ния. В этом случае результирующая сила и результирующий момент давлений выразятся посредством составляющих характеристических векторов движения твердого тела и активных сил [1].

Простой и особенно интересный пример приложения этих рассуждений будет изложен в § 3 при изучении вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

§ 3. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник и его применения

5. Твердое тело с неподвижной осью. Рассмотрим твердое тело S, вынужденное вращаться без трения вокруг неподвижной оси и находящееся под действием какой-нибудь системы сил.

Внешние силы приводятся здесь к силам, прямо приложенным (или активным), и к реакциям, возникающим в точках закрепления оси; перед нами типичная задача динамики, и мы будем предполагать, что при заданных прямо приложенных силах нам ничего заранее неизвестно о возможных реакциях и требуется определить движение тела. Так как система имеет только одну степень свободы, то достаточно получить одно уравнение, не зависящее от неизвестных реакций.

Обозначая через ξ ось (неподвижную) вращения твердого тела и принимая центр O приведения в какой-нибудь точке (неподвижной) оси ξ, мы будем иметь для нашего твердого тела два векторных уравнения (1) и (2′). Достаточно заметить, что возможные реакции приложены к точкам оси и потому их моменты относительно этой оси равны нулю, чтобы убедиться, что мы получим уравнение, определяющее движение, проектируя второе основное уравнение (2′) на ось ξ или, иначе, применяя теорему о моменте количеств движения относительно оси ξ (гл. V, п. 10). Обозначив через M_ξ результирующий момент относительно оси ξ *внешних активных сил*, получим уравнение

$$\frac{dK_\xi}{dt} = M_\xi \tag{7}$$

или, введя угол θ, который достаточен для определения положения твердого тела при вращении его вокруг оси, и обозначив через A момент инерции твердого тела относительно оси ξ (гл. IV, п. 20),

$$A\ddot{\theta} = M_\xi. \tag{7′}$$

Осевой момент M_ξ, как и силы, прямо приложенные, от которых он происходит, можно рассматривать как известный и выраженный в функции от времени, а также от положения и от скоростей точек твердого тела, т. е. в конечном счете от t, θ, $\dot{\theta}$. Таким образом, мы видим, что определение движения сводится к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка, совершенно аналогичного

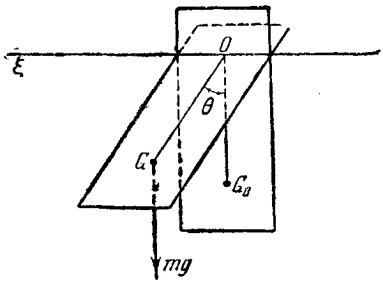
тому, которое определяет движение материальной точки, движущейся по заданной траектории под действием силы с известной касательной составляющей f (гл. I, § 1):

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s} \mid t).$$

Массе точки здесь соответствует момент инерции A, касательному ускорению $\ddot{s}$ — угловое ускорение $\ddot{\theta}$ и, наконец, результирующей f касательных сил — результирующий момент M_ξ активных сил относительно оси.

Естественно, что в особо важном случае, когда силы зависят только от положения, момент M_ξ зависит только от θ (как f — только от s) и уравнение (7′) будет интегрироваться посредством двух квадратур (гл. I, пп. 12 и 15).

6. Физический маятник. Физическим маятником называется всякое твердое тело, свободно вращающееся вокруг горизонтальной неподвижной оси и находящееся под действием одной силы тяжести. Обозначая через ξ *ось подвеса* и через G—центр тяжести маятника (фиг. 1), мы будем определять положение маятника в любой момент посредством угла θ (заключенного между $-\pi$ и π), составленного полуплоскостью ξG с вертикальной полуплоскостью, проходящей через ось ξ и направленной вниз, и измеряемого от этой вертикальной полуплоскости. За положительное направление отсчета угла θ берется одно из двух возможных для него направлений. Так как веса отдельных точек твердого тела в их совокупности эквивалентны полному весу mg, приложенному в G, то момент M_ξ совпадает здесь с осевым моментом этого полного веса. Линия действия полного веса перпендикулярна к оси (горизонтальной) ξ, следовательно, абсолютная величина M_ξ равна произведению из mg на кратчайшее расстояние между этими двумя прямыми, т. е. $|r \sin\theta|$, если r есть расстояние (постоянное) центра тяжести G от оси ξ. Далее, если примем во внимание, что вес постоянно стремится привести центр тяжести в вертикальную полуплоскость, направленную вниз (от которой отсчитываются углы), и, следовательно, создает восстанавливающий момент, то будет ясно, что M_ξ всегда должен иметь знак, противоположный знаку θ, а следовательно, и $\sin\theta$, так что по величине и по знаку будем иметь



