годаря чему состояние движения сразу приводится к виду, совместимому с экспериментальными законами трения.

Мы не будем дальше задерживаться на этом вопросе и ограничимся указанием на особенно простой пример, данный Клейном [1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что приведенная длина маятника, состоящего из однородного стержня, подвешенного за один из его концов, равна $2l/3$, если l есть длина стержня.

2. Из двух шаров с равными радиусами и одинаковым весом один заполнен равномерно распределенной массой, а другой является полым, с центром тяжести в геометрическом центре. Если оба шара подвешены на нитях равной длины и приведены в колебательное движение, то полый шар колеблется медленнее сплошного. Мы имеем, таким образом, способ отличить один шар от другого.

3. Однородная палочка, изогнутая в виде дуги круга, колеблется в вертикальной плоскости под действием собственного веса около средней точки. Доказать, что длина эквивалентного простого маятника совпадает с диаметром той окружности, дугу которой составляет изогнутая палочка.

4. Тяжелый однородный твердый стержень AB своими концами скользит без трения по круговому желобку радиуса r, расположенному в вертикальной плоскости. Речь идет (если отвлечься от способа осуществления связей) о тяжелом твердом теле, которое может вращаться около центра O желобка. Если обозначим через 2α центральный угол, стягиваемый стержнем, как хордой, то для приведенной длины l простого изохронного маятника будем иметь выражение

$$l = r\left\{\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{3\cos\alpha}\right\}.$$

В частности, $l = r$ при $\alpha = 60°$.

5. Неоднородный круговой диск радиуса R может вращаться вокруг своей оси, расположенной горизонтально. Обозначим через m его массу, через A — момент инерции относительно оси вращения, через r — расстояние центра тяжести G от геометрического центра O (находящегося на оси) и предположим, что на диск, кроме его собственного веса, действует добавочный вес, плечо которого равно радиусу R диска, что можно осуществить посредством добавочной массы m_1, подвешенной на нити, имеющей ничтожную массу и обернутой вокруг диска.

Обозначая через θ угол между OG и нисходящей вертикалью (отсчитываемый, как положительный, в ту сторону, в которую нагрузка, действуя одна, стремилась бы вращать диск), показать, что:

1) уравнение движения будет

$$A_1\ddot{\theta} = -g(mr\sin\theta - m_1R),$$

где

$$A_1 = A + m_1R^2;$$

2) равновесие возможно только при условии, что

$$\frac{m_1}{m}\frac{R}{r} \leqslant 1;$$

[1]) Zur Painlevé's Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze, *Gesamm. math. Abh.* т. II, Berlin, 1922, стр. 704—709.

3) при этом условии будут два положения равновесия, одно устойчивое, другое неустойчивое;

4) если θ_0 есть значение θ, соответствующее положению устойчивого равновесия, то малые колебания диска около этого положения будут определяться тем же уравнением, что и в случае простого маятника длиной

$$\frac{A_1}{mgr\cos\theta_0}.$$

Замечая, что существует интеграл живых сил в виде

$$A_1\dot{\theta}^2 = 2g\{mr\cos\theta + m_1R(\theta+\alpha)\},$$

где α есть постоянная, рассмотреть возможные движения на основе общих рассуждений § 6 гл. I.

6. Составить уравнение движения тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг негоризонтальной оси.

Обозначая через α угол наклона оси к горизонту и пользуясь в остальном символами, принятыми для физического маятника, находим

$$A\ddot{\theta} = -mgr\cos\alpha\sin\theta.$$

7. Дверь шириною b (и постоянной плотности) неправильно подвешена на петлях, так что ось вращения немного наклонена относительно вертикали (в плоскости, в которой дверь расположена, когда она закрыта). Когда ее открывают, вращая на угол $\pi/2$, она не остается открытой и закрывается через τ секунд.

На основании предыдущего упражнения, в котором надо положить $\alpha = \pi/2 - i$, а также (т. I, гл. X, упражнение 16) $A/m = b^2/3$, $r = b/2$, определить i в функции от b и τ (которое удобнее измерять, чем i).

Получится

$$\sin i = \frac{b}{3g\tau^2}(2{,}62)^2,$$

где 2,62 есть численное значение так называемого лемнискатного интеграла

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

(см., например, Э. Чезаро, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. II, 1914, § 764, с, стр. 362).

