравнений в вариациях можно также приложить к системам уравнений (16), правые части которых зависят от t, и по отношению к какому угодно решению $\bar{\sigma}$ (будет ли оно статическим или нет, будет оно устойчивым или неустойчивым). Мы придем, таким образом, к системе дифференциальных уравнений (18); которые все еще линейны относительно ξ, но, вообще говоря, содержат в коэффициентах явно переменную t. Даже и в этих случаях можно сказать, что эти уравнения определяют *малые колебания около рассматриваемого решения* $\bar{\sigma}$, но при этом подразумевается та оговорка, что если решение $\bar{\sigma}$ не является устойчивым, то приближенное представление, которое таким образом получается для σ, вначале близкого к $\bar{\sigma}$, сохраняет свое значение только внутри интервала времени, ограниченного подходящим образом. Так, из изучения уравнений в вариациях здесь можно получить критерии устойчивости или неустойчивости в *первом приближении,* но им нельзя дать простую исчерпывающую алгебраическую форму, как в случае статических решений систем, правые части которых не зависят от t. В частности, заслуживает упоминания случай *периодических решений,* т. е. случай, когда при $X(x|t)$, являющихся периодическими функциями от t с одинаковыми периодами T (или, в частности, не зависящих от t), в качестве решения $\bar{\sigma}$ принимается решение, для которого функции $x(t)$ сами будут периодическими функциями, имеющими тот же период T. Для таких случаев существует теория характеристических показателей, вполне аналогичная теории, действительной для статических решений, с той лишь разницей, что для составления характеристического уравнения недостаточно алгебраических средств; оно требует аналитических приемов более высокого порядка [12].

Хотя эта теория представляет большой интерес для приложений механики и, в частности, для небесной механики, однако мы здесь не можем заниматься ею, не выходя из рамок этой книги.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если голономная система с идеальными связями, не зависящими от времени, находится под действием консервативных сил, то статическое условие устойчивости (т. I, гл. IX, п. 17 и гл. XIII, п. 23) является также и достаточным для устойчивости в наиболее полном динамическом понимании (§ 1).

2. Доказать инвариантность характеристического уравнения (11) по отношению к каким угодно линейным однородным преобразованиям.

Достаточно вспомнить, что если квадратичная форма подвергается произвольному линейному однородному преобразованию, то ее дискриминант умножается на квадрат модуля рассматриваемого линейного преобразования.

3. Пусть S есть материальная система, отнесенная к нормальным координатам x и находящаяся под действием некоторой консервативной системы сил, которые имеют потенциал U в окрестности конфигурации устойчивого равновесия. Тогда будем иметь (п. 13)

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\dot{x}_i^2,\quad U=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2x_i^2.$$

Если S' есть материальная система с немного отличной живой силой $T+\delta T$ и находится под действием сил, тоже немного отличных, являющихся производными от потенциала $U+\delta U$, то при отнесении к тем же самым