ное нами на основании статических соображений допущение, что постоянная $c_1$ должна быть положительной.

Мы не будем останавливаться на полном разборе других условий устойчивости и ограничимся замечанием, что, поскольку постоянные $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$ и $\delta^2$ зависят от конструкции основных деталей самолета, неравенства, выражающие эти условия, дают столько же соотношений между конструктивными параметрами или правил при маневрировании *).

## § 9. Критические замечания относительно эмпирических законов трения

26. Пэнлеве [1]) первый заметил, что в некоторых случаях эмпирические законы трения могут привести к затруднениям логического порядка.

Можно сказать, что цель построения схемы любого механического явления заключается в том, чтобы указать однозначное распределение ускорений отдельных точек данной материальной системы, когда известны свойства связей и действующих на систему сил и задано начальное состояние движения. Однако можно привести примеры материальных систем (мы укажем здесь один простейший, принадлежащий самому Пэнлеве), для которых при вполне определенных силах и начальных условиях движения последовательное применение зако-

*) Первые работы по динамике и устойчивости самолета принадлежат Н. Е. Жуковскому („Динамика аэропланов в элементарном изложении"; статья первая, Труды отд. физ. наук Общ. любителей естествознания, т. XVI, вып. 2, 1913, стр. 33—50; статья вторая, т. XVIII, вып. 1, 1916, стр. 49—67).

Николай Егорович Жуковский родился в 1847 г. в д. Орехово Владимирской губ., умер в 1921 г. в Москве. Окончил Московский университет в 1868 г.; в 1876 г. защитил магистерскую диссертацию, а в 1882 г. — докторскую диссертацию на тему: „О прочности движения". С 1886 г. Н. Е. Жуковский — профессор Московского университета и с 1887 г. — профессор Московского высшего технического училища. В 1894 г. Н. Е. Жуковский был избран членом-корреспондентом Академии наук, а в 1900 г. был выдвинут кандидатом в действительные члены, но снял свою кандидатуру, не желая переезжать в Петербург.

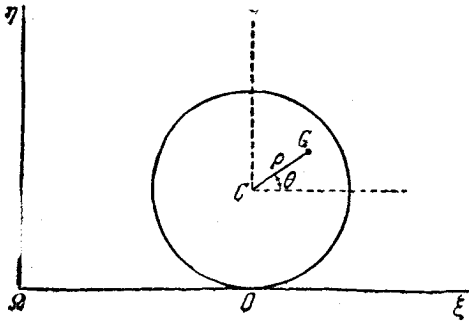
Н. Е. Жуковский принадлежал к числу немногих ученых, которые с одинаковым успехом работали и над отвлеченными теоретическими вопросами, и над практическими задачами, выдвигавшимися современной ему техникой. Основные работы Н. Е. Жуковского относятся к динамике твердого тела, к устойчивости движения и гидромеханике. Однако наибольшую известность доставили ему работы по теоретической и экспериментальной аэродинамике; он справедливо считается основоположником теории авиации. В начале девятисотых годов он организует аэродинамические лаборатории при механическом кабинете Московского университета, в Кучино под Москвой и в Московском высшем техническом училище. В 1918 г., после Великой Октябрьской социалистической революции при его участии был организован Центральный аэрогидродинамический институт в Москве. Полное собрание сочинений Н. Е. Жуковского в десяти томах впервые было издано в 1937 г. (*Прим. ред.*)

[1]) P. Painlevé, Leçons sur le frottement et applications, Paris, 1895.

нов механики приводит к заключению, что невозможно определить ускорения в согласии с законами трения или можно дать несколько различных распределений ускорений, которые все одинаково справедливы. В результате, как это может показаться с первого взгляда, перестает оправдываться так называемый *механический детерминизм.*

Необходимо, однако, сейчас же заметить (и мы разъясним это на приводимом ниже примере), что такое несоответствие можно объяснить, отбрасывая гипотезу о непрерывности явлений движения или, точнее, допуская, что в указанных выше особых случаях наступают почти мгновенно резкие изменения состояния движения. Они-то и служат отправной точкой для получения уравнений, определяющих распределение ускорений, совместимое с законами трения. Важно заметить, что такие резкие изменения состояния движения часто встречаются в действительности и изучаются в теории так называемого импульсивного движения (ср. гл. XII).

