Таким образом, получим

$$K_\zeta = m\{\delta^2\omega + (\xi_0 - \xi')\dot{\eta}_0 - (\eta_0 - \eta')\dot{\xi}_0\}.$$

15. О трении качения в динамическом случае. Относительно *трения скольжения* мы знаем уже (гл. I, § 8), что при движении оно направлено прямо противоположно скорости точки соприкосновения между телом и опорой и имеет максимальную величину fN, где f обозначает коэффициент трения, а N — абсолютную величину нормальной реакции опоры.

Что же касается *трения качения*, то мы уже видели в Статике (т. I, гл. XIII, § 6), что его можно схематически представить некоторой парой с моментом $\mathbf{\Gamma}$, у которого следует отличать касательную составляющую $\mathbf{\Gamma}_\tau$, или *момент трения качения*, и нормальную $\mathbf{\Gamma}_n$, или *момент трения верчения*; в статическом случае всегда принимают, что величины этих двух моментов не могут превосходить соответственно двух максимумов h_1N, h_2N, где h_1 и h_2 обозначают соответствующие коэффициенты трения.

Далее, в динамическом случае допускается, как дальнейший эмпирический закон, что величина каждого из двух моментов $\mathbf{\Gamma}_\tau$, $\mathbf{\Gamma}_n$ сохраняет в течение всего времени движения свое максимальное значение, а направления этих моментов таковы, что сопротивление вращению твердого тела в любой момент оказывается наиболее эффективным.

Более точно это означает, что ориентированное направление $\mathbf{\Gamma}_\tau$, остающееся a priori неопределенным, когда угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ равна нулю, в любой момент, когда $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, будет прямо противоположно направлению касательной составляющей вектора $\boldsymbol{\omega}$, в то время как составляющая $\mathbf{\Gamma}_n$, у которой при $\boldsymbol{\omega} = 0$ остается неопределенной только сторона обращения, при $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ будет направлена противоположно нормальной составляющей вектора $\boldsymbol{\omega}$.

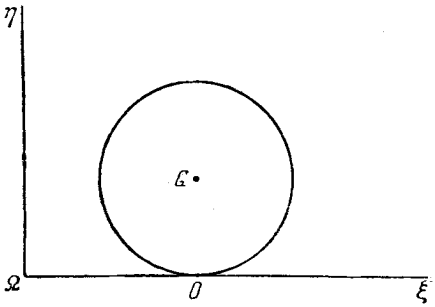
Например, в случае цилиндра, который, будучи опертым на шероховатую плоскость вдоль какой-нибудь своей образующей g, может вращаться (мгновенно) вокруг нее и скользить в направлении, перпендикулярном к ней, трение верчения отсутствует, трение же качения имеет момент $\mathbf{\Gamma}_\tau$, направленный по образующей g в сторону, обратную вращению, когда оно не равно нулю.

§ 6. Колесо на горизонтальной плоскости

16. Уравнения движения. В качестве первого приложения общих рассуждений, изложенных в предыдущем параграфе относительно движения, параллельного плоскости, мы рассмотрим здесь движение колеса или пары колес (колесного ската), насаженных на одну и ту же ось, по горизонтальному полу, когда действующие силы соответствуют или случаю ведомого, или случаю самодвижущегося экипажа.

Имея в виду только движение, параллельное неподвижной плоскости, можно на основе предварительных замечаний из п. 12 ограничиться только круговым диском S, радиус которого обозначим через r, а полную массу — через m. Предположим, что центр тяжести G совпадает с геометрическим центром диска, и рассмотрим обычный случай, когда плоскость диска S вертикальна и диск движется вдоль горизонтальной прямолинейной колеи, которую примем за неподвижную ось $\Omega\xi$, направив ось $\Omega\eta$ по вертикали вверх (фиг. 4).

