Глава VIII

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ДВИЖЕНИЕ ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 1. Общие соображения о движении твердого тела около неподвижной точки или около центра тяжести

1. Уравнения Эйлера. В динамике неизменяемых систем типичной задачей с тремя степенями свободы наряду с плоским движением является задача о движении твердого тела, закрепленного (без трения) в одной из своих точек O. Эта задача является одной из важнейших задач всей механики не только вследствие большого разнообразия конкретных вопросов, которые к ней приводятся, но также и благодаря тем теоретическим выводам, которые из нее могут быть получены.

Об общей постановке этой задачи мы уже имели случай говорить в п. 2 предыдущей главы. Обратимся снова к указанным там рассуждениям и попутно разъясним и дополним их.

При изучении движения твердого тела, конечно, удобно исходить из основных уравнений. Уже само предположение о неподвижности точки O прямо подсказывает, что центр приведения сил или центр моментов нужно взять в этой точке, благодаря чему основные уравнения, отнесенные к галилеевым осям $\Omega\xi\eta\zeta$, принимают свой наиболее простой вид

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}. \tag{2}$$

Здесь внешними силами, для которых $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ являются результирующей силой и результирующим моментом относительно неподвижной точки O, очевидно, будут *силы, прямо приложенные* (внешние), *и реакция*, развивающаяся в O.

Далее, как и в случае твердого тела с закрепленной осью (гл. VII, п. 5), предположим, что, зная активные силы и ничего не зная заранее о реакции в точке O, мы хотим определить движение твердого тела около неподвижной точки.

Неизвестная реакция, как одна из составляющих результирующей силы $\boldsymbol{R}$, входит только в уравнение (1), так как, будучи приложена в точке O, она не оказывает влияния на величину момента $\boldsymbol{M}$ и потому уравнение (2) от нее не зависит; твердое тело имеет в этом случае три степени свободы, и потому для определения движения тела на основе прямых данных задачи (и начальных условий) доста-

точно одного векторного уравнения (2) (как мы уже отмечали в п. 2 предыдущей главы).

Это основное уравнение можно сделать более наглядным и более удобным для изучения, если отнести его к осям x, y, z, неизменно связанным с телом и имеющим начало в точке O, после чего оно, как известно, примет вид

$$\dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ обозначает угловую скорость подвижных осей, т. е. угловую скорость самого тела относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$, а $\dot{\boldsymbol{K}}$ есть производная от $\boldsymbol{K}$ по времени t относительно осей $Oxyz$.

В качестве подвижных осей удобно взять три главные оси инерции твердого тела относительно точки O. При этой системе отсчета проекции результирующего момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ на оси $Oxyz$ имеют простейшие выражения (гл. IV, пп. 16, 19)

$$K_x = Ap, \quad K_y = Bq, \quad K_z = Cr, \tag{4}$$

где A, B, C обозначают три главных момента инерции твердого тела относительно точки O (которые, конечно, должны быть даны) и p, q, r — неизвестные составляющие по осям $Oxyz$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ этой системы отсчета (т. е. самого твердого тела) относительно инерциальной системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$.

Если обозначим теперь через M_x, M_y, M_z проекции на подвижные оси результирующего момента $\boldsymbol{M}$ внешних активных сил относительно точки O, то уравнение (2) после проектирования на три оси (главные оси инерции) x, y, z приводит к трем скалярным уравнениям

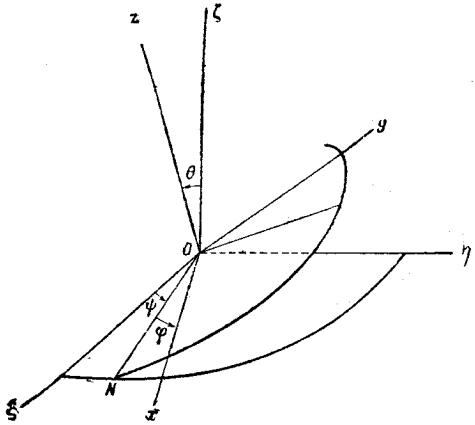
$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)\,qr &= M_x, \\ B\dot{q} - (C - A)\,rp &= M_y, \\ C\dot{r} - (A - B)\,pq &= M_z. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Эти уравнения, частный случай которых мы уже встречали в п. 13 предыдущей главы, представляют собой классические *уравнения Эйлера* — уравнения движения твердого тела около одной из его точек.

