

для того, чтобы достать до стенок колокола. Вельтман на основе предыдущих рассуждений установил, что для этого колокола $l_1 - l = 65,3$ см и $\lambda = 66,7$ см, так что при ничтожности массы языка по сравнению с массой колокола приближенное равенство фаз для колокола и языка было обнаружено из совпадения, хотя и грубо, $l_1 - l$ с λ .

Другой пример применения в технике тяжелого двойного маятника осуществляется плавающими маяками, у которых главным маятником является поплавок, а вторым маятником — фонарь.

§ 5. Движение, параллельное плоскости. Трение скольжения и качения

12. Общие соображения. Предположим, что на твердое тело S наложены такие связи и на него действуют такие силы, что оно движется параллельно некоторой неподвижной плоскости π . Этим мы хотим сказать, что всякое плоское сечение тела S , которое вначале параллельно π , должно оставаться таким же во все время движения. В силу предположенной твердости тела S очевидно, что в таком случае движение твердого тела будет однозначно определено движением какого-нибудь одного из этих плоских сечений. Следовательно, достаточно рассмотреть движение одного из них, например того, которое содержит центр тяжести G тела S ; при этом ничто не мешает принять за плоскость π неподвижную плоскость, в которой движется это плоское сечение, содержащее центр тяжести.

Таким образом, мы видим, что тело S будет обладать тремя степенями свободы, так как за параметры, определяющие положение тела S , можно принять координаты ξ_0, τ_0 центра тяжести G относительно неподвижных осей $\Omega\epsilon\eta$ в плоскости π и угол θ , который ориентированная прямая, неизменно связанная с S и лежащая в плоскости π , образует, например, с осью ξ .

Естественно, что для того, чтобы движение твердого тела S имело только что описанный характер, действующие силы и связи, наложенные на тело S , а также структура самого тела должны удовлетворять соответствующим условиям. В следующем пункте будет показано, что для того, чтобы твердое тело S , предполагаемое вначале находящимся в движении, параллельном неподвижной плоскости π , продолжало двигаться параллельно этой плоскости, достаточно, чтобы:

а) результирующая внешних сил (прямо приложенных и реакций связей) была параллельна плоскости π и результирующий момент тех же сил относительно произвольной точки плоскости π был перпендикулярен к этой плоскости;

б) перпендикуляр, проведенный в начальный момент к плоскости π из центра тяжести G , был для S главной осью инерции.

Отметим теперь же, что это второе условие само собой выполняется, если речь идет не о твердом теле в собственном смысле, а о неизменяемой материальной плоской системе, целиком лежащей в плоскости π , или, как мы будем говорить, о *плоском* (твердом) *диске*. Действительно, если в этом случае обозначим через ζ третью ось системы отсчета $\Omega\xi\zeta$, перпендикулярную к π , то третий координаты всех материальных точек системы S будут равны нулю, и, следовательно, обратятся в нуль два произведения инерции

$$\sum_i m_i \xi_i \zeta_i, \quad \sum_i m_i \eta_i \zeta_i.$$

В последующем изложении этого параграфа мы будем заниматься действительным определением движения, допуская прямо, что условия а) и б) выполнены для материальной системы, а для удобства представления и изложения мы будем всюду говорить о плоском диске, представляя себе вместо заданной системы S диск, если система и не является таким диском. Центр тяжести G этого диска мы будем считать совпадающим с центром тяжести системы S , массу его m — равной массе системы S и главный центральный момент инерции C относительно той оси, неизменно связанной с телом и проходящей через центр тяжести G , которая, по предположению, вначале перпендикулярна к π , — равным $m\delta^2$ (где δ есть радиус инерции).

13. Динамические и структурные условия плоского движения. Покажем теперь, почему условия а) и б), приведенные в предыдущем пункте, достаточны для обеспечения того, чтобы движение твердого тела постоянно оставалось параллельным неподвижной плоскости π , если начальное состояние движения было параллельно π .