Фиг. 1

$$M_\xi = -mgr \sin\theta.$$

Отсюда, применяя уравнение (7′) предыдущего пункта, заключаем, что уравнение движения физического маятника будет

$$A\ddot{\theta} = -mgr\sin\theta. \tag{8}$$

Теперь достаточно положить

$$\frac{A}{mr} = l, \tag{9}$$

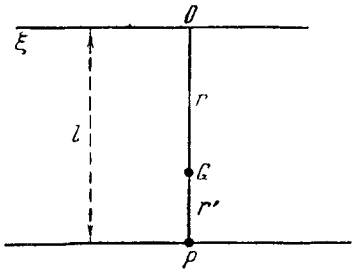
чтобы привести уравнение (8) к виду

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta, \tag{8'}$$

в котором мы узнаем уравнение, определяющее движение математического маятника длины l (гл. I, п. 34).

Так как дифференциальные уравнения одинаковы, то одинаковыми будут также и интегралы (само собой разумеется, при тождественных начальных условиях), откуда и следует, что *физический маятник движется как математический маятник длиной* A/mr.

Наконец, этот результат можно проверить и прямо, не обращаясь к гл. I, на основании того соображения, что математический маятник является только предельным случаем тяжелого твердого тела, которое может вращаться вокруг горизонтальной оси. Для этого достаточно повторить только что изложенные рассуждения и представить себе, что маятник представляет собой материальную точку P с массой m, соединенную с горизонтальной неподвижной осью ξ посредством твердого стержня (длины l и ничтожно малого веса), перпендикулярного к оси ξ и свободно вращающегося вокруг нее. В этом случае имеем $A = ml^2$, $r = l$, поэтому уравнение движения (8) тотчас же принимает вид (8′); из сравнения уравнений (8) и (8′) вытекает справедливость сказанного выше.



Фиг. 2.

Длина l, определяемая из равенства (9), называется *приведенной длиной физического маятника*.

Обозначим через O проекцию центра тяжести G на ось ξ и отложим на полупрямой OG отрезок $OP = l$ (фиг. 2). Из только что сказанного следует, что точка P, принадлежащая физическому маятнику, колеблется так, как если бы она не принадлежала этому телу, а представляла собой свободно подвешенную на нити OP массу m, т. е. математический маятник длины $OP = l$, подвешенный в точке O.

Точки O и P называются соответственно *центром подвеса и центром качаний* физического маятника, а прямая, параллельная оси $o\xi$ и проходящая через P, все точки которой колеблются как P, называется *осью качаний*.

Заметим еще, что ось качаний всегда находится на большем расстоянии от оси подвеса, чем центр тяжести. Действительно, если введем момент инерции твердого тела A_0 относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной ξ, то будем иметь (т. I, гл. X, п. 21)

$$A = A_0 + mr^2,$$

откуда на основании равенства (9) следует, что

$$l = \frac{A_0}{mr} + r,$$

а так как A_0/mr всегда положительно, то имеем

$$l > r.$$

7. Теорема Гюйгенса. Предположим, что маятник устроен так, что его можно подвешивать также и за ось качаний o. Тогда можно показать, что *приведенной длиной опять будет* l, т. е. *если ось качаний становится осью подвеса, то первоначальная ось подвеса становится осью качаний.*

Чтобы доказать это свойство, вычислим приведенную длину l' нашего маятника при втором расположении. Будем иметь

$$l' = \frac{A'}{mr'} = r' + \frac{A_0}{mr'},$$

где A' означает момент инерции относительно новой оси подвеса o и r' — расстояние G от o; достаточно принять во внимание очевидное тождество $l = r + r'$, чтобы придать этой формуле вид

$$l' = l - r + \frac{A_0}{m(l-r)}.$$

Но из выражения для l предыдущего пункта следует, что

$$l - r = \frac{A_0}{mr}$$

или

$$-r + \frac{A_0}{m(l-r)} = 0.$$

Следовательно,

$$l' = l,$$

как мы и утверждали.

