

один из них, между тем как три остальные исключаются; поэтому на основании известного закона логики результаты, полученные нами, обратимы, т. е. четыре возможных типа возникающего движения определяются каждый структурными условиями, соответственно указанным в приложенной выше таблице.

§ 8. Установившееся поступательное движение и продольная устойчивость самолета

22. Самолет можно представить себе схематически состоящим из:

- а) центральной части, в грубом приближении призматической, называемой фюзеляжем и несущей мотор и летный состав; б) одной или большего числа поверхностей крыльев (несущих поверхностей); в) других поверхностей (хвостовое оперение, рули и т. п.), предназначенных для обеспечения устойчивости и для маневрирования; г) винтомоторной группы (один или больше винтов).

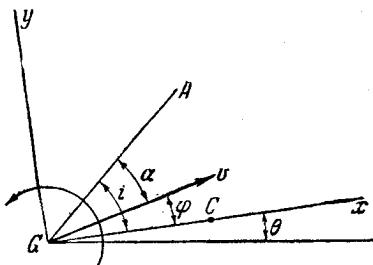
Эта сложная система имеет, по крайней мере приближенно, *плоскость симметрии*, в которой лежит центр тяжести G всей системы и ось Gx фюзеляжа. Когда аппарат опирается на горизонтальную поверхность, ось Gx располагается приблизительно горизонтально и плоскость симметрии занимает вертикальное положение.

Для определенности мы будем называть полет *нормальным*, или *установившимся*, когда плоскость симметрии остается вертикальной и ось Gx скользит горизонтально вдоль самой себя с постоянной скоростью.

Мы будем рассматривать здесь движения, которые хотя и не являются нормальными, но мало отличаются от нормального полета в том смысле, что плоскость симметрии самолета, оставаясь вертикальной, скользит вдоль самой себя, а ось Gx немного отклоняется от горизонтали, проходящей через G (фиг. 6).

Тем самым мы отвлекаемся от всякого возможного отклонения плоскости симметрии самолета от вертикальной плоскости, проходящей через ось Gx (боковое смещение центра тяжести, вращение вокруг оси Gx , или боковая качка, вращение вокруг оси Gu , перпендикулярной к Gx в плоскости симметрии, или рыскание). Мы будем рассматривать, таким образом, плоское движение.

Чтобы максимально упростить постановку задачи, предположим, что поверхность крыльев схематически изображается в плоскости движения посредством отрезка GA . Далее, мы будем представлять себе ось Gx ориентированной в направлении движения; выберем за



Фиг. 6.

положительное направление вращения вокруг G в плоскости движения то, которое идет от Gx к вертикали, направленной вверх, и введем четыре угла: 1) так называемый *угол носовой качки* (угол тангажа), т. е. угол θ , по абсолютной величине меньший $\pi/2$, образуемый осью Gx с горизонталью, проходящей через точку G ; 2) угол i между осью Gx и прямой GA , определяющий положение профиля крыльев; 3) так называемый *угол атаки* α , образуемый направлением вектора скорости центра тяжести v с профилем крыльев GA ; 4) угол φ между осью Gx и направлением вектора скорости v .

Очевидно, имеем

$$\alpha = i - \varphi; \quad (50)$$

заметим теперь же, что при нормальном полете $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $\alpha = i$, так что при движении, близком к нормальному, определенном выше, угол α надо принять существенно положительным.

Направляя ось Gy в плоскости движения вверх, перпендикулярно к оси Gx , найдем для проекций v_x , v_y скорости центра тяжести v выражения

$$v_x = v \cos \varphi, \quad v_y = v \sin \varphi. \quad (51)$$

23. Если, далее, примем для простоты массу самолета за единицу, то дифференциальные уравнения движения в проекциях на только что выбранные подвижные оси принимают вид (п. 14)

$$\dot{v}_x - \omega v_y = R_x, \quad \dot{v}_y + \omega v_x = R_y, \quad (52)$$

$$\delta^2 \dot{\omega} = M_c, \quad (53)$$

где символы имеют обычное значение и, в частности, ω обозначает угловую скорость $\dot{\theta}$. Теперь все сводится к тому, чтобы уточнить природу сил, действующих на самолет при указанных выше условиях.