8. Горизонтальная ось a физического маятника находится в поступательном горизонтальном движении со скоростью τ, изменяющейся с временем. Показать, что по теореме Кориолиса движение маятника вокруг a будет происходить так, как если бы эта ось была неподвижна и к каждому материальному элементу dm тела была приложена сила инерции переносного движения — $dm\dot{\tau}$, что равносильно предположению, что к центру тяжести, помимо веса, приложена сила — $m\dot{\tau}$.

Доказать, что движение определяется уравнением

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta - \dot{v}\cos\theta,$$

где, как обычно, обозначены, через — θ угол, который образует плоскость, проходящая через центр тяжести маятника и через ось a, с вертикальной плоскостью, через l — приведенная длина физического маятника и через $\dot{v}$ — составляющая τ, перпендикулярная к a.

9. В упражнении 16 гл. 5 определить реакции (нормальные), испытываемые стержнем AB со стороны направляющих, по которым он скользит своими концами.

Из основных уравнений или, если угодно, из принципа Даламбера следует, что вес стержня, реакции и силы инерции должны уравновешиваться, так что искомые реакции X в B и Y в A эквивалентны весу и силам инерции, взятым с обратным знаком.

Предположим для определенности, что центр тяжести G стержня находится в его средней точке, которая при движении остается на постоянном расстоянии $AB/2 = l/2$ от O (т. I, гл. V, п. 12). Отсюда следует, что если φ есть острый угол $\widehat{OBA}$ (дополнение угла θ, рассматриваемого в упомянутом упражнении), то составляющие ускорения точки G суть $l\dot{\varphi}^2/2$ в радиальном направлении к 0, $l\ddot{\varphi}/2$ в перпендикулярном направлении в сторону возрастающих φ, т. е. вниз. Следовательно, составляющие ускорения по осям Ox, Oy имеют выражения

$$\frac{1}{2}l(-\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \ddot{\varphi}\cos\varphi), \qquad \frac{1}{2}l(-\dot{\varphi}^2\cos\varphi - \ddot{\varphi}\sin\varphi);$$

искомые реакции X и Y определяются в виде

$$X = \frac{1}{2}ml(-\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \ddot{\varphi}\cos\varphi), \quad Y = \frac{1}{2}ml\left(-\dot{\varphi}^2\cos\varphi - \ddot{\varphi}\sin\varphi + \frac{2g}{l}\right).$$

Так как движение определяется уравнением

$$\ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi,$$

которое, если стержень предоставлен самому себе с углом наклона φ_0 в состоянии равновесия, допускает интеграл энергии

$$\dot{\varphi}^2 = -3\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

то для реакции в точке B справедливо выражение, зависящее только от угла φ,

$$X = \frac{3}{2}mg\sin\varphi\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0 + \frac{1}{2}\cos\varphi\right).$$

Мы видим отсюда, что когда стержень опускается и, следовательно, φ возрастает, то реакция X, вначале положительная, убывает и, наконец, исчезает для того значения φ_1 угла φ, которое удовлетворяет равенству

$$\cos\varphi_1 = \frac{2}{3}\cos\varphi_0;$$

после этого реакция X становится отрицательной.

Отсюда вытекает интересное следствие. Когда стержень просто опирается на вертикальную направляющую Oy (односторонняя связь), он, предоставленный самому себе с начальным наклоном φ_0, начинает опускаться, оставаясь в соприкосновении с Oy до тех пор, пока угол наклона не достигнет значения φ_1; затем стержень отделяется от вертикальной направляющей. Действительно, опора может осуществить только положительную реакцию ($X \geqslant 0$), а в настоящем случае при $\varphi > \varphi_1$ получилось бы $X < 0$.

10. Общее положение кинетостатики, указанное в § 2, допускает интересное обобщение, к которому мы придем, рассматривая вместо целого твердого тела S, находящегося в движении, одну из его частей S_1.

