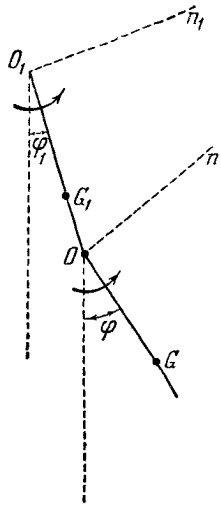
Отсюда (как в этом легко можно было убедиться и ранее из основных уравнений и как это будет показано в явном виде в п. 12 следующей главы) следует, что равномерное вращение твердого тела сохранилось бы неизменным даже и тогда, когда ось x (главная ось инерции) оказалась бы закрепленной вместо двух или большего числа точек только в одной точке O (через которую она проходит).

§ 4. Двойной маятник

11. Двойным маятником называют систему с двумя степенями свободы, которая получается в результате соединения двух маятников посредством различных связей (твердых, упругих, электромагнитных и т. п.). С этими системами возможны различные интересные опыты. В частности, малые колебания двойных маятников в окрестности их положения устойчивого равновесия дают очень наглядное представление (*механические модели*) важных оптических и акустических явлений: интерференции и биения (см., в частности, упражнение 6 предыдущей главы).



Фиг. 3.

Мы ограничимся здесь рассмотрением так называемого *вертикального* [1]) *двойного маятника*, который можно схематически осуществить следующим образом.

К тяжелому твердому телу S_1, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси a_1, присоединяется другое тяжелое твердое тело S, которое в свою очередь может вращаться вокруг оси a, неизменно связанной с S_1 и параллельной a_1. При этом предполагается, что плоскость двух осей a_1 и a содержит центр тяжести G_1 тела S_1 (основной маятник) и вертикальная плоскость, перпендикулярная к a_1 и проходящая через G_1, содержит центр тяжести G тела S (второй маятник).

Очевидно, что речь идет о системе с двумя степенями свободы. Обозначим соответственно через O, O_1 точки пересечения осей a и a_1 с указанной выше перпендикулярной к ним плоскостью, проходящей через G и G_1 (плоскость прилагаемой фигуры 3). За обобщенные координаты двойного маятника мы примем углы φ и φ_1 отклонения от вертикали отрезков OG и O_1G_1, измеряемые в одном и том же направлении от нисходящих вертикалей, проходящих через точки O и O_1.

Так как имеется в виду изменяемая система с двумя степенями свободы, то два дифференциальных уравнения, необходимых для

[1]) Более обширное исследование этого класса приборов можно найти у H. Bouasse, Pendule, spiral, diapason, т. II, Paris, 1920, гл. XIII.

определения движения двойного маятника, можно было бы вывести из основных уравнений, замечая, что для системы тел S, S_1 сохраняет свое значение теорема об осевом моменте количеств движения относительно оси a_1

$$\frac{dK_{a_1}}{dt} = M_{a_1}.$$

С другой стороны, ко второму маятнику S, вращающемуся вокруг оси a, которая перемещается параллельно самой себе, можно было бы применить теорему моментов в скалярной форме относительно этой оси a, вытекающую из уравнения (7) п. 17 гл. V. Мы обратимся, однако, к уравнениям Лагранжа, которые здесь имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1, \tag{10}$$

где, как мы знаем, T, Q, Q_1 обозначают соответственно живую силу двойного маятника и составляющие активных сил по лагранжевым координатам φ и φ_1 (обобщенные силы). Следовательно, все сводится к выражению через φ и φ_1 и через их производные по времени живой силы T и последующему определению аналогичных выражений для обобщенных сил Q и Q_1.