Пусть на диск S помимо его веса $p = mg$ и реакций опоры с трением (скольжения и качения) действует горизонтальная сила, приложенная к центру тяжести, и активная пара с моментом, перпендикулярным к диску. Обозначим проекцию горизонтальной силы на ось $\Omega\xi$ через τ и осевой момент активной пары через $-\mathfrak{M}$, так что $\mathfrak{M}$ будет положительным, если пара стремится вращать диск в сторону от η к ξ, и отрицательным, если она стремится вращать его в обратную сторону; обозначая через Γ аналогичный осевой момент пары трения качения, введем результирующий осевой момент



Фиг. 4.

$$M = \Gamma - \mathfrak{M}. \tag{23}$$

Далее, так как центр тяжести G остается на постоянном расстоянии от пола, то его ускорение по вертикали равно нулю, так что второе из основных уравнений (21) будет просто выражать, что нормальная реакция N пола уравновешивает вес диска

$$N = p = mg; \tag{24}$$

для определения движения остаются первое из уравнений (21) (уравнение горизонтального движения центра тяжести) и уравнение (22) (уравнение моментов). Если обозначить через V проекцию на ось $\Omega\xi$ скорости центра тяжести, через A — касательную составляющую реакции (трение скольжения), то уравнения движения примут вид

$$\left.\begin{aligned} m\dot{V} &= \tau + A, \\ m\delta^2\dot{\omega} &= M + rA. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Необходимо, кроме того, иметь в виду, что скорость v_0 точки O соприкосновения колеса с плоскостью в любой момент будет связана со скоростью v_G центра тяжести известным соотношением

$$v_0 = v_G + \omega \times \overrightarrow{GO},$$

так что, проектируя на ось ξ, получим *для скорости скольжения* σ колеса (касательная составляющая скорости v_0) выражение

$$\sigma = V + r\omega. \tag{26}$$

Отсюда, в частности, следует, что во всяком состоянии чистого качения ($\sigma = 0$) должно быть

$$V + r\omega = 0; \tag{27}$$

в любом промежутке времени, в котором это соотношение остается выполненным, т. е. в котором имеет место *чистое качение*, удовлетворяются два уравнения, которые выводятся из уравнений (25) путем исключения из них ω посредством (27) и решения относительно $\dot{V}$ и A, т. е. уравнения

$$\left.\begin{aligned} m\left(1+\frac{\delta^2}{r^2}\right)\dot{V} &= \tau - \frac{M}{r}, \\ \left(1+\frac{r^2}{\delta^2}\right)A &= -\tau - \frac{r}{\delta^2}M. \end{aligned}\right\} \tag{25'}$$

17. Условия чистого качения при трогании с места или при равномерном движении. Обратимся прежде всего к промежутку времени, когда оба движущие фактора, горизонтальная сила τ и пара с осевым моментом $-\mathfrak{M}$, стремятся способствовать движению колеса. Если представим себе ось ξ направленной в сторону движения, иными словами, таким образом, чтобы скорость V центра тяжести была положительной, то надо будет допустить, что положительными будут также τ и $\mathfrak{M}$; посмотрим, каким условиям должны будут удовлетворять эти два количества для того, чтобы чистое качение было совместно с эмпирическим законом трения, когда колесо начинает движение или, возможно, достигло своей постоянной скорости.

Это последнее обстоятельство выражается, очевидно, условием

$$\dot{V} \geqslant 0. \tag{28}$$

С другой стороны, неравенство $V > 0$ на основании условия чистого качения (27) влечет за собой $\omega < 0$; и так как трение качения должно противодействовать вращению, то соответствующий осевой момент Γ в этом случае будет положительным; он будет определяться, как мы знаем, выражением

$$\Gamma = hp, \tag{29}$$

где h есть параметр (коэффициент) трения качения.

Что касается трения скольжения A, то так как точка соприкосновения во всяком состоянии движения является мгновенным центром вращения и поэтому совпадающая с ней точка колеса имеет скорость, равную нулю, то существует единственное условие

$$|A| \leqslant fp, \tag{30}$$

где f есть коэффициент статического трения. Таким образом, все сводится к выявлению ограничений, вытекающих для τ и $\mathfrak{M}$ из соотношений (28), (29) и (30) через посредство уравнений (25′), которые, как мы видели, остаются справедливыми при чистом качении.