С этой целью возьмем основные уравнения (1) и (2'), принимая за центр приведения моментов центр тяжести G системы и относя эти уравнения к системе координат $\Omega\xi\zeta$, плоскость которой $\zeta = 0$, как и в предыдущем пункте, совпадает с плоскостью π , проходящей через центр тяжести G . В силу предположения а) R_ξ, M_ξ, M_η постоянно равны нулю, так что если спроектируем первое основное уравнение на ось ζ , а второе — на оси ξ и η , то получим три скалярных уравнения

$$\frac{dQ_\zeta}{dt} = 0, \quad \frac{dK_\xi}{dt} = 0, \quad \frac{dK_\eta}{dt} = 0,$$

которые тотчас же дают

$$Q_\zeta = \text{const}, \quad K_\xi = \text{const}, \quad K_\eta = \text{const}. \quad (15)$$

Если теперь примем во внимание предположение б) и допустим, что в начальный момент движение параллельно плоскости π , то легко убедимся, что все постоянные в правых частях равенств (15) равны нулю. Чтобы доказать это, достаточно убедиться, что они

равны нулю в начале движения; для этой цели начнем с замечания, что из того предположения, что начальное движение должно происходить в плоскости, параллельной плоскости $\zeta = 0$, следует, что центр тяжести G движется параллельно этой плоскости, так что в начальный момент (и, следовательно, в течение всего движения) Q_ζ безусловно будет равно нулю. Что же касается центрального результирующего момента количества движения K , то он связан с угловой скоростью ω посредством аффинора инерции, а в силу предположения б) направление оси ζ , перпендикулярной к π и в начале движения являющейся главной осью аффинора инерции (главной осью инерции для твердого тела), будет также и направлением вектора ω , так как этот вектор вначале направлен по оси ζ ; то же самое будет иметь место и для вектора K . Поэтому в начале движения (а следовательно, и во все время движения) обе проекции K_ζ , K_η вектора K обращаются в нуль.

Остается только доказать, что из постоянного равенства нулю величин Q_ζ , K_ζ , K_η следует, что движение будет происходить всегда в плоскости, параллельной плоскости π , если только оно было таковым вначале; из уравнения $Q_\zeta = 0$ и из известного тождества $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_G$ заключаем, что центр тяжести движется в плоскости, параллельной π . Теперь достаточно убедиться, что та главная ось инерции твердого тела, которую мы предполагаем вначале перпендикулярной к этой плоскости, остается перпендикулярной к ней во все время движения.

Для этой цели согласно с тем, что было сказано в общем случае в п. 3, введем сначала систему отсчета, неизменно связанную с телом, и воспользуемся в этом частном случае известными классическими уравнениями (Эйлера), большую важность которых мы покажем в следующей главе.

За такую систему, неизменно связанную с телом, возьмем систему осей $Gxyz$, в которой ось Gz совпадает с главной осью инерции, вначале перпендикулярной к плоскости π (и ориентированной так же, как Ω^ζ), а оси Gx и Gy представляют собой две другие главные оси инерции, проходящие через G (или две любые другие оси, перпендикулярные между собой, если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения относительно Gz). Проекции результирующего момента количества движения на оси системы $Gxyz$ определяются (гл. IV, п. 16) равенствами

$$K_x = Ap, \quad K_y = Bq, \quad K_z = Cr. \quad (16)$$

С другой стороны, если обозначим через x неизменный в пространстве единичный вектор неподвижной оси Ω^ζ , перпендикулярный к π , то результирующий момент внешних сил относительно центра тяжести вследствие того, что компоненты M_ζ , M_η постоянно равны нулю, можно представить в виде $\mathbf{M} = M_x \mathbf{x}$; поэтому второе основное урав-

нение, отнесенное к осям, неизменно связанным с телом, т. е. уравнение (4') п. 3, принимает вид

$$\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = M_z \mathbf{x}.$$

После проектирования на подвижные оси (неизменно связанные с телом) это уравнение даст для неизвестных проекций p, q, r вектора $\boldsymbol{\omega}$ три скалярных уравнения (уравнения Эйлера):

$$\left. \begin{array}{l} A\dot{p} - (B - C)qr = M_z\gamma_1, \\ B\dot{q} - (C - A)rp = M_z\gamma_2, \\ C\dot{r} - (A - B)pq = M_z\gamma_3, \end{array} \right\} \quad (17)$$

где через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ обозначены проекции вектора \mathbf{x} на подвижные оси, или, что одно и то же, направляющие косинусы оси Ω_z относительно системы $Gxuz$.