**27.** Пример, который мы хотим здесь рассмотреть, относится к круглому тяжелому диску, который, будучи вынужден двигаться в вертикальной плоскости, может катиться и скользить по горизонтальной неподвижной и шероховатой прямой $\Omega\xi$, как уже предполагалось в § 6, но с той существенной разницей, что *диск не является однородным.* Обозначим попрежнему через $r$ радиус диска, через $V$ скорость (горизонтальную) геометрическую центра $C$, через $\omega$ — угловую скорость (со знаком в смысле, установленном в п. 14) и введем координаты $x_0$, $y_0$ центра тяжести $G$ относительно $C$ (точнее, относительно двух осей с началом в $C$, параллельных и одинаково направленных с неподвижными осями $\Omega\xi\eta$) и расстояние $\rho = CG$ центра тяжести от $C$; обозначив через $\theta$ угол полупрямой $CG$ с осью $\xi$, будем иметь $x_0 = \rho\cos\theta$, $y_0 = \rho\sin\theta$ и, следовательно,



Фиг. 7.

$$\dot{x}_0 = -\omega y_0, \quad \dot{y}_0 = \omega x_0,$$

так как $\omega = \dot{\theta}$. Разлагая движение диска на поступательное движение, определяемое движением центра $C$, и вращательное движение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр (т. I, ч. 1, гл. III § 5, п. 14), мы найдем для проекций скорости точки $G$ на оси $\Omega\xi$ и $\Omega\eta$ выражения $V - \omega y_0$, $\omega x_0$; если представим себе, что диск находится под действием исключительно

своего веса $p = mg$ и реакции опоры (в точке $O$) с составляющими $A$ (трение скольжения) и $N$ (нормальная реакция), то уравнения движения центра тяжести примут вид:

$$m\frac{d}{dt}(V - \omega y_0) = A, \quad m\frac{d}{dt}(\omega x_0) = N - p. \tag{61}$$

Результирующий момент двух внешних сил относительно центра тяжести $G$ сводится к моменту реакции и имеет величину $(r + y_0)A - x_0N$, так что скалярное уравнение моментов относительно центра тяжести принимает вид

$$m\delta^2\dot{\omega} = (r + y_0)A - x_0N. \tag{62}$$

Исключая угловое ускорение $\dot{\omega}$ из этого уравнения и из второго из уравнений (61) и подставляя вместо $\dot{x}_0$ его значение $-\omega y_0$, мы придем к уравнению

$$my_0\omega^2 - \frac{x_0}{\delta^2}\{(r + y_0)A - x_0N\} - N + p = 0. \tag{63}$$

Покажем теперь, как можно осуществить и притом сколь угодно большим числом способов неоднородный диск и сообщить ему такое движение, что уравнение (63) будет несовместимо с законами трения.

Прежде всего представим себе такое состояние движения: 1) пусть диск находится в соприкосновении со своей опорной прямой и расположен так, что центр тяжести его $G$ лежит на горизонтальной полупрямой, проведенной через $C$ в сторону возрастающих абсцисс, так что вначале имеем $x_0 = \rho$, $y_0 = 0$; 2) в начальный момент $t_0$ сообщается диску поступательная скорость $V > 0$ вдоль опорной прямой ($\omega_0 = 0$).

В этом случае уравнение (63) для начального момента, когда $A = -fN$, дает

$$N\left\{1 - \frac{\rho}{\delta^2}(\rho + fr)\right\} = p; \tag{64}$$

покажем, что, распределяя подходящим образом массу диска, всегда можно добиться того, чтобы количество

$$H = \frac{\rho}{\delta^2}(\rho + fr) \tag{65}$$

было больше единицы, в силу чего из уравнения (64) будем иметь, что $N < 0$; это неравенство противоречит предположению, что диск действительно опирается на прямую.

Чтобы показать, как это достигается, обратимся к особенно простому случаю, когда неоднородность диска происходит от одной единственной массы $m_1$, присоединенной в некоторой (эксцентричной) точке $P$ однородного диска с массой $m_0$. Обозначив через $\rho_1$ расстояние $CP$, которое мы будем предполагать меньшим $r$, и положив $m = m_0 + m_1$, будем иметь прежде всего

$$m\rho = m_1\rho_1,$$

или же, обозначая через $k$ отношение $m_1/m_0$,

$$\rho = \frac{k}{1+k}\rho_1. \tag{66}$$

Для вычисления $\delta^2$, квадрата радиуса инерции диска, вспомним прежде всего, что для однородного диска радиуса $r$ и массы $m_0$ момент инерции относительно центра $C$ (т. I, гл. X, п. 33) равен $m_0 r^2/2$, а относительно точки $G$, по теореме Гюйгенса, он равен

$$m_0\left(\frac{r^2}{2}+\rho^2\right),$$

так что момент инерции диска с добавочной массой $m_1$ относительно его центра тяжести $G$ определится равенством

$$m\delta^2 = m_0\left(\frac{r^2}{2}+\rho^2\right)+m_1(\rho_1-\rho)^2.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (66), получим

$$\delta^2 = \frac{1}{1+k}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{k}{1+k}\rho_1^2\right),$$