Предполагая, что известны внешние силы, действующие на всю систему, можно считать также известными результирующую R_1 и результирующий момент M_1 (относительно неподвижной или совпадающей с центром тяжести точки системы S_1) той части внешних сил, которые действуют на S_1. Но наряду с этими силами придется рассматривать, как внешние относительно S_1, воздействия (усилия), которым эта часть тела S подвергается вследствие своей связи с оставшейся частью; замечание, о котором здесь идет речь, состоит в том, что, составляя основные уравнения для S_1, мы сможем определить результирующую Φ и результирующий момент Γ этих усилий. Действительно, обозначая через Q_1 и K_1 количество движения и результирующий момент количеств движения части S_1, будем иметь

$$\Phi = \frac{dQ_1}{dt} - R_1, \qquad \Gamma = \frac{dK_1}{dt} - M_1.$$

Чтобы иметь наглядное приложение этого замечания, рассмотрим случай балки (т. I, гл. XIV, § 5) и попытаемся определить касательное и нормальное усилия и моменты кручения и изгиба, относящиеся к любому сечению σ.

Обратимся, в частности, к цилиндрической однородной балке с осью OA, могущей вращаться без трения под действием своего веса в вертикальной плоскости вокруг точки O; обозначив через m полную массу, через l — длину балки, через θ — угол отклонения ее от вертикали (нисходящей), через x — расстояние OP от O любого нормального сечения σ, будем искать силы, с которыми OP действует на часть PA.

Предположим для простоты, что плоскость симметрии балки совпадает с вертикальной плоскостью, в которой происходит движение. Тогда ясно, что в этой плоскости будет лежать искомая сила Φ, а момент Γ, который мы будем предполагать взятым относительно точки P, будет перпендикулярен к ней. Поэтому все сведется к определению трех скалярных величин вместо шести, как это имеет место в общем случае.

Обратимся прежде всего к силе Φ, представляя ее разложенной на две составляющие — радиальную ν, направленную к точке O (нормальное усилие или растягивающая сила), и трансверсальную τ в направлении возрастающих θ (касательное усилие или срезывающая сила).

В силу однородности балки масса части ее PA будет $m(l-x)/l$ и центр тяжести этой части будет лежать на расстоянии $l+x/2$ от точки O. Так как угловая скорость равна $\dot\theta$, то составляющие вектора dQ_1/dt на основании известной формулы $Q = m v_G$ будут иметь выражения

$$\frac{m(l^2-x^2)}{2l}\dot\theta^2, \quad \frac{m(l^2-x^2)}{2l}\ddot\theta,$$

а аналогичными составляющими веса будут

$$-mg\frac{l-x}{l}\cos\theta, \quad -mg\frac{l-x}{l}\sin\theta;$$

поэтому (R_1 сводится к весу части PA) будем иметь

$$\nu = \frac{m(l^2-x^2)}{2l}\dot\theta^2 + mg\frac{l-x}{l}\cos\theta,$$

$$\tau = \frac{m(l^2-x^2)}{2l}\ddot\theta + mg\frac{l-x}{l}\sin\theta.$$

Что касается Γ, то, как уже было отмечено, достаточно определить его составляющую Γ_a по оси вращения a (нормаль в точке O к вертикальной плоскости движения), которую будем подразумевать ориентированной так, чтобы направление, соответствующее возрастанию θ, было правовращающим;

для этой цели удобно воспользоваться уравнением моментов количеств движения относительно центра тяжести части PA балки.

Так как момент Γ отнесен к точке P, то составляющая по оси a момента относительно центра тяжести усилий, действующих в сечении P, будет (т. I, гл. I, п. 33)

$$\Gamma_a - \frac{l-x}{2}\tau.$$

С другой стороны, момент веса относительно центра тяжести равен нулю, а момент инерции части PA относительно ее центра тяжести есть (т. I, гл. X, п. 30)

$$\frac{m(l-x)^3}{12l}.$$

Так как составляющая по оси a вектора dK_1/dt (гл. IV, п. 20) имеет величину

$$\frac{m(l-x)^3}{12l}\ddot{\theta},$$

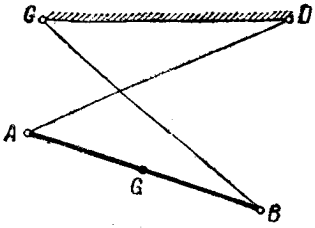
то из уравнения моментов количеств движения имеем

$$\Gamma_a = \frac{m(l-x)^3}{12l}\ddot{\theta} + \frac{l-x}{2}\tau.$$

Естественно, что в этой формуле, как и в тех, которые были получены ранее для ν и τ, вместо $\ddot{\theta}$ и $\dot{\theta}$ нужно подставить их выражения, которые выводятся в теории движения маятника.