Величины γ входят в задачу как вспомогательные неизвестные и прежде всего в силу их геометрического значения связаны конечным соотношением

$$\mathbf{x}^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (18)$$

С другой стороны, неизменяемость в пространстве единичного вектора \mathbf{x} выражается дифференциальным условием $d\mathbf{x}/dt = 0$ или же, при отнесении к подвижным осям (т. I, гл. IV, п. 10), соотношением

$$\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = 0,$$

которое после проектирования на оси $Gxuz$ приводит к уравнениям (Пуассона):

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \\ \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \\ \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{array} \right\} \quad (19)$$

Шесть дифференциальных уравнений (17), (19) вместе с конечным соотношением (18) определяют закон, по которому изменяется в зависимости от времени вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ внутри тела и, следовательно, результирующий момент \mathbf{K} количеств движения. Мы знаем, что по теореме о единственности интегралов систем дифференциальных уравнений это изменение с временем однозначно определяется начальными значениями, которые при единственном условии (18) можно произвольно приписывать неизвестным функциям $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Далее, состояние движения, параллельное плоскости π , которое мы предполагаем у тела вначале, включает в себя, очевидно, отно-

сительно подвижных осей, произвольное начальное значение r_0 для r и начальные значения

$$p = q = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1 \quad (20)$$

для остальных пяти функций.

Если мы предположим теперь, что равенства (20) сохраняют свое значение не только в начальный момент, но также и для всякого другого значения времени, то сейчас же увидим, что равенства (17), (19) будут выполняться тождественно, за исключением третьего из (17), которое принимает вид

$$Cr = M_\zeta$$

и, начиная с начального значения r_0 , определяет r в функции от времени.

По упомянутой уже теореме о единственности, это и будет решением уравнений (17), (19), соответствующим заданному начальному состоянию движения, параллельного плоскости π ; из того, что во все время движения $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, следует, что главная ось инерции Gz постоянно сохраняет направление неподвижной оси $\Omega\zeta$, перпендикулярной к плоскости π ; в согласии с тем обстоятельством, что центр тяжести движется в плоскости π , это приводит, как уже было отмечено, к заключению, что движение твердого тела оказывается параллельным этой плоскости.

14. Основные уравнения плоского движения. Предположим теперь, что структурные и динамические условия, при которых движение твердого тела оказывается параллельным неподвижной плоскости, выполнены; в этом случае, как мы видели в п. 12, можно прямо обратиться к изучению движения твердого диска S в его плоскости π .

Выбрав в плоскости π две неподвижные оси, примем согласно с условиями п. 12 за параметры, определяющие положение диска, координаты ξ_0 , η_0 центра тяжести G и угол θ , составленный с осью $\Omega\xi$ какой-нибудь ориентированной прямой, неизменно связанной с S , и возьмем снова основные уравнения (1), (2'), принимая за центр приведения моментов центр тяжести. Уравнение (1), так как согласно предположению векторы Q и R оба параллельны π , равносильно, в этой плоскости, двум скалярным уравнениям, которые получаются проектированием его на две оси, ξ и η , и на основании тождества $Q = m\omega_G$ сводятся к следующим:

$$m\ddot{\xi}_0 = R_\xi, \quad m\ddot{\eta}_0 = R_\eta. \quad (21)$$

Аналогично, на основании предположения, что K и M перпендикулярны к плоскости π , уравнение (2') будет равносильно при рассмотрении плоского движения скалярному уравнению, которое полу-

чится проектированием (2') на третью ось системы $\Omega\xi\eta\zeta$. Чтобы придать явный вид этому уравнению, положим $\omega = \dot{\theta}$, в силу чего ω означает для диска S угловую скорость уже не только по абсолютной величине, как это было вначале, но и с надлежащим знаком, а именно: в любой момент она будет положительной или отрицательной в зависимости от того, вращается ли диск в рассматриваемый момент в направлении от $\Omega\xi$ к $\Omega\eta$ (через прямой угол) или в противоположном направлении. Проекция на ось $\Omega\zeta$ результирующего момента количества движения K относительно центра тяжести определится тогда (гл. IV, п. 16) равенством $K_z = C\omega = m\delta^2\omega$, так что искомое скалярное уравнение примет вид

$$m\delta^2\dot{\omega} = M_z. \quad (22)$$

Уравнения (21) (плоского движения центра тяжести) и уравнение (22) (уравнение моментов относительно центра тяжести) представляют собой основные уравнения плоского движения диска и, что вполне естественно, совпадают с уравнениями Лагранжа относительно параметров ξ_0, η_0, θ , которые получились бы на основании известного выражения для живой силы (гл. V, п. 49)

