ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА

[1] Функция L^*, которую автор называет приведенной функцией Лагранжа, называется также функцией Рауса.

Легко показать, что эта функция равна разности кинетических энергий T' и T''

$$L^* = T' - T'',$$

где

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}\dot{q}_i q_k \quad \text{и} \quad T'' = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=m+1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

Выразим явно частные производные $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \ldots + a_{1m}\dot{q}_m + a_{1m+1}\dot{q}_{m+1} + \ldots + a_{1n}\dot{q}_n,$$

. . . .

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} = a_{m1}\dot{q}_1 + a_{m2}\dot{q}_2 + \ldots + a_{mm}\dot{q}_m + a_{m\,m+1}\dot{q}_{m+1} + \ldots + a_{mn}\dot{q}_n,$$

. . . .

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = a_{n1}\dot{q}_1 + a_{n2}\dot{q}_2 + \ldots + a_{nm}\dot{q}_m + a_{nm+1}\dot{q}_{m+1} + \ldots + a_{nn}\dot{q}_n.$$

Далее имеем

$$\mathfrak{L}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{h} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i.$$

Умножая $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ на соответствующие значения $\dot{q}$ и вычисляя суммы, найдем, что обе суммы будут содержать в себе одинаковые слагаемые, которые и исчезнут после приведения подобных членов:

$$\mathfrak{L}^* = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=m+1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

Если координаты $\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_m$ — циклические, то

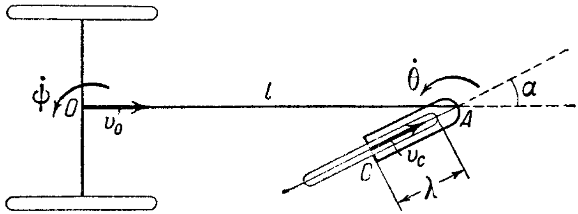
$$\dot{q}_i = \gamma_i + \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Заменяя в последней сумме $\dot{q}_i$ их значениями, найдем

$$\mathfrak{L}^* = \frac{1}{2} \sum_{i, k = m+1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{k, i=1}^{m} a_{ik}(\gamma_i + \lambda_i)(\gamma_k + \lambda_k).$$

[2] Утверждение автора о том, что при связях, не зависящих от времени, коэффициенты $b_{j0} \equiv 0$, в такой категорической форме ничем не оправдано и в некоторых случаях может оказаться неверным. Можно привести примеры неголономных систем, уравнения связей которых не содержат явно времени, а все коэффициенты b_{jh} либо постоянны, либо являются функциями координат, причем $b_{j0} \neq 0$.

В качестве простейшего примера можно привести трехколесный велосипед (трехколесное шасси самолета) (фиг. 22). Напишем для его переднего



Фиг. 22.

колеса уравнение связей, полагая, что и задние, и передние колеса катятся по плоскости без скольжения. Пусть $\dot{\psi}$ есть угловая скорость рамы OA, $\dot{\theta}$ — абсолютная угловая скорость вилки AC около вертикальной оси, а $\omega = \dot{\varphi}$ — относительная угловая скорость переднего колеса по отношению к вилке AC. Обозначим через v_0 скорость средней точки O задней оси, направленную во все время движения по прямой OA, если скольжение отсутствует. Введем также единичные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, направленные соответственно по прямой OA, по оси переднего колеса и по нормали к плоскости, по которой катится велосипед.

Можно написать для скорости точки C следующие два равенства:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$
$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_0 + \dot{\psi}\boldsymbol{k} \times \overrightarrow{OA} + \dot{\theta}_k \times \overrightarrow{AC},$$

где $\boldsymbol{r}$ есть радиус-вектор, идущий из точки касания переднего колеса с плоскостью в центр колеса. Исключая v_C и проектируя полученное равенство на ось OA и на перпендикулярное к ней направление, получим два уравнения:

$$\omega r \cos\alpha = v_0 + \dot{\theta}\lambda \sin\alpha,$$
$$\omega r \sin\alpha = \dot{\psi} l - \dot{\theta}\lambda \cos\alpha;$$

здесь можно положить $\omega = \dot{\varphi}$ и $\dot{\theta} = \dot{\psi} + \dot{\alpha}$. Пока мы рассматриваем уравнения в написанной здесь форме, утверждение авторов остается в силе.

Представим себе теперь, что угловые скорости α, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ малы по сравнению с ω, а угол α также есть малая величина; пусть, кроме того, скорость v_0 поддерживается постоянной. Тогда с точностью до малых второго порядка можно написать

$$\omega r = v_0, \qquad \dot{\psi}(l - \lambda) - \dot{\alpha}\lambda = v_0 \cdot \alpha.$$

Второе из равенств представляет собой уравнение кинематической связи между переменным α, $\dot{\alpha}$ и $\dot{\psi}$; здесь коэффициенты при $\dot{\psi}$ и $\dot{\alpha}$ не зависят от времени, а правая часть равенства все же не равна нулю тождественно.