Обратно, *если маятник колеблется одинаково при любой из двух параллельных осей подвеса* (расположенных в одной и той же плоскости, но с противоположных сторон и на различном расстоянии от центра тяжести), т. е. *если приведенные длины* l и l' *совпадают, то их общая величина будет равна расстоянию между обеими осями* (теорема Гюйгенса).

Действительно, из соотношений

$$l = r + \frac{A_0}{mr'}, \qquad l' = r' + \frac{A_0}{mr'}, \qquad l = l'$$

следует, что

$$(l - r)\, r = (l - r')\, r',$$

или

$$l\,(r - r') = r^2 - r'^2.$$

А так как, по предположению, расстояния r и r' двух осей от центра тяжести различны, то мы можем обе части равенства разделить на $r - r'$, после чего получим $l = r + r'$, что и требовалось доказать.

8. Экспериментальное определение ускорения g силы тяжести. На теореме Гюйгенса основывается применение физического маятника для экспериментального определения ускорения силы тяжести. Для этого употребляется так называемый *оборотный маятник*. Он представляет собой физический маятник, с которым соединены две параллельные оси (ребра призм), содержащие в своей плоскости и на различном расстоянии от них центр тяжести маятника; кроме того, оси расположены так, что маятник может качаться около каждой из них совершенно одинаково. В силу предыдущей теоремы расстояние l между обеими осями равно длине математического изохронного маятника, так что продолжительность T одного простого качания при малых амплитудах будет приблизительно выражаться (гл. I, п. 38) так:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Так как l и T легко измеряются опытным путем (l — посредством катетометра, T — путем измерения продолжительности достаточно большого числа качаний), то предыдущая формула может служить для определения g.

9. Опытное определение моментов инерции. Второе приложение теоремы Гюйгенса состоит в практическом определении моментов инерции твердых тел.

Если нужно определить момент инерции твердого тела относительно данной оси ξ, то для этого достаточно заставить его качаться около этой оси.

Обозначая через m' массу тела, через r' — расстояние его центра тяжести G' от оси, через A — искомый момент инерции, через T' — продолжительность одного размаха, будем иметь

$$T' = \pi \sqrt{\frac{A}{m'r'g}};$$

отсюда можно получить величину A, если, кроме T', известны m' и r'.

Но определить экспериментально с достаточной точностью величину r' трудно.

Поэтому удобно воспользоваться следующим искусственным способом, позволяющим также избежать определение величины m'.

Свяжем с данным телом неизменно вспомогательную массу m'', равномерно распределенную около оси ξ, и заставим качаться эту сложную систему. Пусть T будет период колебаний этой системы и μ — момент инерции вспомогательного тела относительно оси ξ. Неизвестное A можно будет выразить посредством T', T и μ.

Действительно, вводя временно также и расстояние r центра тяжести G всей системы от оси ξ, мы будем иметь формулу, аналогичную (4), т. е.

$$T = \pi \sqrt{\frac{A+\mu}{(m'+m'')\,r_g}}.$$

Далее, центр тяжести G'' массы m'' в силу предположенной симметрии лежит на оси ξ; с другой стороны (т. I, гл. X, пп. 12 и 10), применяя распределительное свойство и затем правило моментов к точкам G' (с массой m') и G'' (с массой m''), а также к их центру тяжести G, мы непосредственно получим

$$m'r' = (m'+m'')\,r.$$

Внося величину $(m'+m'')r$ в выражение для T, деля полученное при этом равенство почленно на равенство, определяющее T', и возводя потом результат в квадрат, получим

$$A = \frac{\mu T^2}{T^2 - T'^2}.$$

10. Динамические реакции и давления. Для того чтобы определить реакции оси, обратимся к общему случаю движения тела с закрепленной осью, находящегося под действием каких угодно сил (п. 5). Изменяя направления реакций на противоположные, найдем, как мы знаем, давления вращающегося тела на связь. В согласии с общими рассуждениями п. 4, мы ограничимся вычислением для этих давлений результирующей силы — $\mathbf{R}$ и результирующего момента — $\mathbf{M}$ относительно некоторого центра O, который мы предположим здесь неподвижным и лежащим на оси вращения твердого тела ξ. Более того, отвлекаясь от статических составляющих $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{M}$, мы будем рассматривать исключительно динамические составляющие — $\mathbf{R}^{(d)}$, — $\boldsymbol{M}^{(d)}$, определяемые из равенств