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \delta^2 \dot{\theta}^2).$$

Если вместо неподвижных осей $\Omega\xi\eta$ мы отнесли бы диск S (как это уже делалось в предыдущем пункте) к подвижным осям Gxu , неизменно связанным с S , то уравнение (22) осталось бы, очевидно, неизменным. Что же касается уравнений (21), то надо было бы их преобразовать; но мы достигнем результата быстрее, если спроектируем на подвижные оси первое основное уравнение, отнесенное к ним, т. е. уравнение

$$\dot{Q} + \omega \times Q = R.$$

Если обозначим через v_x, v_y проекции на оси Gxu скорости центра тяжести, то аналогичные проекции вектора Q будут $m\dot{v}_x, m\dot{v}_y$, и мы приедем, таким образом, к уравнениям

$$m(\dot{v}_x - \omega v_y) = R_x, \quad m(\dot{v}_y + \omega v_x) = R_y. \quad (21')$$

Отметим еще, что все это сохраняет свое значение в предположении, что мы принимаем за центр приведения моментов центр тяжести. Если же, наоборот, центр моментов берется в произвольной точке O плоскости π , причем закон движения точки O должен быть задан посредством выражения ее координат ξ', η' в функции времени, то K_z нужно будет определить на основании известного тождества

$$K = K_G + \overrightarrow{OG} \times Q.$$

Таким образом, получим

$$K_z = m \{ \delta^2 \omega + (\xi_0 - \xi') \dot{\eta}_0 - (\eta_0 - \eta') \dot{\xi}_0 \}.$$

15. О трении качения в динамическом случае. Относительно *трения скольжения* мы знаем уже (гл. I, § 8), что при движении оно направлено прямо противоположно скорости точки соприкосновения между телом и опорой и имеет максимальную величину fN , где f обозначает коэффициент трения, а N — абсолютную величину нормальной реакции опоры.

Что же касается *трения качения*, то мы уже видели в Статике (т. I, гл. XIII, § 6), что его можно схематически представить некоторой парой с моментом Γ_t , у которого следует отличать касательную составляющую Γ_t , или *момент трения качения*, и нормальную Γ_n , или *момент трения верчения*; в статическом случае всегда принимают, что величины этих двух моментов не могут превосходить соответственно двух максимумов $h_1 N$, $h_2 N$, где h_1 и h_2 обозначают соответствующие коэффициенты трения.

Далее, в динамическом случае допускается, как дальнейший эмпирический закон, что величина каждого из двух моментов Γ_t , Γ_n сохраняет в течение всего времени движения свое максимальное значение, а направления этих моментов таковы, что сопротивление вращению твердого тела в любой момент оказывается наиболее эффективным.

Более точно это означает, что ориентированное направление Γ_t , остающееся a priori неопределенным, когда угловая скорость ω равна нулю, в любой момент, когда $\omega \neq 0$, будет прямо противоположно направлению касательной составляющей вектора ω , в то время как составляющая Γ_n , у которой при $\omega = 0$ остается неопределенной только сторона обращения, при $\omega \neq 0$ будет направлена противоположно нормальной составляющей вектора ω .

Например, в случае цилиндра, который, будучи опертым на шероховатую плоскость вдоль какой-нибудь своей образующей g , может вращаться (мгновенно) вокруг нее и скользить в направлении, перпендикулярном к ней, трение верчения отсутствует, трение же качения имеет момент Γ_t , направленный по образующей g в сторону, обратную вращению, когда оно не равно нулю.

§ 6. Колесо на горизонтальной плоскости

16. Уравнения движения. В качестве первого приложения общих рассуждений, изложенных в предыдущем параграфе относительно движения, параллельного плоскости, мы рассмотрим здесь движение колеса или пары колес (колесного ската), насаженных на одну и ту же ось, по горизонтальному полу, когда действующие силы соответствуют или случаю ведомого, или случаю самодвижущегося экипажа.