11. Найти результаты предыдущего упражнения, рассматривая вместо части PA балки часть OP, смежную с осью вращения. Естественно, что в этом случае к внешним силам помимо веса необходимо причислить реакцию неподвижной точки O.

12. Рассмотреть в вертикальной плоскости шарнирный антипараллелограмм $ABCD$ со стороной CD, закрепленной горизонтально (фиг. 8). Если массы сторон BC, AD ничтожно малы, то можно рассматривать движение несвободного твердого стержня AB, находящегося только под действием собственного веса. Мы рассмотрим здесь случай, когда центр тяжести G стержня AB совпадает со средней его точкой, и этот стержень целиком находится ниже горизонтали CD. Обозначим через $2c$ общую длину сторон AB, CD, через $2b$ — наибольшее удаление от прямой CD, которого может достигнуть точка G (и соответствующего положению равновесия, когда сторона AB будет горизонтальной, как и CD); положение AB будем определять углом 2θ, по предположению острым, который прямая AB образует с горизонталью CD.



Фиг. 8.

Как мы видели в кинематике (т. I, гл. V, п. 17), в плоском движении стороны AB мгновенным центром будет точка I пересечения сторон BC, AD и геометрическим местом точек I относительно AB и CD (подвижная и неподвижная полодии) будут два равных эллипса с фокусами в точках A, B и C, D, имеющие в любой момент в качестве общей касательной прямую IO, биссектрису угла 2θ.

Если возьмем подвижные оси с началом в G, одна из которых Gx совпадает с GO, а другая Gy направлена вверх, т. е. от G к CD, то из известных

формул аналитической геометрии найдем выражения координат x, y точки I в функциях параметра θ в виде

$$\frac{x}{a}=-\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}},\qquad \frac{y}{b}=\frac{b\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}},$$

где $a^2=b^2+c^2$.

Заметив это, доказать, что живая сила T системы и потенциал ее U имеют соответственно значения

$$T=\frac{1}{2}A(2\dot\theta)^2,\qquad U=2mg\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta},$$

где m есть масса стержня AB и A — полярный момент инерции его относительно точки I, определяемый выражением $m(\delta^2+x^2+y^2)$, если δ есть центральный радиус инерции этого стержня.

Вывести, в частности, из предыдущих формул, что при $\theta=0$ будем иметь устойчивое равновесие только в том случае, если $b>c$, и что в этом предположении при малых колебаниях около положения устойчивого равновесия система ведет себя как простой маятник длиною

$$l=\frac{2(\delta^2+b^2)b}{b^2-c^2}.$$

13. Тяжелый круглый диск с центром тяжести в геометрическом центре катится без скольжения по произвольной кривой, расположенной в вертикальной плоскости. Исследовать движение. Обозначим через λ кривую, через P — точку соприкосновения диска с кривой λ и через φ — угол нормали в P к кривой λ с вертикалью, направленной вниз, предполагая, что положительное направление на этой нормали выбрано определенным, хотя и произвольным образом.

Обозначив через r радиус кривизны кривой в точке P и через a — радиус диска, подтвердить, что абсолютная величина скорости точки P равна $r|\dot\varphi|$, абсолютная величина скорости центра диска C (который описывает кривую λ', параллельную λ) равна $|(r\pm a)\dot\varphi|$, где надо взять знак плюс или минус, смотря по тому, находятся ли центр кривизны кривой λ и диск относительно касательной к кривой в точке P с противоположных сторон или с одной и той же стороны.

Благодаря отсутствию скольжения диск должен иметь угловую скорость, по абсолютной величине равную

$$\frac{1}{a}|(r\pm a)\dot\varphi|,$$

так что его живая сила, если обозначить через m массу, через δ центральный радиус инерции, будет

$$T=\frac{1}{2}m(r\pm a)^2\left(1+\frac{\delta^2}{a^2}\right)\dot\varphi^2.$$

С другой стороны, при перемещении $ds=|r\pm a|\,d\varphi$ центра C вес диска, приложенный в этой точке, совершает элементарную работу

$$dU=\pm mg(r\pm a)\sin\varphi\,d\varphi,$$

где знак надо выбрать таким образом, чтобы было $dU\gtrless 0$, смотря по тому, будет ли перемещение ds нисходящим или восходящим. Движение определится уравнением живых сил $dT=dU$, которое интегрируется непосредственно.