В основном играют роль три силы: вес, сопротивление воздуха и сила тяжести винта, которые для простоты мы будем предполагать отнесенными к единице массы.

Так как нисходящая вертикаль образует с подвижными осями Gx , Gy соответственно углы $\theta + \pi/2$, $\theta + \pi$, то проекции силы тяжести будут $-g \sin \theta$, $-g \cos \theta$.

Что же касается сопротивления воздуха, то в условиях продольного полета оно приводится к единственной силе Φ , приложенной в точке C оси, называемой *центром давления*. Многочисленные опыты¹⁾ позволяют утверждать, что, по крайней мере для малых

¹⁾ См., например, C gross o, Di un importante coefficiente di stabilità negli aeroplani, *Rend. Lincei*, т. XVIII, 1909, стр. 571—575; Sulla stabilità laterale degli aeroplani, *Rend. delle esperienze... aeronautiche del Genio*, Anno II (1912), стр. 77—142. Painlevé—Borel—Maurain, *L'Aviation*, Paris, 1923; заметку I Fuchs—Höpf, *Aerodynamik*, Berlin, 1922: ч. II, гл. III, См. также трактаты Bothézat (Paris, 1911) и Bryant (London, 1911), в которых рассматриваются некоторые частные задачи об устойчивости движения аэроплана.

углов атаки α и для малых углов тангенса θ , компоненты Φ_v , Φ_w вектора Φ по ориентированному направлению скорости v центра тяжести и по направлению нормали v , ориентированной относительно v , как ось u относительно оси x (называемые соответственно лобовым сопротивлением и подъемной силой) выражаются в виде

$$\Phi_v = -(\lambda v^2 + f) v^2, \quad \Phi_w = \lambda a v^2, \quad (54)$$

где λ и f суть положительные коэффициенты, причем второй обычно мал по сравнению с единицей (и, следовательно, им можно пренебречь в первом приближении), а угол α , как мы видели, связан с углами i и φ формулой (50).

Наконец, обозначим через X и Y компоненты по осям Gx и Gy силы тяги винта и через M_ζ результирующий момент относительно центра тяжести всех действующих сил.

24. При нормальном полете, можно принять, что сила тяги винта направлена по оси Gx самолета ($Y = 0$); при этих условиях уравнения (52), (53) должны удовлетворяться величинами $\theta = \varphi = 0$, $v_x = v_0 = \text{const}$, $v_y = 0$, $\omega = 0$.

Таким образом для уравнений движения мы имеем частное решение статического типа; так как в этом случае ориентированные направления скорости v и перпендикуляра к ней v совпадают соответственно с направлениями подвижных осей Gxy , то уравнения (52), (53) дают

$$-(\lambda i^2 + f) v_0^2 + X = 0, \quad -g + \lambda i v_0^2 = 0, \quad M_\zeta = 0. \quad (55)$$

Заметим прежде всего, что второе из этих уравнений показывает, что при заданном угле атаки (который здесь совпадает с углом наклона профиля крыльев к горизонту) всякий самолет имеет вполне определенную, соответствующую этому углу скорость установившегося движения v_0 , и если нужно изменить эту скорость, то не достаточно изменить режим мотора, а необходим, кроме того, некоторый маневр, изменяющий угол атаки.

Отметим далее, что первое из уравнений (55) определяет интенсивность силы тяги, которая должна быть развита мотором для преодоления (прямого) сопротивления воздуха; из второго из уравнений (55) мы видим, что при этих условиях подъемная сила в точности уравновешивает силу тяжести. Можно сказать, что подъемная сила возникает по существу благодаря сопротивлению воздуха и только косвенно — благодаря работе мотора.

