

затухает без какого бы то ни было обращения (горизонтального движения центра тяжести или вращения вокруг него).

Если первой приводящейся к нулю будет угловая скорость ω , то момент $r\omega_0/f_2g$, когда она исчезает, поскольку еще имеем $\varepsilon > 0$, принадлежит к фазе скольжения, так что мы оказываемся в условиях первого частного случая, в котором, как мы видели, движение центра тяжести до остановки происходит постоянно в одну и ту же сторону.

Остается, таким образом, рассмотреть только предположение, что из двух скоростей V и ω первой обращается в нуль скорость V ; это и будет единственным случаем, когда движение центра тяжести действительно изменит свое направление на прямо противоположное. В самом деле, так как скорость V должна постоянно убывать, начиная от некоторого положительного начального значения, то тотчас же после момента $t = V_0/fg$, когда скорость обращается в нуль, она необходимо будет принимать отрицательные значения.

Из только что сказанного следует, что для того, чтобы выполнялась эта возможность, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{V_0}{fg} < \frac{r\omega_0}{f_2g}$$

или же в силу (38)

$$\omega_0 > \frac{1}{\delta^2} \left(r + \frac{h}{f} \right) V_0, \quad (39)$$

т. е. центр тяжести изменяет направление движения на противоположное (обязательно до прекращения скольжения) только тогда, когда в начальный момент скорость движения центра тяжести и угловая скорость вращения диска вокруг него стремятся перемещать диск в противоположные стороны и, кроме того, угловая скорость достаточно велика по сравнению со скоростью центра тяжести или, точнее, удовлетворяет соотношению (39).

§ 7. Тяжелый цилиндр на шероховатой наклонной плоскости

20. Уравнения движения. Рассмотрим однородный круговой цилиндр, лежащий на наклонной шероховатой плоскости, с образующими, перпендикулярными к направлению линии наибольшего наклона, и предположим, что на него действует только сила тяжести $p = mg$ и, конечно, реакция опоры. Мы, очевидно, имеем здесь условия п. 12, так что можно изучать задачу о движении нормального сечения, проходящего через центр тяжести цилиндра, в плоскости этого сечения, принимая за неподвижную ось $\Omega\xi$ соответствующую линию наибольшего наклона, направленную вниз, и за ось $\Omega\eta$ — перпендикуляр к ней, направленный вверх (фиг. 5).

В каждой точке образующей касания возбуждаются, согласно законам трения, реактивные силы и моменты, которые после приведения к точке касания O в плоскости фигуры будут вполне определены *нормальной реакцией* N , направленной вверх, касательной реакцией A или *трением скольжения*, направленной по оси Ω_ξ , и, наконец, моментом *трения качения*, перпендикулярным к плоскости фигуры, проекцию которого на ось Ω_ζ , образующую вместе с осями Ω_ξ и Ω_η правую систему осей, мы будем обозначать через Γ .

После этих предварительных замечаний обратимся снова к основным уравнениям (21), (22) плоского движения. Так как здесь расстояние центра тяжести G от оси ξ остается всегда равным радиусу r цилиндра, то второе из уравнений (21) дает

$$N = p \cos \alpha = mg \cos \alpha, \quad (40)$$

где α обозначает угол наклона плоскости к горизонту, а первое из уравнений (21) и уравнение (22), если попрежнему будем обозначать через V скорость (параллельную оси Ω_ξ) центра тяжести, через $\omega = \dot{\delta}$ — угловую скорость с надлежащим знаком, через δ — радиус инерции цилиндра относительно его оси, принимают вид

$$m\dot{V} = mg \sin \alpha + A, \quad (41)$$

$$m\delta^2\dot{\omega} = rA + \Gamma. \quad (42)$$

Мы пришли, таким образом, к тем же уравнениям (24) и (25) п. 16, с той только разницей, что в выражении нормальной реакции (24) сила тяжести p заменена ее проекцией $p \cos \alpha$, а величины τ и M в уравнениях (25) выражены здесь в виде