Если кривая λ есть окружность с радиусом $r>a$ и диск катится внутри нее, то у T надо взять знак минус, а потенциал U, так как теперь в качестве

угла φ можно взять центральный угол, соответствующий дуге окружности λ, соединяющей самую нижнюю ее точку с точкой P, определится равенством

$$U = mg(r-a)\cos\varphi + \text{const}.$$

В этом случае диск ведет себя как простой маятник длиной

$$(r-a)\left(1+\frac{\delta^2}{a^2}\right).$$

14. На основании формул п. 11 показать, что уравнения, определяющие малые колебания двойного маятника (вертикального), около конфигурации устойчивого равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ будут иметь вид

$$A\ddot{\varphi} + mr(r\ddot{\varphi} + \lambda\ddot{\varphi}_1) + mgr\varphi = 0,$$

$$A_1\ddot{\varphi}_1 + m\lambda(r\ddot{\varphi} + \lambda\ddot{\varphi}_1 + g(m_1r_1 + m\lambda)\varphi_1 = 0.$$

Положив

$$\frac{A}{mr} + r = l, \quad \frac{A_1 + m\lambda^2}{m_1r_1 + m\lambda} = \lambda', \quad \frac{m\lambda r}{m_1r_1 + m\lambda} = l',$$

доказать, что l представляет собой приведенную длину второго маятника S в предположении, что точка O является неподвижной и что λ' также есть приведенная длина, но не главного маятника S_1, а воображаемого маятника S_1', который получился бы из S_1, если бы мы в O поместили всю массу маятника S.

Доказать также, чтобы этим воспользоваться немного позже, что g/l и g/λ' представляют соответственно квадраты постоянных частот маятников S и S_1'.

Уравнения малых колебаний можно написать в виде

$$\lambda\ddot{\varphi}_1 + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0,$$

$$\lambda'\ddot{\varphi}_1 + l'\ddot{\varphi} + g\varphi_1 = 0;$$

рассмотрение показательных решений вида $\varphi = \rho e^{izt}$, $\varphi_1 = \rho_1 e^{izt}$ приводит к биквадратному характеристическому уравнению

$$-\lambda l' z^4 + (g - \lambda' z^2)(g - lz^2) = 0.$$

Проверить, основываясь на значениях величин l, l', λ', что в этом уравнении коэффициент $(\lambda' l - \lambda l')$ при z^4 всегда будет положительным, так что при $z^2 \to \infty$ многочлен в левой части стремится к положительной бесконечности. Так как этот многочлен при $z^2 = 0$ принимает тоже положительное значение g^2 и остается постоянно отрицательным в интервале, имеющем концами g/λ' и g/l, то можно убедиться, что характеристическое уравнение для z^2 дает два положительных значения: одно — меньшее меньшего из двух значений g/λ', g/l, другое — большее большего из них.

Замечая, что величина $|z|$ пропорциональна главной частоте колебаний, вывести, что главные частоты двойного маятника являются внешними по отношению к интервалу, заключенному между частотами двух воображаемых маятников S и S_1'.

15. Два физических маятника S, S_1 имеют одну и ту же плоскость качаний и точки подвеса O, O_1, расположенные на одной и той же вертикали. Но в то время как маятник S находится в нормальном положении, т. е. с центром тяжести G под точкой O, маятник S_1 оказывается перевернутым так, что центр тяжести его G_1 лежит над точкой O_1. Это достигается посред-

ством следующего приспособления: маятник S_1 оканчивается стержнем, имеющим направление O_1G_1 и несущим на конце шарик, который может скользить без трения вдоль цилиндрической полости, просверленной в теле маятника S. Таким образом, система приведена только к одной степени свободы.

Обозначив через l, l_1 длины двух маятников, через m, m_1 — их массы и положив $OG = r$, $O_1G_1 = r_1$, проверить, что неравенство $mrl_1^2 > m_1r_1l^2$ дает условие того, что конфигурация, в которой OG и O_1G_1 будут расположены на одной прямой (вертикально), является положением устойчивого равновесия, и доказать, что продолжительность малых колебаний (простых) около такой конфигурации определяется выражением

$$\pi\sqrt{\frac{Al_1^2 + A_1l^2}{g(mrl_1^2 - m_1r_1l^2)}},$$

где A, A_1 обозначают моменты инерции маятников относительно соответствующих осей подвеса.