25. Предыдущие результаты, относящиеся к нормальному полету, могут служить отправной точкой для исследования движения более общего вида. Мы не намерены здесь входить в подробности и, отсылая к специальным, цитированным выше сочинениям, ограничимся лишь некоторыми вопросами, относящимися к условиям продольной

устойчивости установившегося полета, т. е. устойчивости полета по отношению к тем движениям в вертикальной плоскости, близким к установившемуся, которые мы указали в п. 23.

По существу все будет зависеть от проекций X и Y , силы тяги винта и момента M_c , которые соответствуют этим возмущенным движениям.

Что касается силы тяги винта, то наиболее приемлемые экспериментальные результаты позволяют считать, что поскольку режим работы мотора не изменяется, то X и Y сохраняют величины $(\lambda i^2 + f) v_0^2$ и 0, которые они имеют при нормальном полете.

Далее, относительно момента M_c всех внешних сил необходимо прежде всего отметить, что так как речь идет о моменте относительно центра тяжести, то момент силы тяжести равен нулю. То же самое можно сказать и о силе тяги винта, поскольку, как только что было сказано, можно принять, что в возмущенном движении она остается приблизительно осевой. Поэтому остается принять во внимание только момент относительно центра тяжести сопротивления воздуха или, еще точнее, местных действий потока воздуха на отдельные элементы поверхности самолета. Очевидно, по крайней мере в первом приближении, что эти действия зависят только от скоростей частиц воздуха относительно отдельных элементов поверхности, а эти скорости в свою очередь зависят от величины v поступательной скорости и от угла атаки α . Так как мы намерены рассмотреть здесь малые колебания около нормального полета, когда будем иметь $v = v_0$, $\alpha = i$, то нам придется приписать моменту M_c , который должен исчезать при $v = v_0$, $\alpha = i$, выражение вида

$$-v_0^2 \{c(v - v_0) + c_1(\alpha - i)\}, \quad (56)$$

где c и c_1 обозначают две постоянные; теперь мы можем убедиться, что для устойчивости необходимо, чтобы эти две постоянные были положительны. Это следует из обычного статического критерия (т. I, гл. XIII, п. 23), согласно которому силы должны стремиться привести систему к нормальному режиму. В случае нашей задачи пары с моментом M_c должна быть такой, чтобы, действуя отдельно, заставить самолет повернуться и привести v к v_0 и α к i ; это как раз и означает, что каждый из двух членов суммы (56) должен иметь знак, обратный соответствующему возмущению $v - v_0$ и $\alpha - i$. Наконец, из опыта известно, что из двух членов более важным является тот, который зависит от возмущения угла атаки; так что в первом приближении можно прямо положить $c = 0$.

Следует заметить, что вращению самолета в его плоскости симметрии противодействуют пассивные сопротивления, которые, поскольку речь идет о малых колебаниях (медленных), можно, как известно, схематически представить в виде сопротивления вязкого трения, т. е. сопротивления, пропорционального $\dot{\theta}$, и со знаком, всегда обрат-

ным знаку угловой скорости. В результате, полагая в выражении (56) $c = 0$ и замечая, что на основании соотношения (50) имеем $\alpha \rightarrow i \rightarrow -\varphi$, мы приходим к выражению

$$M_\zeta = c_1 v_0^2 \varphi - c_2 v_0 \dot{\theta}, \quad (57)$$

где c_2 , как и c_1 , есть положительная постоянная. Две пары, соответствующие двум слагаемым момента M_ζ , принято называть соответственно восстанавливающей и демпфирующей парой (гл. I, п. 58).

Разъяснив таким образом поведение сил при продольном движении, близком к любому нормальному движению, мы в состоянии теперь вывести соответствующие уравнения в вариациях. Для этой цели мы должны снова взять общие дифференциальные уравнения (52), (53), приписать в них величинам R_x , R_y , M_ζ только что найденные значения и положить $v = v_0 + \varepsilon$, рассматривая ε , φ , $\dot{\theta}$ как величины первого порядка и, следовательно, пренебрегая членами второго порядка относительно них.