[3] Уравнения движения неголономных систем обычно пишут в иной форме, пользуясь неопределенными множителями (см., например, Суслов, Теоретическая механика). Пусть общее уравнение механики приведено к виду (79)

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{h} Q_h \delta q_h,$$

а уравнения кинематических связей имеют вид

$$\begin{gathered} a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \ldots + a_{1n}\dot{q}_n = a_1, \\ a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + \ldots + a_{2n}\dot{q}_n = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\dot{q}_1 + a_{m2}\dot{q}_2 + \ldots + a_{mn}\dot{q}_n = a_m. \end{gathered}$$

Тогда соотношения между вариациями δq_h будут

$$a_{r1}\delta q_1 + a_{r2}\delta q_2 + \ldots + a_{rn}\delta q_n = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Умножая последние уравнения соответственно на неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и вычитая сумму из (79), получим

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\tau_h - Q_h - \sum_{r=1}^{m} a_{rh}\lambda_r\right) \delta q_h = 0.$$

Выбирая теперь $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ так, чтобы множители при $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$ равнялись нулю, найдем, что множители и при остальных $n - m$ вариациях $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n$ также должны равняться нулю, так как эти вариации совершенно произвольны.

Таким образом, получаем следующие n уравнений движения:

$$\tau_h = Q_h + \sum_{r=1}^{m} a_{rh}\lambda_r \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

вместе с m уравнениями кинематических связей они дают систему $(n + m)$ уравнений с $(n + m)$ неизвестными $q_1, \ldots, q_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Уравнения, которые автор называет уравнениями Маджи, можно получить, исключая из полученной системы уравнений множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Результат можно представить в сжатой форме, если приравнять нулю определители порядка $(m + 1)$ матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} \tau_1 - Q_1, & \tau_2 - Q_2, & \ldots, & \tau_n - Q_n \\ a_{11}, & a_{12}, & & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Число независимых уравнений будет равно $(n - m)$.

[4] В истории науки можно привести много примеров, когда одновременно над одним и тем же вопросом работали ученые разных стран и приходили к одним и тем же результатам независимо один от другого. Впервые С. А. Чаплыгин в сообщении на заседании физического отделения Общества любителей естествознания 25 октября 1895 г. изложил метод получения уравнений движения неголономных систем без неопределенных множителей.

Уравнения движения были приведены им как раз к той форме, о которой упоминают авторы в тексте, т. е. С. А. Чаплыгин выделил члены неголономности, хотя и не придал этому особого значения.

Это сообщение с дополнениями появилось в печати в 1897 г. в Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. IX. Работы С. А. Чаплыгина по неголономным системам собраны и изданы в небольшом сборнике „Исследования по динамике неголономных систем", 1949 г.

Уравнения Чаплыгина легко получить из матрицы, приведенной в примечании на стр. 423. Пусть уравнения связей приведены к виду

$$\begin{gathered}\dot q_1 = a_{1,\, m+1}\dot q_{m+1} + \ldots + a_{1n}\dot q_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dot q_m = a_{m,\, m+1}\dot q_{m+1} + \ldots + a_{mn}\dot q_n.\end{gathered}$$

Тогда только что упомянутая матрица, из которой получаются все уравнения движения, упростится и ее можно написать в следующей форме:

$$\left\|\begin{matrix} \tau_1 - Q_1 & \tau_2 - Q_2 \ldots \tau_m - Q_m & \tau_{m+1} - Q_{m+1} \ldots \tau_n - Q_n \\ 1 & 0 \quad \ldots \quad 0 & a_{1,\, m+1} \ldots \quad a_{1n} \\ 0 & 1 \quad \ldots \quad 0 & a_{2,\, m+1} \ldots \quad a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 \quad \ldots \quad 1 & a_{m,\, m+1}, \ldots, \quad a_{mn} \end{matrix}\right\|$$

Приравняв нулю первый из определителей $(m+1)$-го порядка, получим

$$\begin{vmatrix} \tau_{m+1} & \tau_1 \; \tau_2 \ldots \tau_m \\ a_{1\, m+1} & 1 \;\; 0 \ldots 0 \\ a_{2\, m+1} & 0 \;\; 1 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m\, m+1} & 0 \;\; 0 \ldots 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{m+1} & Q_1 \; Q_2 \; Q_m \\ a_{1\, m+1} & 1 \;\; 0 \ldots 0 \\ a_{2\, m+1} & 0 \;\; 1 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m\, m+1} & 0 \;\; 0 \ldots 1 \end{vmatrix} \qquad (a)$$