$$\tau = p \sin \alpha = mg \sin \alpha, \quad M = \Gamma. \quad (43)$$

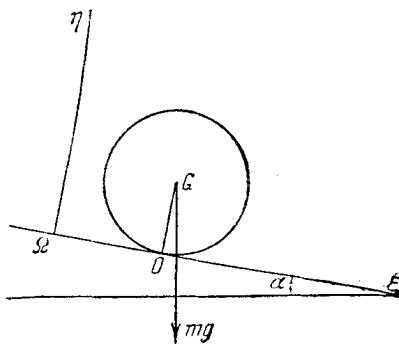
Далее, если введем здесь также скорость скольжения

$$\varsigma = V + r\omega, \quad (26)$$

то из (41), (42) получим уравнение

$$m\dot{\varsigma} = \tau + \left(1 + \frac{r^2}{\delta^2}\right)A + \frac{r}{\delta^2}\Gamma. \quad (44)$$

Естественно, что A и Γ в силу эмпирических законов трения всегда должны удовлетворять соответственно условиям $|A| \leq fN$, $|\Gamma| \leq hN$, где, как обычно, f и h обозначают коэффициент трения скольжения



Фиг. 5.

и параметр трения качения. На основании равенств (40), (43) оба эти условия можно написать в виде

$$|A| \leq \frac{f}{\operatorname{tg} \alpha} \tau, \quad (45)$$

$$|\Gamma| \leq \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} \tau; \quad (46)$$

при этом надо принять во внимание, что в силу тех же эмпирических законов трения в условии (45) имеет силу исключительно знак равенства во всяком состоянии движения со скольжением ($\sigma \neq 0$) и в этом случае знак A будет противоположен знаку σ , тогда как в условии (46) знак равенства будет иметь силу только тогда, когда налицо будет качение ($\omega \neq 0$); в этом предположении Γ будет иметь знак, обратный знаку ω .

21. Исследование возникающего движения. Мы ограничимся здесь только рассмотрением движения цилиндра, возникающего из состояния покоя, но зато подробно разберем все возможные случаи, относящиеся к постоянным, определяющим задачу: углу наклона α , радиусу r и радиусу инерции δ цилиндра, коэффициенту f и параметру h трения.

Мы сделаем здесь одно предварительное замечание, по существу чисто интуитивное, заключающееся в том, что ускорение во всяком случае не будет отрицательным ($\dot{V} \geq 0$), если цилиндр исходит из состояния покоя, т. е. что центр тяжести, если он не остается неподвижным, движется, опускаясь. Это естественное предположение строго оправдывается на основании теоремы живых сил. Если мы, как обычно, обозначим через T живую силу, через U — потенциал силы тяжести и через L — работу сил трения, то уравнение живых сил будет иметь вид

$$dT - dU = dL.$$

Отсюда в силу того, что величина dL , как относящаяся к силам, имеющим характер пассивных сопротивлений, не может быть положительной, мы выводим

$$dT - dU \leq 0$$

и, следовательно, интегрируя от любого начального момента и принимая во внимание, что в начале движения живая сила равна нулю, будем иметь

$$T - (U - U_0) \leq 0. \quad (47)$$

Но если мы обозначим временно через ξ , η координаты центра тяжести G , то высота этой точки относительно горизонтали, проходящей через O , т. е. проекция на вертикаль вектора $\vec{OG} = \vec{\Omega O} + \vec{OG}$,