Это, между прочим, приводит к тому, что вместо $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ мы должны подставить соответственно 1 и φ , благодаря чему равенства (51) примут вид

$$\dot{v}_x = v = v_0 + \varepsilon, \quad v_y = v_0 \varphi,$$

а для левых частей уравнений (52) получим выражения

$$\dot{\varepsilon}, \quad v_0 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}). \quad (58)$$

Что касается правых частей этих уравнений, то прежде всего мы займемся теми слагаемыми, которые зависят от сопротивления воздуха Φ .

На основании формул (50), (54) можно положить, приписывая значок нуль значениям, принимаемым величинами Φ_v , Φ_φ и их производными при нормальном движении,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_v &= \Phi_v^0 + \left(\frac{\partial \Phi_v}{\partial v} \right)^0 \varepsilon - \left(\frac{\partial \Phi_v}{\partial \alpha} \right)^0 \varphi, \\ \Phi_\varphi &= \Phi_\varphi^0 + \left(\frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial v} \right)^0 \varepsilon - \left(\frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \alpha} \right)^0 \varphi; \end{aligned} \right\}$$

так как φ есть угол поворота, переводящего систему осей Gxy в систему $v\psi$, то отсюда получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x &= \Phi_v - \varphi \Phi_\varphi = \Phi_v^0 - a_1 \varepsilon + a_1 \varphi, \\ \Phi_y &= \varphi \Phi_v + \Phi_\varphi = \Phi_\varphi^0 + b_1 \varepsilon - b_2 \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

где для краткости положено

$$a_1 = - \left(\frac{\partial \Phi_v}{\partial v} \right)^0 = 2(\lambda i^2 + f) v_0, \quad a_2 = - \Phi_v^0 - \left(\frac{\partial \Phi_v}{\partial \alpha} \right)^0 = \lambda i v_0^2,$$

$$b_1 = \left(\frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial v} \right)^0 = 2\lambda i v_0, \quad b_2 = - \Phi_\varphi^0 + \left(\frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \alpha} \right)^0 = \{ \lambda(1 + i^2) + f \} v_0^2;$$

заметим, что коэффициенты a_1 , a_2 , b_1 , b_2 все положительны.

Вспомним, кроме того, что при движении, близком к нормальному полету, можно принять

$$X = (\lambda i^2 + f) v_0^2, \quad Y = 0,$$

и заметим еще, что соответствующие проекции силы тяжести — $g \sin \theta$ и — $g \cos \theta$ равны приближенно — $g \theta$ и — g .

Принимая во внимание это обстоятельство, а также формулы (57), (59) и выражения (58) левых частей равенств (52), (53), мы легко увидим, что соответствующие уравнения в вариациях, представляющие отклонения от любого нормального полета, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} + a_1 \epsilon - a_2 \varphi + g \theta &= 0, \\ -b_1 \epsilon + v_0 \dot{\varphi} + b_2 \varphi + v_0 \dot{\theta} &= 0, \\ -c_1 v_0^2 \varphi + \delta^2 \ddot{\theta} + c_2 v_0 \dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Эти уравнения и позволяют разобрать вопрос о продольной устойчивости самолета.

В согласии с рассуждениями п. 23 гл. VII здесь речь будет идти о линейной устойчивости, и так как конкретное явление, для которого рассматривается эта устойчивость, по существу относится к будущему, то достаточно будет применить к системе (60) общий критерий устойчивости в будущем, относящийся к решению статического типа.