и, наконец, для количества $H$, определяемого равенством (65), получим выражение

$$H = \frac{2k\rho_1\{k\rho_1+(1+k)fr\}}{2k\rho_1^2+(1+k)r^2}.$$

Будем теперь рассматривать $H$ как функцию одного аргумента $k$, считая заданными $r$, $f$ и $\rho_1$, что равносильно тому, что однородный диск и положение $P$ добавочной массы $m_1$ считаются неизменными, а масса $m_1$ меняется.

Так как речь идет о рациональной функции, всегда положительной при $k>0$ и стремящейся к бесконечности вместе с $k$, то непосредственно ясно, что если взять достаточно большое $k$, т. е. достаточно большую добавочную массу $m_1$, то будем иметь $H>1$ и, следовательно, $N<0$, что противоречит экспериментальным данным.

**28.** Это противоречие, как уже отмечалось в общем случае в п. 26, можно устранить, если принять во внимание, что в силу самого способа, каким диск приводится в движение, возникают мгновенные реакции, резко изменяющие начальное состояние движения.

Вот более точное истолкование явления, хорошо согласующееся с экспериментальными данными: в тот самый момент, когда диску сообщается толчок вдоль горизонтальной опоры, в течение весьма короткого промежутка времени происходят сложные явления действия упругих сил, которые можно схематически представить в виде системы импульсов, имеющих определенную результирующую и определенный результирующий момент. Эта система импульсов вызывает почти мгновенное уничтожение скорости скольжения и в то же время — возникновение определенной угловой скорости $\omega_0$, бла-

годаря чему состояние движения сразу приводится к виду, совместимому с экспериментальными законами трения.

Мы не будем дальше задерживаться на этом вопросе и ограничимся указанием на особенно простой пример, данный Клейном [1]).

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что приведенная длина маятника, состоящего из однородного стержня, подвешенного за один из его концов, равна $2l/3$, если $l$ есть длина стержня.

2. Из двух шаров с равными радиусами и одинаковым весом один заполнен равномерно распределенной массой, а другой является полым, с центром тяжести в геометрическом центре. Если оба шара подвешены на нитях равной длины и приведены в колебательное движение, то полый шар колеблется медленнее сплошного. Мы имеем, таким образом, способ отличить один шар от другого.

3. Однородная палочка, изогнутая в виде дуги круга, колеблется в вертикальной плоскости под действием собственного веса около средней точки. Доказать, что длина эквивалентного простого маятника совпадает с диаметром той окружности, дугу которой составляет изогнутая палочка.

4. Тяжелый однородный твердый стержень $AB$ своими концами скользит без трения по круговому желобку радиуса $r$, расположенному в вертикальной плоскости. Речь идет (если отвлечься от способа осуществления связей) о тяжелом твердом теле, которое может вращаться около центра $O$ желобка. Если обозначим через $2\alpha$ центральный угол, стягиваемый стержнем, как хордой, то для приведенной длины $l$ простого изохронного маятника будем иметь выражение

$$l = r\left\{\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{3\cos\alpha}\right\}.$$

В частности, $l = r$ при $\alpha = 60°$.

5. Неоднородный круговой диск радиуса $R$ может вращаться вокруг своей оси, расположенной горизонтально. Обозначим через $m$ его массу, через $A$ — момент инерции относительно оси вращения, через $r$ — расстояние центра тяжести $G$ от геометрического центра $O$ (находящегося на оси) и предположим, что на диск, кроме его собственного веса, действует добавочный вес, плечо которого равно радиусу $R$ диска, что можно осуществить посредством добавочной массы $m_1$, подвешенной на нити, имеющей ничтожную массу и обернутой вокруг диска.

Обозначая через $\theta$ угол между $OG$ и нисходящей вертикалью (отсчитываемый, как положительный, в ту сторону, в которую нагрузка, действуя одна, стремилась бы вращать диск), показать, что:

1) уравнение движения будет

$$A_1\ddot{\theta} = -g(mr\sin\theta - m_1R),$$

где

$$A_1 = A + m_1R^2;$$

2) равновесие возможно только при условии, что

$$\frac{m_1}{m}\frac{R}{r} \leqslant 1;$$

[1]) Zur Painlevé's Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze, *Gesamm. math. Abh.* т. II, Berlin, 1922, стр. 704—709.