Исключая M из первого из уравнений (25′) и равенства

$$M = hp - \mathfrak{M}, \tag{23′}$$

представляющего собой непосредственное следствие соотношений (23), (29), и принимая во внимание (28), получим следующее условие:

$$\tau + \frac{\mathfrak{M}}{r} \geqslant \frac{hp}{r},$$

правая часть которого есть *предельное значение силы тяги* (*предельная тяга*) *при качении*, уже определенное в Статике (т. I, гл. XIII, п. 26); таким образом, можно сказать, что *полное действие силы и движущей пары, оцениваемое посредством двучлена* $\tau + \frac{\mathfrak{M}}{r}$, *должно превосходить предельное значение силы тяги при качении, когда колесо движется ускоренно, и должно равняться предельному значению этой силы при его равномерном движении* ($V = \text{const}$).

Аналогично получаются следствия из второго из уравнений (25′) и условия (30). Смотря по тому, будет ли трение скольжения A отрицательным или положительным, т. е. сопротивлением или ускоряющей силой, условие (30) на основании второго из уравнений (25′) можно написать в виде

$$\tau + \frac{r}{\delta^2} M \leqslant fp \left(1 + \frac{r^2}{\delta^2}\right) \tag{30а′}$$

или, соответственно, в виде

$$-\tau - \frac{r}{\delta^2} M \leqslant fp \left(1 + \frac{r^2}{\delta^2}\right). \tag{30б′}$$

Если принять во внимание равенство (23′) и для краткости положить

$$\Delta = -\tau + \frac{r}{\delta^2} \mathfrak{M}, \tag{31}$$

то оба неравенства (30а′), (30б″) примут соответственно вид

$$-\Delta \leqslant p \left\{ f + \frac{r^2}{\delta^2} \left(f - \frac{h}{r}\right) \right\}, \tag{30а″}$$

$$\Delta \leqslant p \left\{ f + \frac{r^2}{\delta^2} \left(f + \frac{h}{r}\right) \right\}. \tag{30б″}$$

Далее, важно отметить, что на практике, т. е. когда речь идет действительно о колесе или о двух колесах, соединенных в пару,

предельное значение силы тяги при качении hp/r будет значительно меньше аналогичного предельного значения силы трения скольжения fp (т. I, гл. XIII, п. 26), так что законно ввести добавочное условие

$$\frac{h}{r} < f, \tag{32}$$

которое мы при дальнейшем исследовании всегда будем предполагать выполненным.

Согласно этому условию правая часть неравенства (30а″) будет положительна, как и правая часть неравенства (30б″). Что же касается левых частей, то необходимо заметить, что левые части неравенств (30а′) и (30б′), по предположению, обе положительны, следовательно, то же самое, несомненно, можно сказать и о левой части неравенства (30б″), которая получилась из левой части (30б′) путем прибавления существенно положительного количества hrp/δ^2. Наоборот, левая часть $-\Delta$ неравенства (30б″), которая выводится из левой, существенно положительной части неравенства (30а′), путем вычитания hrp/δ^2 или остается положительной, и тогда правая часть (30а″) образует истинную границу для $-\Delta$, или же будет отрицательной, что означает, что ее абсолютная величина Δ будет меньше hrp/δ^2, т. е. удовлетворяет более узкому неравенству (30б″).

Наконец, если назовем *разностью сил* абсолютную величину выражения $-\tau + r\mathfrak{M}/\delta^2$, то увидим, что *эта разность не должна превосходить того или другого из двух известных пределов* (приблизительно равных между собой вследствие малости h/r)

$$p\left\{f + \frac{r_2}{\delta^2}\left(f \mp \frac{h}{r}\right)\right\},$$

из которых нужно взять *меньший или больший, в зависимости от того, будет ли*

$$\tau \gtrless \frac{r}{\delta^2}\mathfrak{M},$$

или, если применить более наглядное, хотя и не совсем точное выражение, смотря по тому, преобладает ли движущая сила или движущая пара.