будет равна $\xi \sin \alpha + r \cos \alpha$, так что с точностью до несущественной аддитивной постоянной можно положить

$$U = mg\xi \sin \alpha;$$

из равенства (47) в силу существенно положительной природы T выводим, что $\xi - \xi_0 \geq 0$. Так как вследствие равенства нулю в начальный момент скорости точки G направление возникающего движения совпадает с направлением ускорения, то предыдущее соотношение для начала движения как раз дает

$$V \geq 0.$$

Из этого же соотношения следует, что в моменты, непосредственно следующие за начальным, скорость V , если не остается постоянно равной нулю, будет положительной, так что на основании равенств (41), (43) для возникающего движения во всяком случае справедливо соотношение

$$\tau + A \geq 0. \quad (48)$$

После этого замечания обратимся прежде всего к обычным условиям, когда предельное значение тяги при качении (h/rN) меньше предельного значения трения скольжения (fN), т. е., как в п. 17, предположим

$$\frac{h}{r} < f \quad (32)$$

и будем различать для угла наклона плоскости три следующих возможных случая:

а) *малый угол наклона*, т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{h}{r};$$

б) *средний угол наклона*, т. е.

$$\frac{h}{r} < \operatorname{tg} \alpha \leq f_1,$$

где, как и в п. 19, положено

$$f_1 = f + \frac{r^2}{\delta^2} \left(f - \frac{h}{r} \right); \quad (37)$$

в) *значительный угол наклона*, т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha > f_1.$$

Непосредственно за начальным моментом для цилиндра, выходящего из состояния покоя, возможны а priori следующие четыре состояния: 1) *равновесие* ($\omega = 0, \sigma = 0$); 2) *качение без скольжения* ($\omega \neq 0, \sigma = 0$); 3) *скольжение без качения* ($\omega = 0, \sigma \neq 0$); 4) *качение со скольжением* ($\omega \neq 0, \sigma \neq 0$). Мы покажем здесь, что при

$h/r < f$ в зависимости от того, будет ли угол наклона плоскости в только что разъясненном смысле малым, средним или значительным, в согласии с эмпирическими законами трения могут встретиться соответственно первый, второй или четвертый случай, третий же никогда не может иметь места.

а) *Малый угол наклона: $\operatorname{tg} \alpha \leqslant h/r$.*

В этом случае в согласии с законами трения будет иметь место равновесие.

Действительно, так как ω и σ равны нулю, то в силу соотношения (26) таким же будет и V , следовательно, на основании уравнения (41) будем иметь $A = -\tau$; это значение A , несомненно, удовлетворяет условию (45), так как предположение а) в силу соотношения (32) влечет за собой соотношение $\operatorname{tg} \alpha \leqslant f$.

С другой стороны, так как $\omega = 0$, то уравнение (42) дает $\Gamma = -rA$. При найденном значении A будет $\Gamma = r\tau$, а это значение Γ при $r < h/\operatorname{tg} \alpha$ удовлетворяет соотношению (46).

Наконец, можно и непосредственно убедиться, что предположение а) малого наклона совместно с условием (32) заключает в себе условие равновесия как по отношению к скольжению ($\operatorname{tg} \alpha \leqslant f$, т. е. угол наклона не превышает угла трения), так и по отношению к качению (т. е., как это следует из рассмотрения равновесия, $\operatorname{tg} \alpha \leqslant h/r$).

б) *Средний угол наклона: $h/r < \operatorname{tg} \alpha \leqslant f_1$.*

При этом предположении и, разумеется, при условии (32) возникающее движение будет *чистым качением* ($\omega \neq 0, \sigma = 0$).

Чтобы подтвердить это, заметим прежде всего, что в *возникающем* движении угловая скорость ω будет отрицательной, так как на основании соотношения (26) $V = -r\omega$, а V , как и во всяком другом случае, должно быть больше 0; поэтому из неравенства (46), которое здесь будет фигурировать как равенство, принимая во внимание, что Γ и ω должны быть с противоположными знаками, получим

$$\Gamma = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} \tau.$$

Подставляя это значение Γ в (44) и полагая в нем $\sigma = 0$, придем к уравнению

$$\left(1 + \frac{r^2}{\dot{\sigma}^2}\right)A = -\left(1 + \frac{r}{\dot{\sigma}^2} \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}\right)\tau,$$