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}^{(d)} &= \dot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{M}^{(d)} &= \dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}, \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

где производные по времени берутся относительно осей, неизменно связанных с телом (подвижных). Таким образом, дело сводится

к фиксированию в твердом теле этих осей и к проектированию на них двух предыдущих уравнений.

Но прежде чем производить эти формальные выкладки, отметим одно непосредственное следствие, которое можно вывести из второго основного уравнения (5). Именно, принимая во внимание второе из уравнений (6), напишем второе основное уравнение (5) в виде

$$\mathbf{M} = -\boldsymbol{M} + \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = -\boldsymbol{M} + \mathbf{M}^{(d)}.$$

Припоминая, что результирующий момент M_ξ всех реакций относительно неподвижной оси ξ должен равняться нулю, так как речь идет о силах, приложенных в точках оси ξ, рассматривая эту ось как неизменно связанную с твердым телом и обозначая ее в соответствии с этим через x, заключаем, что в любой момент должно быть

$$\mathrm{M}_x = -M_x + \mathrm{M}_x^{(d)} = 0;$$

т. е. при движении собственно динамическая составляющая результирующего момента реакций относительно закрепленной оси остается равной результирующему моменту активных сил.

Наконец, то же заключение неявно вытекает и из выражений составляющих $\mathbf{R}^{(d)}$, $\mathbf{M}^{(d)}$, которые мы здесь и подсчитаем. С этой целью достаточно спроектировать уравнения (6′) на подвижные оси, которые, как уже было сказано, мы представляем себе выбранными таким образом, чтобы ось x совпадала с закрепленной осью вращения ξ.

В силу этого проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ сведутся к p, 0, 0, тогда как проекции u, v, w скорости поступательного движения вследствие неподвижности начала O будут равны нулю. Следовательно, общие формулы (29′), (30′) п. 15 гл. IV для проекций количества движения $\boldsymbol{Q}$ и результирующего момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ дадут выражения

$$Q_x = 0, \qquad Q_y = -mz_0p, \qquad Q_z = my_0p;$$
$$K_x = Ap, \qquad K_y = -C'p, \qquad K_z = -B'p,$$

где, как мы уже знаем, через m обозначена масса твердого тела, через A — его момент инерции относительно закрепленной оси, через B', C' — соответствующие произведения инерции и через y_0, z_0 — вторая и третья координаты центра тяжести. На основании равенства $K_x = Ap$ и принимая во внимание совпадение осей x и ξ, можно написать уравнение движения (7′) в виде

$$A\dot{p} = M_x; \tag{7''}$$

после этого, проектируя уравнения (6′) на подвижные оси и исключая (на основании рассуждений п. 4) $\dot{p}$ посредством (7″), мы получим искомые выражения проекций $\mathbf{R}^{(d)}$ и $\mathbf{M}^{(d)}$ через проекции угловой

скорости p, а также через структурные постоянные твердого тела и осевой момент внешних сил:

$$\left.\begin{aligned} R_x^{(d)} &= 0, \\ R_y^{(d)} &= -m\left(\frac{z_0}{A} M_x + y_0 p^2\right), \\ R_z^{(d)} &= m\left(\frac{y_0}{A} M_x - z_0 p^2\right); \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} M_x^{(d)} &= M_x, \\ M_y^{(d)} &= -\frac{C'}{A} M_x + B' p^2, \\ M_z^{(d)} &= -\frac{B'}{A} M_x - C' p^2. \end{aligned}\right\}$$

Первое замечательное следствие из этих формул мы получим, применяя их к твердому телу, у которого закреплена одна из главных центральных осей инерции.