Особого рассмотрения заслуживают два крайних случая, в которых движущее действие осуществляется исключительно посредством силы (везомая повозка) или исключительно посредством пары (самодвижущийся экипаж). В первом случае ($\mathfrak{M} = 0$) имеют силу равенства (28′) и (30а″) при $\mathfrak{M} = 0$, во втором — равенства (28′) и (30б″) при $\tau = 0$.

18. Период остановки. Торможение. Рассмотрим теперь фазу остановки, наступающую тогда, когда после прекращения движущего действия на колесо действуют тормозные колодки или дается контр-

пар. Это обстоятельство можно представить, полагая в уравнениях (25) $\tau = 0$ и подставляя вместо (23) равенство

$$M = \Gamma + \mathfrak{M}, \tag{23''}$$

где $\mathfrak{M}$, предполагаемое положительным, обозначает момент тормозящего действия, осуществленного произвольным образом.

Найдем также и здесь условия, при которых движение остается чистым качением.

Речь идет, очевидно, о замедленном движении, потому что первое из уравнений (25″) сводится к следующему:

$$m\left(1 + \frac{\delta^2}{r^2}\right) V = -\frac{M}{r}. \tag{25a''}$$

Левая часть этого уравнения существенно отрицательна.

Трение скольжения A будет также отрицательным на основании второго из уравнений (25′), которое здесь принимает вид

$$\left(1 + \frac{r^2}{\delta^2}\right) A = -\frac{r}{\delta^2} M; \tag{25б''}$$

на основании законов трения все сводится к выражению того, что абсолютная величина A не превосходит fp. Мы получаем, таким образом, условие

$$\frac{M}{r} \leqslant fp\left(1 + \frac{\delta^2}{r^2}\right), \tag{33}$$

из которого, пользуясь равенствами (23″) и (29) для момента $\mathfrak{M}$ тормозящего действия, находим ограничение

$$\frac{\mathfrak{M}}{r} \leqslant p\left\{f - \frac{h}{r} + f\frac{\delta^2}{r^2}\right\}; \tag{33'}$$

правая часть этого соотношения на основании предположения (32) будет существенно положительной. Неравенство (33′) и будет условием того, чтобы тормозящее действие не вызывало скольжения.

Наиболее эффективное торможение т. е. торможение, способное произвести остановку в наименьшее возможное время, мы получим в том случае, когда замедление $-\dot{V}$ будет иметь максимум; для этого на основании уравнения (25″а) требуется, чтобы полный момент M был максимальным. Если желательно во что бы то ни стало избежать скольжения, то вместо условий (33), (33′) необходимо взять равенства

$$\frac{M}{r} = fp\left(1 + \frac{\delta^2}{r^2}\right), \tag{34}$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{r} = p\left\{f - \frac{h}{r} + f\frac{\delta^2}{r^2}\right\}; \tag{34'}$$

в этом случае замедление на основании соотношения (25′) принимает постоянное значение

$$-\dot{V}=fg.$$

Таким образом, мы видим, что при наиболее эффективном торможении, когда скольжение отсутствует, колесо движется равнозамедленно; продолжительность торможения при начальной скорости V_0 определяется по известной элементарной формуле (т. I, гл. II, п. 23) выражением

$$\frac{V_0}{fg}.$$

Это и есть *правильное торможение*.

Можно было бы предполагать, что дальнейшее увеличение момента $\mathfrak{M}$ тормозящего действия, хотя и будет сопровождаться неизбежным скольжением, так как перестанет удовлетворяться условие (33′), вызовет остановку в более короткий срок. Легко, однако, доказать, что этого на самом деле не будет и что, наоборот, более интенсивное торможение затянет его продолжительность.