Полагая

$$O_1G_1 = r_1, \quad OG = r, \quad O_1O = \lambda,$$

заметим прежде всего, что живая сила тела S_1 определяется выражением (гл. IV, п. 10)

$$\frac{1}{2}A_1\dot{\varphi}_1^2,$$

где через A_1 обозначен момент инерции тела S_1 относительно неподвижной оси a_1, в то время как для определения живой силы твердого тела S, вращающегося около подвижной оси a, совершающей поступательное движение, надо обратиться к теореме Кёнига (гл. IV, п. 8). Если обозначим через m массу тела S, через A — его момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной a, и через v — скорость его центра тяжести G, то эта теорема дает следующее выражение для живой силы тела S:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2,$$

так что остается вычислить только скорость v. Эта постоянная скорость равна сумме абсолютной скорости точки O и относительной скорости точки G по отношению к O *). Обе эти составляющие скорости, перпендикулярные в плоскости фигуры соответственно к O_1O и OG, определяются по величине и по знаку (относительно

*) То есть скорости точки G по отношению к осям неизменного направления с началом в точке O. (*Прим. ред.*)

положительных перпендикуляров n_1 и n к O_1O и OG) выражениями $\lambda\dot{\varphi}_1$ и $r\dot{\varphi}$. Поэтому, складывая геометрически эти скорости и принимая во внимание, что с точностью до чисел, кратных 2π, имеем

$$n_1n = \widehat{n_1O_1O} - \varphi_1 + \varphi + \widehat{GOn} = \varphi - \varphi_1,$$

получим

$$v^2 = r^2\dot{\varphi}^2 + \lambda^2\dot{\varphi}_1^2 + 2r\lambda\dot{\varphi}\dot{\varphi}_1\cos(\varphi - \varphi_1); \tag{11}$$

теперь для живой силы T двойного маятника получаем выражение

$$T = \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}A_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}mv^2. \tag{12}$$

Что же касается действующих сил, то ограничимся наиболее естественным случаем, когда двойной маятник находится под действием только силы тяжести. Речь идет, следовательно, о консервативной силе, имеющей потенциал

$$U = m_1gz_1 + mgz,$$

где

$$z_1 = r_1\cos\varphi_1, \quad z = x\cos\varphi_1 + r\cos\varphi.$$

Вставляя значения z_1 и z, находим для U выражение через φ и φ_1

$$U = m_1gr_1\cos\varphi_1 + mg(\lambda\cos\varphi_1 + r\cos\varphi),$$

откуда

$$Q = \frac{\partial U}{\partial\varphi} = -mgr\sin\varphi, \quad Q_1 = \frac{\partial U}{\partial\varphi_1} = -(m_1r_1 + m\lambda)g\sin\varphi_1. \tag{13}$$

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы дать явную форму уравнениям движения тяжелого двойного маятника (10).

Отказываясь здесь от интегрирования этих уравнений, мы ограничимся приложением их к разбору одной частной задачи, а именно к отысканию условий, при которых оба маятника движутся с постоянной разностью фаз, т. е. так, как если бы они составляли одну неизменяемую систему.

Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы из уравнений движения двойного маятника в лагранжевой форме в любой момент во время движения получалось $\varphi_1 = \varphi + \psi$ (где $\psi = \text{const}$), если только это условие было удовлетворено в начальный момент. Далее, выражая, что уравнениям (10), после приведения их к явному виду посредством соотношений (11), (12), (13), можно будет удовлетворить, если положить в них $\varphi_1 = \varphi + \psi$, мы увидим, что для того, чтобы оба маятника колебались с постоянной разностью фаз, необходимо и достаточно, чтобы ψ имело величину

нуль и чтобы удовлетворялись тождественно два уравнения

$$[A + mr(r + \lambda)]\ddot{\varphi} + mgr\sin\varphi = 0,$$

$$[A_1 + m\lambda(r + \lambda)]\ddot{\varphi} + (m_1 r_1 + m\lambda)g\sin\varphi = 0,$$