В этом случае имеем $B' = C' = 0$ (так как ось x для твердого тела есть главная ось инерции) и $y_0 = z_0 = 0$ (так как центр тяжести находится на оси x); из предыдущих формул видно, что результирующая $\mathbf{R}^{(d)}$ динамических реакций равна нулю, а соответствующий результирующий момент $\mathbf{M}^{(d)}$ сводится к своей осевой составляющей $M_x \boldsymbol{i}$. Поэтому, возвращаясь к полным реакциям, на основании уравнений (5′) найдем

$$\mathbf{R} = -\boldsymbol{R}, \quad \mathbf{M} = -M_y \boldsymbol{j} - M_z \boldsymbol{k}.$$

Таким образом, если примем во внимание, что в статических условиях имеем $M_x = 0$ (т. I, гл. XIII, п. 8), то можно сказать, что для твердого тела, вращающегося даже неравномерно вокруг своей главной центральной оси инерции, давление оси на связь зависит от внешних сил так же, как и в статических условиях.

В более общем случае, если твердое тело закреплено вдоль главной оси инерции относительно произвольной точки O (каково бы ни было положение центра тяжести) и, следовательно, если мы имеем $B' = C' = 0$, остается в силе только второе из только что полученных уравнений, а на место первого надо будет подставить соответствующее уравнение из системы (5′), т. е.

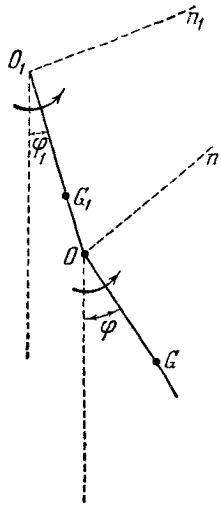
$$\mathbf{R} = -\boldsymbol{R} + \mathbf{R}^{(d)}.$$

Если, далее, предположим момент $\boldsymbol{M}$ внешних сил относительно точки O равным нулю, то из уравнения (7″) увидим, что движение твердого тела будет равномерным вращением, и, с другой стороны, из выражения результирующего момента $\mathbf{M}$ реакций найдем, что этот момент равен нулю. Поэтому реакции, испытываемые твердым телом вдоль оси, эквивалентны одной силе, приложенной в O.

Отсюда (как в этом легко можно было убедиться и ранее из основных уравнений и как это будет показано в явном виде в п. 12 следующей главы) следует, что равномерное вращение твердого тела сохранилось бы неизменным даже и тогда, когда ось x (главная ось инерции) оказалась бы закрепленной вместо двух или большего числа точек только в одной точке O (через которую она проходит).

§ 4. Двойной маятник

11. Двойным маятником называют систему с двумя степенями свободы, которая получается в результате соединения двух маятников посредством различных связей (твердых, упругих, электромагнитных и т. п.). С этими системами возможны различные интересные опыты. В частности, малые колебания двойных маятников в окрестности их положения устойчивого равновесия дают очень наглядное представление (*механические модели*) важных оптических и акустических явлений: интерференции и биения (см., в частности, упражнение 6 предыдущей главы).



Фиг. 3.

Мы ограничимся здесь рассмотрением так называемого *вертикального* [1]) *двойного маятника*, который можно схематически осуществить следующим образом.

К тяжелому твердому телу S_1, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси a_1, присоединяется другое тяжелое твердое тело S, которое в свою очередь может вращаться вокруг оси a, неизменно связанной с S_1 и параллельной a_1. При этом предполагается, что плоскость двух осей a_1 и a содержит центр тяжести G_1 тела S_1 (основной маятник) и вертикальная плоскость, перпендикулярная к a_1 и проходящая через G_1, содержит центр тяжести G тела S (второй маятник).

Очевидно, что речь идет о системе с двумя степенями свободы. Обозначим соответственно через O, O_1 точки пересечения осей a и a_1 с указанной выше перпендикулярной к ним плоскостью, проходящей через G и G_1 (плоскость прилагаемой фигуры 3). За обобщенные координаты двойного маятника мы примем углы φ и φ_1 отклонения от вертикали отрезков OG и O_1G_1, измеряемые в одном и том же направлении от нисходящих вертикалей, проходящих через точки O и O_1.

Так как имеется в виду изменяемая система с двумя степенями свободы, то два дифференциальных уравнения, необходимых для

[1]) Более обширное исследование этого класса приборов можно найти у H. Bouasse, Pendule, spiral, diapason, т. II, Paris, 1920, гл. XIII.