Действительно, возьмем снова первое из общих уравнений (25), полагая в нем $\tau=0$, т. е. уравнение

$$m\dot{V}=A.$$

Так как, по предположению, условие (34′) более не выполняется, то движение будет сопровождаться скольжением; трение скольжения вместо статического становится динамическим, поэтому надо положить $A=fp$, где f есть коэффициент динамического трения, который только в первом и грубом приближении можно отождествить с коэффициентом статического трения; если же речь идет о больших скоростях, то этот коэффициент принимает, как мы это уже видели (гл. I, п. 45), значения f^*, на много меньшие значения, соответствующего моменту начала движения. Таким образом, замедление сводится в силу только что написанного уравнения к f^*g, а эта величина, вообще говоря, меньше (а при больших скоростях — значительно меньше) замедления в условиях чистого качения.

Отсюда можно заключить, что слишком сильное торможение, т. е. торможение с моментом, бо́льшим момента, определяемого из уравнения (34′), не только вредно с точки зрения лучшего сохранения материала (как рельсов, так и колес), но даже оказывается значительно менее эффективным, чем правильное торможение.

19. Самоторможение. Предположим, что в некоторый момент, когда колесо находится в состоянии движения самого общего вида, прекращается всякое движущее усилие (в том числе и тормозящее), т. е. исчезают одновременно τ и $\mathfrak{M}$. Мы подтвердим здесь тот факт (сам по себе очевидный, если принять во внимание действие пассивных

сопротивлений), что движение при этом постепенно прекращается в течение конечного промежутка времени, и исследуем особенности этой фазы самопроизвольного прекращения движения.

Уравнения, определяющие эту фазу движения, мы получим из уравнений (25), полагая в них $\tau = \mathfrak{M} = 0$, т. е.

$$m\dot{V} = A, \quad m\delta^2\dot{\omega} = \Gamma + rA. \tag{35}$$

Речь идет, следовательно, об изучении любого решения этих уравнений, определяемого начальными значениями V_0, ω_0, произвольно задаваемыми для V и ω.

Здесь, естественно, придется рассматривать скорость скольжения σ, которая, как мы знаем, выражается через V и ω посредством равенства (26); ускорение скольжения будет поэтому определяться уравнением

$$m\dot{\sigma} = \left(1 + \frac{r^2}{\delta^2}\right)A + \frac{r}{\delta^2}\Gamma. \tag{36}$$

Чтобы сделать рассуждение более ясным, разобьем его на несколько частей, причем сначала в а) и б) сделаем некоторые предварительные замечания, вслед за которыми в в) и г) изложим надлежащие заключительные выводы.

а) *Если в некоторый момент t_1 исчезает скольжение, т. е. имеем $\sigma = 0$, то дальнейшее движение, начиная с этого момента, будет представлять собой чистое качение.*

Действительно, предположим, что тотчас же после момента t_1 снова начинается скольжение и, например, соответствующая скорость σ, по предположению равная нулю при $t = t_1$, в моменты, непосредственно следующие за моментом t_1, будет больше нуля. Тогда при $t = t_1$ будем иметь $\dot{\sigma} > 0$. Но тотчас же после момента t_1 вследствие того, что для A должны иметь место законы динамического трения, необходимо положить $A = -fp$, так что правая часть равенства (36) принимает вид

$$-p\left\{f + \frac{r^2}{\delta^2}\left(f - \frac{\Gamma}{pr}\right)\right\};$$

достаточно вспомнить условие $|\Gamma| \leqslant hp$ и принять во внимание, если необходимо, неравенство (32), чтобы убедиться, что речь идет о величине существенно отрицательной, что противоречит неравенству $\dot{\sigma} > 0$, только что выведенному из предположения, что σ тотчас же после момента t_1 может стать положительной.

Аналогично исключается также и предположение, что скорость σ может стать отрицательной, так что остается в качестве возможного единственный случай, когда σ сохраняет величину, равную нулю; легко убедиться, что это и есть тот случай, который на самом деле имеет место, так как он совместим с эмпирическими законами трения.