16. В возникающем движении неизменяемой плоской системы, выходящей из состояния покоя, распределение ускорений при обычном значении символов определяется формулой

$$\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{OP}.$$

Пользуясь основными уравнениями (21′), (22), вывести отсюда, в частности, что составляющие возникающего ускорения любой точки P суть

$$\frac{1}{m}\left(R_x - \frac{M_\zeta}{\delta^2}x\right), \quad \frac{1}{m}\left(R_y + \frac{M_\zeta}{\delta^2}y\right),$$

где x, y обозначают координаты точки P относительно осей с началом в центре тяжести.

17. Однородный стержень AB поддерживается в горизонтальном положении равновесия посредством двух нитей равной длины l, прикрепленных к стержню в точках A и B и подвешенных за две точки A_1 и B_1, вертикально расположенные соответственно над A и B.

Воображая, что нить B_1B перерезана, определить начальное натяжение T второй нити.

Для этой цели удобно применить формулу предыдущего упражнения к точке A, о которой известно, что она должна оставаться на расстоянии l от неподвижной точки A_1. Поэтому ее начальное ускорение может быть только горизонтальным. С другой стороны, заметим, что внешние силы сводятся к весу, приложенному к центру тяжести G, и к натяжению T нити A_1A, действующим в вертикальном направлении — одна вниз, другая вверх.

Предполагая ось Gy вертикальной и направленной вверх, достаточно выразить, что вначале вертикальное ускорение точки A есть нуль, и принять во внимание, что для этой точки $y = 0$, чтобы заключить, что в начальный момент имеем $T = mg$, т. е. имеем двойное натяжение по сравнению с тем которому подвергается нить в статических условиях.

18. Предположим, что скольжение стержня, о котором шла речь в упражнении 9, происходит с трением как в A, так и в B, и для определенности допустим, что коэффициент трения f имеет одно и то же значение на обеих направляющих.

Прилагая теорему живых сил и принимая во внимание все внешние силы, действующие на стержень, составить уравнение движения.

Замечая, что реакции ничего не прибавляют к элементарной работе, находим

$$\ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi \mp \frac{f}{ml}(X\sin\varphi + Y\cos\varphi),$$

где X и Y имеют выражение, указанное в упражнении 9, и знак минус берется для нисходящей фазы.

19. Однородный шар катится без скольжения по наклонной шероховатой плоскости (с углом наклона i к горизонту) по прямой наибольшего наклона. Определить реакцию плоскости в точке соприкосновения.

Эта реакция имеет составляющими $2mg\sin i/7$ по линии наибольшего наклона и $mg\cos i$ по нормали (вверх), так что эта последняя имеет ту же величину, что и в статических условиях.

Здесь мы также встречаемся с кажущимся парадоксом (ср. т. I, гл. XIII, п. 33), что трение скольжения направлено в сторону движения; и здесь еще сохраняет силу объяснение, что такая сила не является в действительности ни движущей силой, ни сопротивлением, потому что вследствие отсутствия скольжения ее точка приложения будет всегда иметь нулевую скорость.

20. Исследовать качение по горизонтальной плоскости тяжелого круглого цилиндра, центр тяжести которого G находится на расстоянии r от оси, предполагая, что прямая, параллельная образующей и проходящая через G, является главной осью инерции для тела (ср. п. 12).

Рассматривая нормальное сечение, проходящее через G, мы сведем задачу к двум измерениям (движение диска).

Обозначая через a радиус диска, через C — центр, через P — точку касания, через θ — угол PCG, будем иметь

$$PG^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta,$$

так что если δ есть центральный радиус инерции и m — масса тела, то момент инерции A относительно образующей касания будет

$$A = m(\delta^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta).$$

Принимая во внимание, что существует интеграл живых сил

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta = \text{const},$$

показать, что малые колебания около положения устойчивого равновесия $\theta = 0$ будут одинаковы с качаниями простого маятника длиною

$$\frac{\delta^2 + (a-r)^2}{r}.$$

21. Возьмем снова задачу предыдущего упражнения, сведем ее к случаю плоского движения и примем во внимание также и скольжение.