Предположим теперь, что первые m координат $q_1, \ldots, q_m$ не входят ни в выражение кинетической энергии, ни в коэффициенты a_{rs}; ограничиваясь рассмотрением консервативной системы, допустим, что силовая функция U также не зависит от $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Так как

$$\tau = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q}, \quad \frac{\partial \dot q_k}{\partial \dot q_{m+i}} = a_{k,\, m+1},$$

то уравнению (a) можно придать следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_{m+1}} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\frac{\partial \dot q_k}{\partial \dot q_{m+1}}\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\frac{da_{k,\, m+1}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_{m+1}} = \frac{\partial U}{\partial q_{m+1}}.$$

Обозначая через $\overline{T}$ выражение кинетической энергии, получаемое после замены $\dot q_1, \ldots, \dot q_m$ через $\dot q_{m+1}, \ldots, \dot q_n$, и замечая, что

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_{m+1}} = \frac{\partial T}{\partial q_{m+1}} + \sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\frac{\partial \dot q_k}{\partial q_{m+1}},$$

найдем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_{m+1}}\right)-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_{m+1}}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\left\{\sum_{s=1}^{n-m}\left(\frac{\partial a_{k,\, m+s}}{\partial q_{m+1}}-\frac{\partial a_{k,\, m+1}}{\partial q_{m+s}}\right)\dot{q}_{m+s}\right\}=\frac{\partial U}{\partial q_{m+1}}. \qquad (6)$$

Такой же вид будут иметь и остальные уравнения движения. Заметим, что переменные $q_1, \ldots, q_m$ не входят в эти уравнения по предположению, а обобщенные скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ могут быть исключены, т. е. система приведена таким образом к наименьшему возможному числу уравнений. Уравнения движения в форме (6) и были получены С. А. Чаплыгиным.

[5] Автор имеет в виду в данном случае не только механические явления в узком смысле слова; методы изучения устойчивости одинаковы как для механических явлений, так и для процессов в более широком понимании. В последнем случае выбирается некоторая величина или несколько величин, изменение которых с течением времени характеризует изучаемый процесс. Эти величины с таким же правом могут быть приняты за „обобщенные координаты", как углы, прямолинейные отрезки или дуги кривых служат обобщенными координатами какой-либо механической системы. Например, говоря о колебаниях электрических или электромеханических, принимают за одну из координат количество электричества q, протекающего сквозь сечение проводника; в этом случае $i=dq/dt$ есть обобщенная скорость или сила тока. Для таких систем справедливы уравнения Лагранжа, и потому общие выводы, которые получены для механических явлений, будут справедливы и по отношению к процессам в более широком смысле слова.

Очень хорошее изложение вопроса о применении уравнений Лагранжа к электрическим системам можно найти в книге В. Ф. Миткевича, „Физические основы электротехники", 1928.

[6] Эта теорема есть частный случай первой теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости. Для доказательства ее необходимо привлечь рассуждения, примененные Ляпуновым при изложении им второго метода. См. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950, стр. 77 и сл.

[7] К рассуждениям автора необходимы пояснения. По первой из теорем Ляпунова об устойчивости (см. [6]) функция $H(x|t)$ должна быть *знакоопределенной* и, кроме того, должно быть

$$H(x,\ t)=\text{const}.$$

Если $H(x|t)$ — знакоопределенная функция, то при $x_s=0$ и произвольном t она равна нулю, а при всех остальных значениях x_s сохраняет один и тот же знак, пока $|x_s|\leqslant h$. Отсюда и следует, что функция $H(x,\ t)$ для $x_s=0$ имеет максимум или минимум. В случае Дирихле можно положить

$$H=T+V=\text{const},$$

т. е. H есть полная энергия системы. Так как $T+V$ есть знакоопределенная функция, а $T\geqslant 0$, то и

$$H=T+V=\text{const}>0.$$

Но в силу того, что V не зависит от $\dot{q}_s$, должно быть

$$V>0,$$

т. е. потенциальная энергия в положении равновесия должна иметь *минимум.*

Отсюда следует, что теорема Дирихле есть просто частный случай первой теоремы Ляпунова, а потому нельзя и противопоставлять их друг другу

[8] С этими рассуждениями авторов нельзя согласиться, так как устойчивость решений системы (16′) еще не влечет за собой устойчивости полной системы (16′) и (16″).

Раус рассматривал вопрос не вполне так, как излагают авторы, а основная теорема Рауса об устойчивости движения голономной консервативной системы есть частный случай теоремы Ляпунова об устойчивости движения.