каждое из которых имеет форму уравнения колебаний простого маятника (гл. I, п. 34); ясно, что для этой цели необходимо и достаточно, чтобы тождественно имело место соотношение

$$\begin{vmatrix} A + mr(r + \lambda) & mgr \\ A_1 + m\lambda(r + \lambda) & m_1 r_1 + m\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Этому условию, заключающему в себе только структурные элементы (геометрические и материальные) двух тел S_1 и S, составляющих двойной маятник, можно придать более простой вид, если рассматривать оба эти тела как два физических маятника с осями подвеса a_1 и a и ввести соответствующие приведенные длины l_1 и l (п. 6), определяемые соответственно равенством

$$l_1 = \frac{A_1}{m_1 r_1}$$

и, так как A есть центральный момент инерции, равенством

$$l = \frac{A}{mr} + r.$$

При этих обозначениях условие (14) постоянного совпадения фаз двух маятников, разрешенное относительно λ, принимает вид

$$\lambda = \frac{l_1 - l}{1 + \frac{m}{m_1}\frac{l - r}{r_1}},$$

когда масса m второго маятника ничтожна по сравнению с массой m_1 главного маятника. Это условие приближенно сводится к равенству

$$\lambda = l_1 - l.$$

Замечательный пример двойного маятника мы имеем в колоколе. При исследовании особенностей поведения одного колокола Вельтману пришлось развить предыдущие теоретические выводы [1]). В 1876 г. в Кёльне имел место случай, на первый взгляд очень странный, — не удавалось заставить звонить большой колокол, только что подвешенный тогда на башне собора: когда пытались звонить, язык совершал относительно колокола столь малые колебания, что не удавалось произвести удара, хотя язык и был достаточно длинен

[1]) Weltmann, Über die Bewegung einer Glocke, *Dinglers Polyt. Journal*, т. 220, 1876.

для того, чтобы достать до стенок колокола. Вельтман на основе предыдущих рассуждений установил, что для этого колокола $l_1 - l = 65{,}3$ *см* и $\lambda = 66{,}7$ *см*, так что при ничтожности массы языка по сравнению с массой колокола приближенное равенство фаз для колокола и языка было обнаружено из совпадения, хотя и грубого, $l_1 - l$ с λ.

Другой пример применения в технике тяжелого двойного маятника осуществляется плавающими маяками, у которых главным маятником является поплавок, а вторым маятником — фонарь.

§ 5. Движение, параллельное плоскости. Трение скольжения и качения

12. Общие соображения. Предположим, что на твердое тело S наложены такие связи и на него действуют такие силы, что оно движется параллельно некоторой неподвижной плоскости π. Этим мы хотим сказать, что всякое плоское сечение тела S, которое вначале параллельно π, должно оставаться таким же во все время движения. В силу предположенной твердости тела S очевидно, что в таком случае движение твердого тела будет однозначно определено движением какого-нибудь одного из этих плоских сечений. Следовательно, достаточно рассмотреть движение одного из них, например того, которое содержит центр тяжести G тела S; при этом ничто не мешает принять за плоскость π неподвижную плоскость, в которой движется это плоское сечение, содержащее центр тяжести.

Таким образом, мы видим, что тело S будет обладать тремя степенями свободы, так как за параметры, определяющие положение тела S, можно принять координаты ξ_0, η_0 центра тяжести G относительно неподвижных осей $\Omega\xi\eta$ в плоскости π и угол θ, который ориентированная прямая, неизменно связанная с S и лежащая в плоскости π, образует, например, с осью ξ.

Естественно, что для того, чтобы движение твердого тела S имело только что описанный характер, действующие силы и связи, наложенные на тело S, а также структура самого тела должны удовлетворять соответствующим условиям. В следующем пункте будет показано, что для того, чтобы твердое тело S, предполагаемое вначале находящимся в движении, параллельном неподвижной плоскости π, продолжало двигаться параллельно этой плоскости, достаточно, чтобы:

а) *результирующая внешних сил (прямо приложенных и реакций связей) была параллельна плоскости π и результирующий момент тех же сил относительно произвольной точки плоскости π был перпендикулярен к этой плоскости*;

б) *перпендикуляр, проведенный в начальный момент к плоскости π из центра тяжести G, был для S главной осью инерции.*