Глава VII

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Основные уравнения

1. При изучении динамики твердого тела мы обратимся прежде всего к основным принципам и руководящим идеям общей теории, изложенной в гл. V и VI. Эта часть динамики системы, по самой природе физических задач, рассматриваемых в ней, приводит к методам и результатам, не только интересным с теоретической точки зрения, но и имеющим важные практические приложения.

В этой главе, после установления общих уравнений, на которых основана вся динамика неизменяемых систем, мы будем рассматривать, в частности, более простые случаи, а именно твердые тела, вращающиеся вокруг некоторой оси или движущиеся параллельно неподвижной плоскости. В двух следующих главах мы рассмотрим классические вопросы, относящиеся к движению твердого тела около одной из своих точек, с приложением их к гироскопам (гл. VIII), и некоторые типичные задачи о качении (гл. IX) и закончим указанием на исследования Вольтерра о неизменяемых системах с циклическими внутренними движениями.

2. Для всякого твердого тела S с какими угодно связями и при любых действующих на него силах в любой момент в течение всего времени движения, как и для всякой другой материальной системы, сохраняют свое значение оба *основных уравнения* (гл. V, п. 16):

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}, \tag{2}$$

где, как мы уже знаем, через $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ обозначены количество движения и результирующий момент количеств движения твердого тела *относительно какой-нибудь* точки, через $\boldsymbol{v}'$ — скорость (абсолютная) этой точки и, наконец, через $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ — результирующая сила и результирующий момент относительно той же самой точки всех внешних сил, действующих на твердое тело. Если за центр приведения вместо какой-нибудь движущейся точки принимается неподвижная точка ($\boldsymbol{v}' = 0$) или центр тяжести твердого тела ($\boldsymbol{v}'$ параллельна $\boldsymbol{Q}$), то второе основное уравнение при тех же обозначениях

приводится к более простому виду

$$\frac{dK}{dt} = M. \tag{2'}$$

Но предположение о неизменяемости системы S влечет за собой следствие, аналогичное указанному в статике для основных уравнений равновесия твердых тел (т. I, гл. XIII, § 2) и заключающееся в том, что *в основных уравнениях* (1) *и* (2) *или* (1), (2′) *мы имеем не только систему уравнений, необходимо выполняющихся в течение всего времени движения твердого тела, но и совокупность условий, достаточных для определения* (*при заданных начальных условиях*) *этого движения.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть различные типичные случаи движения свободного или несвободного твердого тела. Мы ограничимся здесь рассмотрением движения свободного твердого тела и движения твердого тела с неподвижной точкой или осью.

В первом случае основные уравнения (1), (2) или (1), (2′) после проектирования на оси системы координат дадут шесть скалярных уравнений, т. е. как раз столько, сколько степеней свободы имеет твердое тело.

Если же речь идет о твердом теле, закрепленном в некоторой точке O и поэтому имеющем три степени свободы, то в качестве данных в этом случае будут фигурировать, как это было и в статическом случае (т. I, гл. XIII, п. 5), только прямо приложенные (т. е. активные) внешние силы, но не реакция, возникающая в неподвижной точке. Поэтому мы будем считать, что результирующий момент $\boldsymbol{M}$ внешних сил *относительно точки* O известен (или, точнее, может быть выражен в функции от положения и состояния движения тела), результирующая же сила $\boldsymbol{R}$ заранее неизвестна, так как она включает в себя неизвестную реакцию в неподвижной точке. Но во втором основном уравнении, отнесенном к точке O, содержится только $\boldsymbol{M}$, так что, проектируя это уравнение на оси, мы получим три скалярных уравнения, достаточных для определения движения системы.

Наконец, если твердое тело имеет неподвижную ось, то речь будет идти о системе только с одной степенью свободы, поэтому достаточно будет только одного уравнения, чтобы выразить в функции времени единственную обобщенную координату — угол, определяющий положение тела при вращении его около оси. Таким уравнением, содержащим только приложенные силы, а не реакции, возникающие в точках закрепления оси, здесь так же, как и в статическом случае (т. I, гл. XIII, пп. 6—10), будет скалярное уравнение моментов относительно неподвижной оси.

На основании предыдущих соображений основные уравнения можно назвать *динамическими уравнениями движения твердого тела.*

3. Оси, движущиеся как угодно в пространстве. В динамике твердого тела согласно сказанному в п. 17 гл. V часто оказывается полезным относить основные уравнения вместо галилеевых осей к осям $Oxyz$, движущимся в пространстве по произвольному закону, в силу чего эти уравнения принимают вид (гл. V, п. 17)

$$\dot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}, \tag{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}, \tag{4}$$

где через $\dot{\boldsymbol{Q}}$, $\dot{\boldsymbol{K}}$ обозначены производные по времени от $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ относительно осей $Oxyz$, через $\boldsymbol{\omega}'$ — угловая скорость движущихся осей относительно первоначальной галилеевой системы и, как и выше, через $\boldsymbol{v}'$ — скорость центра приведения моментов. Если, как сказано в п. 17 гл. V, этот центр приведения выбирается именно в начале O подвижных осей, то $\boldsymbol{v}'$ и $\boldsymbol{\omega}'$ будут характеристическими векторами (абсолютного) движения этих осей.

Естественно, что это движение системы отсчета $Oxyz$ будет в каждом отдельном случае задаваться таким способом, какой лучше будет подходить к рассматриваемой задаче. Здесь, в общем случае, мы можем добавить только два замечания, столь же естественные, сколь и важные.

Во-первых, если, как и в предыдущем пункте, центр приведения моментов совпадает с центром тяжести твердого тела ($\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} = 0$) или если речь идет о твердом теле, закрепленном в одной точке (в этой закрепленной точке $\boldsymbol{v}' = 0$), то второе основное уравнение (отнесенное к подвижным осям) примет более простой вид:

$$\dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{Q} = \boldsymbol{M}. \tag{4'}$$

Во-вторых, мы будем иметь более простой и, можно сказать, более естественный закон движения системы отсчета $Oxyz$, если примем эту систему неизменно связанной с твердым телом. В этом предположении сообразно с выбором центра приведения для моментов будут сохранять также свое значение уравнения (3) и (4) или (3) и (4′); *вектор* $\boldsymbol{\omega}'$ *будет обозначать здесь угловую скорость* (*абсолютную*) *самого твердого тела.*

Другие оси, подвижные не только в пространстве, но и в теле, будут определены в § 8 гл. VIII. Эту возможность разнообразного выбора осей в различных частных случаях мы оценим при дальнейшем изложении этой главы и в особенности в гл. VIII и IX.

§ 2. Понятие о кинетостатике неизменяемой системы

4. С технической точки зрения задача о вычислении реакций и, следовательно, *динамических давлений*, на которые мы указывали в п. 28 гл. V, приобретает наибольший интерес в случае твердого