определеняющему трение скольжения A ; теперь все сводится к проверке того, что значение, полученное таким образом для A , удовлетворяет условию (45). При найденном значении A условие (45) принимает вид

$$\frac{1 + \frac{r}{\dot{\sigma}^2} \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}}{1 + \frac{r^2}{\dot{\sigma}^2}} \leqslant \frac{f}{\operatorname{tg} \alpha}$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha + \frac{rh}{\delta^2} \leq f \left(1 + \frac{r^2}{\delta^2} \right);$$

это соотношение есть не что иное, как заданное условие

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f_1.$$

в) *Значительный угол наклона: $\operatorname{tg} \alpha > f_1$.*

Мы утверждаем, что при этом предположении и при условии (32) возникающее движение будет *качением со скольжением* ($\omega \neq 0, \sigma \neq 0$).

Для такого движения соотношения (45), (46) будут равенствами, откуда на основании неравенства (32) следует, что $|\Gamma| < r|A|$; после этого из уравнения (42) получим, что знак ω будет совпадать со знаком A , который в свою очередь в силу законов динамического трения противоположен знаку σ . С другой стороны, так как движение начинается из состояния покоя, то знак ω тотчас же вслед за начальным моментом будет совпадать со знаком ω , откуда окончательно видим, что σ и ω имеют противоположные знаки. Но так как $V = \sigma - r\omega$ и тотчас же после начального момента должно быть $V > 0$, то оба слагаемых с одинаковыми знаками могут быть только положительными, и мы получаем два неравенства $\sigma > 0, \omega < 0$, из которых видно, что цилиндр катится и скользит вниз. Следовательно, условия (45), (46) дают

$$A = -\frac{f}{\operatorname{tg} \alpha} \tau, \quad \Gamma = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} \tau,$$

а эти два выражения позволяют проверить, что в равенстве

$$\Gamma + rA = m\delta^2\dot{\omega}$$

обе части будут действительно отрицательными.

Здесь уместно изложить вкратце результаты исследования. Мы убедились, что при условии (32) покой, чистое качение и качение со скольжением представляют собой три вида возникающего движения, согласные с эмпирическими законами трения, соответственно в трех случаях а), б), в); предоставляем читателю убедиться, что в каждом из этих случаев остальные три типа возникающего движения, возможные a priori, но которых мы не рассматривали, должны быть исключены как противоречащие законам трения.

Для полноты рассмотрим также случай, практически исключительный, когда предельное значение силы тяги при качении превосходит или по крайней мере равно предельной силе трения скольжения, т. е. когда в противоположность условию (32) мы имеем

$$\frac{h}{r} \geq f. \quad (49)$$

Таков, например, случай цилиндра с очень маленьким радиусом (вязальная игла), опертого на гладкую наклонную плоскость.

В этом предположении достаточно различать два частных случая:

а') *Малый угол наклона*: $\operatorname{tg} \alpha \leq f$. Как и в случае а), при условии (32), покой будет совместим с законами трения. Действительно, для состояния покоя уравнения (41) и (42) дают

$$A = -\tau, \quad \Gamma = -rA = r\tau.$$

Первое из этих значений удовлетворяет условию (45) в силу соотношения $\operatorname{tg} \alpha \leq f$, второе удовлетворяет условию (46) в силу (49).

б') *Большой угол наклона*: $\operatorname{tg} \alpha > f$. При этом условии возникающее движение, совместимое с законами трения, будет чистым скольжением — случай, которого мы еще не рассматривали. Для такого движения имеем $\omega = 0$, $\sigma \neq 0$, и так как здесь σ тождественно со скоростью V , которая, как мы знаем, положительна, то необходимо должно быть $\sigma > 0$. В силу этого равенство (45) дает

$$A = -\frac{f}{\operatorname{tg} \alpha} \tau,$$

а равенство (42) дает для Γ значение

$$\Gamma = -rA = \frac{fr}{\operatorname{tg} \alpha} \tau,$$

удовлетворяющее условию (46) в силу (49); в виде проверки можно показать, что при найденном значении A ускорение $\dot{V} = (\tau + A)/m$ действительно будет положительным.