Действительно, трение скольжения A, при котором скорость скольжения σ может оставаться равной нулю, определяется по абсолютной величине на основании уравнения (36) равенством

$$|A| = \frac{r^2}{r^2+\delta^2}\frac{|\Gamma|}{r};$$

так как при этом $\Gamma = \pm hp$ при $\omega \neq 0$ и $|\Gamma| \leqslant hp$ всякий раз, как ω исчезает, то в силу (32) получится $|\Gamma| < frp$ и, следовательно, $|A| < fp$.

б) Рассмотрим фазу чистого качения (спонтанное качение), которая, как мы только что видели, наступает за моментом t_1, когда исчезает σ. В этой фазе в любой момент удовлетворяется условие отсутствия скольжения

$$V + r\omega = 0, \tag{27}$$

которое вместе с уравнениями (35) путем исключения V и A дает уравнение

$$m(r^2+\delta^2)\dot{\omega} = \Gamma,$$

где при $\omega \neq 0$ надо положить $\Gamma = \pm hp$ со знаком, обратным знаку ω.

Поэтому в общем случае, когда значение ω_1 величины ω, соответствующей моменту t_1, не равно нулю, будет иметь место равнозамедленное движение, угловая скорость которого ω, начиная с момента t_1 и до того момента, пока она будет отличной от нуля, определяется равенством

$$\omega = \omega_1 \pm (t - t_1)\frac{hg}{r^2+\delta^2}.$$

Отсюда следует, что эта угловая скорость сведется к нулю по истечении промежутка времени

$$T = \frac{(r^2+\delta^2)|\omega_1|}{hg},$$

в конце которого движение прекращается, потому что, как в этом можно было бы убедиться путем рассуждения, аналогичного а), на основании эмпирических законов динамического трения (качения) угловая скорость ω должна оставаться равной нулю.

Далее, если имеем $\omega_1 = 0$, то уже в момент t_1 движение прекращается; можно сказать, что и эта возможность содержится в рассмотренном выше общем случае, так как выражение, полученное для продолжительности фазы T затухания движения, исчезает при $\omega_1 = 0$.

в) После этих предварительных замечаний мы без труда можем отдать себе отчет о процессе затухания движения при каких угодно начальных условиях.

Пусть V_0 и ω_0 будут заданными начальными значениями для V и ω. Если соответствующая скорость скольжения $\sigma = V_0 + r\omega_0$ будет равна нулю, то уже начальный момент можно принять за тот, который ранее мы обозначили через t_1, так что остановка произойдет по истечении

некоторого конечного промежутка времени, причем будет иметь место только чистое качение.

Если, наоборот, σ_0 будет отлично от нуля, то всегда можно будет предположить, ориентируя надлежащим образом ось ξ, что $\sigma_0 > 0$. Трение скольжения, по крайней мере в начале движения, будет динамическим, так что закон изменения σ с временем, до некоторого момента t_1, когда σ обращается в нуль, определяется уравнением (36), в котором полагаем $A = -fp$ и $|\Gamma| \leqslant hp$. В правой части этого уравнения во всяком случае будет иметь преобладающее значение отрицательный член трения скольжения

$$-\left(1 + \frac{r^2}{\delta^2}\right) fp,$$

так как даже в самом неблагоприятном случае, когда (при $\omega < 0$) следует принять $\Gamma = hp$, правая часть принимает значение

$$-p\left\{f + \frac{r^2}{\delta^2}\left(f - \frac{h}{r}\right)\right\},$$

которое в силу соотношения (32) будет меньше нуля.

Если, далее, введем для удобства существенно положительную постоянную

$$f_1 = f + \frac{r^2}{\delta^2}\left(f - \frac{h}{r}\right), \tag{37}$$

большую, чем f, то из уравнения (36) увидим, что $\dot{\sigma}$ не только всегда будет отрицательной, но и будет удовлетворять условию

$$-\dot{\sigma} \geqslant f_1 g.$$

Поэтому скорость скольжения будет постоянно убывать, и так как замедление не меньше $f_1 g$, то, следовательно, эта скорость сведется к нулю за конечное время t_1, не превосходящее $\frac{\sigma_0}{f_1 g}$.