Следовательно, необходимо решить характеристическое уравнение, которое, как мы знаем, получится, если в уравнениях (60) положить

$$\epsilon = \lambda_1 e^{zt}, \quad \varphi = \lambda_2 e^{zt}, \quad \theta = \lambda_3 e^{zt}$$

и приравнять нулю определитель коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Таким образом, мы придем к уравнению четвертой степени относительно z

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} z + a_1 & -a_2 & g \\ -b_1 & v_0 z + b_2 & v_0 z \\ 0 & -c_1 v_0^2 & z(\delta^2 z + c_2 v_0) \end{vmatrix} = 0,$$

и искомые условия устойчивости выражаются в том алгебраическом факте, что корни этого уравнения (или характеристические показатели, относящиеся к любому установившемуся полету) должны иметь отрицательные действительные части или равняться нулю.

Если заметим, что коэффициент $v_0 \delta^2$ при z^4 является существенно положительным, то, в частности, увидим, что устойчивость требует, чтобы известный член $\Delta(0) = c_1 b_1 v_0^2 g$ был тоже положительным, так как иначе многочлен $\Delta(z)$ переходил бы от отрицательных значений к положительным при изменении z от нуля до бесконечности и имел бы поэтому один действительный и положительный корень. Таким образом, подтверждается из динамических соображений уже сделан-

ное нами на основании статических соображений допущение, что постоянная c_1 должна быть положительной.

Мы не будем останавливаться на полном разборе других условий устойчивости и ограничимся замечанием, что, поскольку постоянные $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ и δ^2 зависят от конструкции основных деталей самолета, неравенства, выражающие эти условия, дают столько же соотношений между конструктивными параметрами или правил при маневрировании *).

§ 9. Критические замечания относительно эмпирических законов трения

26. Пэнлеве¹⁾ первый заметил, что в некоторых случаях эмпирические законы трения могут привести к затруднениям логического порядка.

Можно сказать, что цель построения схемы любого механического явления заключается в том, чтобы указать однозначное распределение ускорений отдельных точек данной материальной системы, когда известны свойства связей и действующих на систему сил и задано начальное состояние движения. Однако можно привести примеры материальных систем (мы укажем здесь один простейший, принадлежащий самому Пэнлеве), для которых при вполне определенных силах и начальных условиях движения последовательное применение зако-

*) Первые работы по динамике и устойчивости самолета принадлежат Н. Е. Жуковскому («Динамика аэропланов в элементарном изложении»; статья первая, Труды отд. физ. наук Общ. любителей естествознания, т. XVI, вып. 2, 1913, стр. 33—50; статья вторая, т. XVIII, вып. 1, 1916, стр. 49—67).

Николай Егорович Жуковский родился в 1847 г. в д. Орехово Владимирской губ., умер в 1921 г. в Москве. окончил Московский университет в 1868 г.; в 1876 г. защитил магистерскую диссертацию, а в 1882 г. — докторскую диссертацию на тему: «О прочности движения». С 1886 г. Н. Е. Жуковский — профессор Московского университета и с 1887 г. — профессор Московского высшего технического училища. В 1894 г. Н. Е. Жуковский был избран членом-корреспондентом Академии наук, а в 1900 г. был выдвинут кандидатом в действительные члены, но снял свою кандидатуру, не желая переезжать в Петербург.

Н. Е. Жуковский принадлежал к числу немногих ученых, которые с одинаковым успехом работали и над отвлечеными теоретическими вопросами, и над практическими задачами, выдвигавшимися современной ему техникой. Основные работы Н. Е. Жуковского относятся к динамике твердого тела, к устойчивости движения и гидромеханике. Однако наибольшую известность доставили ему работы по теоретической и экспериментальной аэродинамике; он справедливо считается основоположником теории авиации. В начале девяностых годов он организует аэродинамические лаборатории при механическом кабинете Московского университета, в Кучине под Москвой и в Московском высшем техническом училище. В 1918 г., после Великой Октябрьской социалистической революции при его участии был организован Центральный аэрогидродинамический институт в Москве. Полное собрание сочинений Н. Е. Жуковского в десяти томах впервые было издано в 1937 г. (Прим. ред.)

¹⁾ R. Painlevé, Leçons sur le frottement et applications, Paris, 1895.