Здесь мы предоставляем читателю доказательство единственности, т. е. подтверждение того, что в каждом из двух случаев а'), б') при условии (49) всякий другой тип возникающего движения, помимо рассмотренного, привел бы к противоречию с законами трения. Объединим теперь в таблицу результаты, полученные в предыдущем исследовании:

$\operatorname{tg} \alpha \leq f$	покой;
$\frac{h}{r} < f \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{r} < \operatorname{tg} \alpha \leq f \\ \operatorname{tg} \alpha > f \end{array} \right.$	возникающее движение чистого качения;
$f_1 > \operatorname{tg} \alpha$	возникающее движение качения со скольжением;
$\frac{h}{r} \geq f$	возникающее движение чистого скольжения.

Заметим теперь, что четыре изложенные здесь структурные гипотезы наравне с четырьмя соответствующими возможностями возникающего движения исчерпывают все возможные случаи и являются, кроме того, такими, что всегда должен необходиимо выполняться

один из них, между тем как три остальные исключаются; поэтому на основании известного закона логики результаты, полученные нами, обратимы, т. е. четыре возможных типа возникающего движения определяются каждый структурными условиями, соответственно указанным в приложенной выше таблице.

§ 8. Установившееся поступательное движение и продольная устойчивость самолета

22. Самолет можно представить себе схематически состоящим из:

- а) центральной части, в грубом приближении призматической, называемой фюзеляжем и несущей мотор и летный состав; б) одной или большего числа поверхностей крыльев (несущих поверхностей); в) других поверхностей (хвостовое оперение, рули и т. п.), предназначенных для обеспечения устойчивости и для маневрирования; г) винтомоторной группы (один или больше винтов).

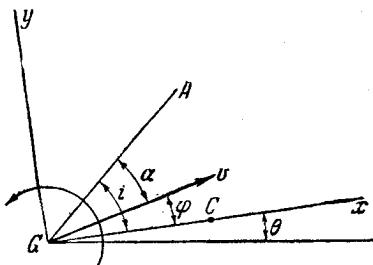
Эта сложная система имеет, по крайней мере приближенно, *плоскость симметрии*, в которой лежит центр тяжести G всей системы и ось Gx фюзеляжа. Когда аппарат опирается на горизонтальную поверхность, ось Gx располагается приблизительно горизонтально и плоскость симметрии занимает вертикальное положение.

Для определенности мы будем называть полет *нормальным*, или *установившимся*, когда плоскость симметрии остается вертикальной и ось Gx скользит горизонтально вдоль самой себя с постоянной скоростью.

Мы будем рассматривать здесь движения, которые хотя и не являются нормальными, но мало отличаются от нормального полета в том смысле, что плоскость симметрии самолета, оставаясь вертикальной, скользит вдоль самой себя, а ось Gx немного отклоняется от горизонтали, проходящей через G (фиг. 6).

Тем самым мы отвлекаемся от всякого возможного отклонения плоскости симметрии самолета от вертикальной плоскости, проходящей через ось Gx (боковое смещение центра тяжести, вращение вокруг оси Gx , или боковая качка, вращение вокруг оси Gu , перпендикулярной к Gx в плоскости симметрии, или рыскание). Мы будем рассматривать, таким образом, плоское движение.

Чтобы максимально упростить постановку задачи, предположим, что поверхность крыльев схематически изображается в плоскости движения посредством отрезка GA . Далее, мы будем представлять себе ось Gx ориентированной в направлении движения; выберем за



Фиг. 6.