Таким образом, заключаем, что действительно существует момент t_1, начиная с которого, согласно сказанному в а), начинается фаза затухания движения для чистого качения.

г) На этом теоретически исследование можно считать исчерпанным; однако, с практической точки зрения, необходимо еще обратить внимание на движение центра тяжести G (или оси в случае спаренных колес). В частности, интересно установить, будет ли такое движение происходить всегда в одну и ту же сторону или возможно и обратное движение. Это обнаружится из рассмотрения скорости V, которая необходимо будет исчезать, если только движение центра тяжести G может изменить направление на обратное.

Начнем с замечания, что в окончательной фазе чистого качения ($\sigma = 0$), в которой, как мы это видели в б), угловая скорость приближается к нулю, сохраняя всегда один и тот же знак, то же самое

будет справедливо и для $V = -r\omega$; поэтому обращение движения центра тяжести может произойти только в течение фазы скольжения, если, разумеется, такая фаза действительно имеется.

Поэтому рассмотрим этот последний случай, полагая, что всегда возможно, $\sigma_0 > 0$ и имея в виду промежуток времени, протекающий от момента $t = 0$ до момента t_1, когда исчезает σ. Так как в этом промежутке времени мы должны положить $A = -fp$, то из первого из уравнений (35) получим

$$\dot{V} = -fg. \tag{35'_a}$$

Таким образом, мы видим, что V во всяком случае изменяется, постоянно убывая, так что если будем иметь $V_0 \leqslant 0$ (т. е. если в начальный момент центр тяжести движется в сторону, противоположную стороне скольжения, или, в частности, выходит из состояния покоя), то не представляется возможности обращения движения; наоборот, при $V_0 > 0$, если обращение движения будет иметь место, то оно необходимо будет единственным. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда вместе с σ_0 положительным будет также и V_0 (скольжение и движение центра тяжести в начальный момент направлены в одну сторону).

Далее, второе из уравнений (35), в котором нужно положить $A = -fp$, т. е. уравнение

$$m\delta^2\dot{\omega} = \Gamma - frp = -rp\left(f - \frac{\Gamma}{rp}\right), \tag{35'_б}$$

вместе с неравенством $|\Gamma| \leqslant hp$ и обычным условием (32) показывает, что $\dot{\omega}$ будет всегда отрицательным, так что в рассматриваемой фазе ω все время будет убывать, начиная от своего начального значения ω_0. Таким образом, нам придется различать два частных случая: $\omega_0 \leqslant 0$ и $\omega_0 > 0$.

В первом частном случае (начальное вращение происходит от η к ξ или, возможно, равно нулю) ω остается (или становится) отрицательным; поэтому надо положить $\Gamma = hp$, и тогда равенство (36), если воспользоваться обозначением (37), можно написать в виде

$$\dot{\sigma} = -f_1 g.$$

Отсюда для продолжительности фазы скольжения получится значение

$$t_1 = \frac{\sigma_0}{f_1 g},$$

и в этом промежутке времени скорость центра тяжести V в силу соотношения (35'а) будет равна

$$V = V_0 - fgt.$$

Теперь легко видеть, что при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ скорость V не может исчезать. Действительно, максимальное значение, достигаемое в этом интервале величиной fgt, определится равенством

$$fgt_1 = \frac{f}{f_1}\sigma_0;$$

так как, по предположению, $\omega_0 \leqslant 0$, то величина $\sigma_0 = V_0 + r\omega$, будучи положительной, не превзойдет V_0, а так как f_1, как это следует из (37), будет больше f, то имеем

$$V_0 > \frac{f}{f_1}\sigma_0.$$

Отсюда можно заключить, что при $\omega_0 \leqslant 0$ (и, кроме того, при $\sigma_0 > 0$, $V_0 > 0$) мы уже не будем иметь обращения движения центра тяжести.