Можно возвратиться к уравнению живых сил в виде

$$d(T - U) = dL,$$

где $T - U$ имеет выражение

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta,$$

указанное в предыдущем упражнении;

$$dL = -fmg\cdot PG\cdot|d\theta|,$$

где f есть коэффициент трения, и

$$PG^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta.$$

Дополнить исследование (способом, аналогичным тому, который был развит в пп. 50—51 гл. I), выяснив, прекратится или будет продолжаться движение после того, как угловая скорость сделается равной нулю.

22. Прямолинейный стержень AB опирается концом A на горизонтальную шероховатую плоскость. В начальный момент он составляет угол α_0 с вертикалью, направленной вверх, и предоставлен самому себе. Требуется определить наименьшую величину, которую может иметь α_0 в функции от коэффициента трения f в точке опоры (и от структурных постоянных), для того чтобы конец A стержня не скользил по плоскости во время падения.

Решение сводится к тому, чтобы определить реакцию плоскости в точке A, предполагаемой неподвижной, и указать наибольшую величину отношения между двумя составляющими X и Y (горизонтальной в направлении проекции AB и вертикальной) этой реакции. На основании общего критерия кинетостатики (п. 4), уже применявшегося в упражнении 9, реакция плоскости в точке A дается непосредственно первым из уравнений (5). В настоящем случае, если обозначим через r расстояние центра тяжести G стержня от A, производная от результирующей $\boldsymbol{Q}$ количеств движения будет иметь составляющими, как в упомянутом упражнении, $r\dot{\alpha}^2$ по GA и $r\ddot{\alpha}$ в перпендикулярном направлении (ориентированном в сторону возрастающих α). Так как горизонтальная и вертикальная составляющие вектора $\boldsymbol{R}$ сводятся здесь к 0 и $-mg$, то имеем

$$X = mr\,(-\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \ddot{\alpha}\cos\alpha),$$

$$Y = mr\left(-\dot{\alpha}^2\cos\alpha - \ddot{\alpha}\sin\alpha + \frac{g}{r}\right).$$

С другой стороны, уравнение движения и интеграл живых сил, отправляясь от допущенных начальных условий ($\alpha = \alpha_0$, скорость равна нулю), можно написать соответственно в виде

$$(\delta^2 + r^2)\ddot{\alpha} = gr\sin\alpha, \quad (\delta^2 + r^2)\dot{\alpha}^2 = 2gr\,(\cos\alpha_0 - \cos\alpha),$$

где δ обозначает центральный радиус инерции стержня.

Принимая во внимание эти равенства, будем иметь

$$\frac{X}{Y} = \frac{\sin\alpha\,(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)}{\dfrac{\delta^2}{r^2} + \cos\alpha\,(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)},$$

а отсюда, в частности, мы видим, что f не должно быть меньше начального значения только что написанного отношения, т. е.

$$\frac{\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{\dfrac{\delta^2}{r^2} + \cos^2\alpha_0}.$$

Для того чтобы также и при $\alpha = \pi/2$ было $|X/Y| \leqslant f$, требуется, далее, чтобы

$$\cos\alpha_0 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{r^2}f.$$

Принимая это во внимание (а также и то, что $\delta^2/r^2 \leqslant 1$), проверить, что предыдущее выражение отношения X/Y, рассматриваемое как функция от α, имеет всегда отрицательную производную в замкнутом интервале $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

Следовательно, отношение X/Y, исчезающее в этом интервале (при $3\cos\alpha = 2\cos\alpha_0$), принимает наибольшую абсолютную величину на концах α_0 и $\pi/2$ интервала.

Дополнить исследование доказательством того, что указанное выше ограничение

$$\cos\alpha_0 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{r^2}f$$

является не только необходимым, но и достаточным

23. Исследовать возникающее движение по горизонтальной шероховатой плоскости тяжелого стержня, находящегося под действием внешних сил. Ср. G. Bisconcini, *Boll. della Unione mat. ital.*, Anno IV, 1925; пп. 3—4; стр. 109—113.

24. Изучить динамически колебания вращающегося горизонтального вала. Случай установившегося вращения был рассмотрен как задача об относительном равновесии в § 3 гл. XVI т. I. (Динамическую трактовку см. C. Melli, *Nuovo Cimento*, т. XXV, 1923, стр. 77—85.)