Разделение понятия устойчивости на „устойчивость по Дирихле“ и „устойчивость по Раусу“ ничем исторически не оправдано, так как и Дирихле и Раус не давали точного определения этого понятия. Впервые Н. Е. Жуковский обратил внимание на то, что задачу об устойчивости движения консервативной системы можно ставить иначе, чем это сделано у Рауса, и только А. М. Ляпунов дал окончательное, общепринятое теперь определение понятия об устойчивости движения.

[9] На случай кратных корней характеристического уравнения впервые обратил внимание Лагранж в своей „Аналитической механике“. Излагая теорию колебаний, он указывает (Ж. Лагранж, Аналитическая механика, т. I, 1950, Динамика, отдел шестой, § 1, п. 7, стр. 452 и сл.), что координаты системы будут оставаться малыми только при условии, что все корни характеристического уравнения вещественны, положительны и неравны между собой. Нетрудно показать на частном примере, что последнее требование излишне. Рассмотрим колебание материальной точки, лежащей в горизонтальной плоскости и притягиваемой к неподвижному центру с силой, пропорциональной расстоянию. Уравнения движения точки будут

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad \ddot{y} + k^2 y = 0.$$

Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид

$$(-\mu^2 + k^2)(-\mu^2 + k^2) = 0$$

и допускает кратные корни

$$\mu_1^2 = k^2, \quad \mu_2^2 = k^2.$$

Общее решение можно написать в форме

$$x = A\cos(kt + \alpha), \quad y = B\cos(kt + \beta),$$

где A, B, α, β — произвольные постоянные; здесь время t входит только под знаком синуса или косинуса и координаты x и y остаются малыми, если малы A и B, определенные через начальные данные. Лагранж считал, что в случае кратных корней время t войдет в общее решение не только под знаком синуса и косинуса, а потому координаты x и y будут неограниченно возрастать, т. е. для устойчивости равновесия необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения были различными. Ошибка Лагранжа была предметом специальных исследований Вейерштрасса (Gesammelte Werke, т. I). Изложение этого вопроса можно найти в книге академика Крылова А. Н. „О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах“, изд. 2 (1932) или „Вибрация судов“ (Собрание сочинений, т. X, Изд. Академии наук СССР, (1948)).

[10] Научное наследство А. М. Ляпунова так велико, что, говоря о „теореме Ляпунова“, надо ее цитировать, так как число этих теорем огромно. К сожалению, автор не указывает точно, где опубликована приведенная теорема, но из теорем Ляпунова можно вывести совершенно определенное суждение о значении метода малых колебаний. Сошлемся на теоремы (I, II, III) А. М. Ляпунова, помещенные на стр. 82—94 его классического сочинения „Общая задача об устойчивости движения“, М., 1950 г. На стр. 137 того же сочинения находим: „Из предыдущего анализа следует, что в большинстве случаев вопрос об устойчивости разрешается уже исследованием одного первого приближения, ибо только в тех случаях исследование это не дает ответа на вопрос, когда определяющее уравнение, не имея корней с положительными веществен-

ными частями, имеет корни, вещественные части которых суть нули". Из этого следует, что указанный автором настоящей книги случай неустойчивости был исследован А. М. Ляпуновым за десять лет до того. Ляпунов указал и приемы, которым надо следовать при исследовании устойчивости в „особых случаях", т. е. когда корни характеристического уравнения имеют действительные части, равные нулю.

[11] Ссылка автора на теорему Ляпунова ошибочна, а его точка зрения на значение метода малых колебаний при рассмотрении частных практических вопросов может ввести читателя в заблуждение. Метод малых колебаний приводит к исчерпывающему ответу, если все корни характеристического уравнения имеют действительные отрицательные части или в том случае, когда хотя бы один из них имеет положительную вещественную часть. Если же имеются корни, действительные части которых равны нулю, то нельзя судить об устойчивости и неустойчивости по первому приближению, так как все будет зависеть от членов более высокого порядка в уравнениях возмущенного движения. Если все корни чисто мнимые, то требуется дополнительное исследование. Обычно это встречается при исследовании устойчивости консервативных систем, но в этих случаях можно вывести необходимое заключение из анализа интеграла энергии. Если в рассмотрение входят диссипативные силы, что обычно и бывает при решении технических проблем, то можно потребовать, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части. В тех случаях, когда все же нельзя удовлетворить этому условию и когда входит, например, один нулевой корень, следует обратиться к исследованиям „особых случаев" Ляпунова или изменить постановку задачи, что иногда бывает возможно.

[12] Исследование устойчивости периодических решений впервые было выполнено А. М. Ляпуновым в его диссертации „Общая задача об устойчивости движения" (гл. III).