Перейдем к следующему частному случаю $\omega_0 > 0$ (начальное вращение от ξ к η). Тотчас же после начального момента $t = 0$ и до тех пор, пока угловая скорость остается положительной, трение качения так же, как и трение скольжения, будет динамическим; поэтому в первом промежутке времени вместе с уравнением ($35'_а$) будут удовлетворяться два уравнения, которые получатся из второго уравнения системы (35) и из уравнения (36), если в них положить $\Gamma = -hp$, $A = -fp$, т. е.

$$r\dot{\omega} = -f_2 g, \qquad (35''_б)$$

$$\dot{\sigma} = -(f + f_2)\, g, \qquad (36')$$

где для краткости обозначено

$$f_2 = \frac{r^2}{\delta^2}\left(f + \frac{h}{r}\right). \qquad (38)$$

Три уравнения ($35'_а$), ($35''_б$), ($36'$) будут сохранять свое значение до тех пор, пока не исчезнет по крайней мере одна из трех величин V, ω, σ; все эти три величины вначале положительны и все три убывают равномерно с течением времени. Промежутки времени, необходимые для обращения их в нуль, определяются соответственно выражениями

$$\frac{V_0}{fg}, \quad \frac{r\omega_0}{f_2 g}, \quad \frac{\sigma_0}{(f + f_2)\, g},$$

где $\sigma_0 = V_0 + r\omega_0$; из этих трех отношений мы тотчас же видим, что числитель и знаменатель третьего получаются путем сложения соответственно числителей и знаменателей первых двух, поэтому, так как речь идет об отношении между положительными числами, третье наверное будет заключено между остальными двумя, если они все три не равны между собой. Из трех скоростей V, ω, σ первыми могут исчезнуть V или ω, если не все три вместе; в этом случае движение

затухает без какого бы то ни было обращения (горизонтального движения центра тяжести или вращения вокруг него).

Если первой приводящейся к нулю будет угловая скорость ω, то момент $r\omega_0/f_2g$, когда она исчезает, поскольку еще имеем $\sigma > 0$, принадлежит к фазе скольжения, так что мы оказываемся в условиях первого частного случая, в котором, как мы видели, движение центра тяжести до остановки происходит постоянно в одну и ту же сторону.

Остается, таким образом, рассмотреть только предположение, что из двух скоростей V и ω первой обращается в нуль скорость V; это и будет единственным случаем, когда движение центра тяжести действительно изменит свое направление на прямо противоположное. В самом деле, так как скорость V должна постоянно убывать, начиная от некоторого положительного начального значения, то тотчас же после момента $t = V_0/fg$, когда скорость обращается в нуль, она необходимо будет принимать отрицательные значения.

Из только что сказанного следует, что для того, чтобы выполнялась эта возможность, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{V_0}{fg} < \frac{r\omega_0}{f_2 g}$$

или же в силу (38)

$$\omega_0 > \frac{1}{\delta^2}\left(r + \frac{h}{f}\right) V_0, \tag{39}$$

т. е. центр тяжести изменяет направление движения на противоположное (обязательно до прекращения скольжения) только тогда, когда в начальный момент скорость движения центра тяжести и угловая скорость вращения диска вокруг него стремятся перемещать диск в противоположные стороны и, кроме того, угловая скорость достаточно велика по сравнению со скоростью центра тяжести или, точнее, удовлетворяет соотношению (39).

§ 7. Тяжелый цилиндр на шероховатой наклонной плоскости

20. Уравнения движения. Рассмотрим однородный круговой цилиндр, лежащий на наклонной шероховатой плоскости, с образующими, перпендикулярными к направлению линии наибольшего наклона, и предположим, что на него действует только сила тяжести $p = mg$ и, конечно, реакция опоры. Мы, очевидно, имеем здесь условия п. 12, так что можно изучать задачу о движении нормального сечения, проходящего через центр тяжести цилиндра, в плоскости этого сечения, принимая за неподвижную ось $\Omega\xi$ соответствующую линию наибольшего наклона, направленную вниз, и за ось $\Omega\eta$ — перпендикуляр к ней, направленный вверх (фиг. 5).