Важно отметить, что, вообще говоря, нельзя утверждать, что точная и определенная постановка задачи исчерпывается только одними уравнениями (5). Проекции M_x, M_y, M_z момента $\boldsymbol{M}$ внешних активных сил в самом общем случае выражаются в функции времени, скоростей отдельных точек твердого тела и их положения в пространстве, или, что то же самое, положения твердого тела по отношению к осям $O\xi\eta\zeta$. Далее, в то время как скорости различных точек тела выражаются при помощи известной кинематической формулы

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$

в функции от p, q, r и от положения этих точек или, что то же самое, от трех произвольных параметров, определяющих ориентировку твердого тела в пространстве, в конечном виде, самые угловые скорости p, q, r в силу их природы связаны с этими тремя параметрами соотношениями дифференциального типа. Отсюда становится ясным, что для полной постановки нашей задачи мы должны прежде всего выбрать эти параметры и затем присоединить к уравнениям Эйлера (5) дифференциальные соотношения между p, q, r и выбранными параметрами.



Фиг. 9.

Выбрав, например, в качестве параметров углы Эйлера θ, φ, ψ, определяющие положение подвижных осей $Oxyz$ относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$ (фиг. 9), присоединим к уравнениям (5) известные, чисто кинематические уравнения (т. I, гл. III, пп. 32, 34)

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\varphi\sin\theta, \\ q &= -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\cos\varphi\sin\theta, \\ r &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Так как M_x, M_y, M_z в уравнениях (5) можно теперь рассматривать выраженными в конечном виде как функции от θ, φ, ψ, p, q, r и t, то уравнения (5) и (6) представляют собой систему дифференциальных уравнений первого порядка (очевидно, приводимую к нормальному виду) для шести неизвестных функций θ, φ, ψ, p, q, r времени. Исключая p, q, r, мы можем привести ее к эквивалентной ей системе второго порядка с неизвестными функциями θ, φ, ψ. Как в том, так и в другом случае общее решение зависит от шести произвольных постоянных, которыми можно располагать так, чтобы найденное общее решение удовлетворяло начальным условиям при произвольно заданных начальном положении твердого тела и начальной угловой скорости.

Ничего другого нельзя прибавить в отношении определения этого движения до тех пор, пока мы не введем какого-нибудь ограничивающего предположения о природе действующих сил или о материальной структуре тела, различные примеры чего мы дадим в следующих параграфах.

Здесь же в общей теории необходимо отметить, что всякий раз, как только будет определено движение твердого тела, первое основ-

ное уравнение (1) однозначно определит в функции времени реакцию неподвижной точки O аналогично тому, как это было в соответствующем статическом случае (т. I, гл. XIII, п. 55).

2. Движение свободного твердого тела около центра тяжести. Согласно тому, что мы видели в п. 2 предыдущей главы, второе основное уравнение принимает вид

$$\dot{K} + \omega \times K = M \tag{3}$$

также и для свободного *твердого тела*, лишь бы за центр приведения (и начало подвижных осей) был взят центр тяжести тела. Здесь, естественно, не может быть речи о реакции в точке O, так что M означает результирующий момент только внешних активных сил (на этот раз относительно центра тяжести). Уравнение (3) после проектирования на главные центральные оси инерции твердого тела дает три дифференциальных соотношения между характеристиками p, q, r (движения относительно центра тяжести) и моментами M_x, M_y, M_z, которые формально также имеют вид уравнений Эйлера (5). Но здесь по сравнению со случаем предыдущего пункта имеется существенная разница. Если мы введем параметры ориентировки твердого тела, например углы Эйлера, определяющие ориентировку центральных осей $Gxyz$ относительно инерциальной системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$, то момент M так же, как и активные силы, мы будем рассматривать зависящим не только от аргументов θ, φ, ψ, p, q, r (и t), связанных с движением относительно центра тяжести, но также и от положения и скорости (абсолютной) самого центра тяжести. А так как движение центра тяжести определяется первым основным уравнением (вспомним теорему о движении центра тяжести гл. V, п. 6), то мы видим, что для определения движения свободного твердого тела около центра тяжести недостаточно рассматривать основное уравнение моментов изолированно, как при движении около неподвижной точки, но необходимо также (по крайней мере в общем случае) обратиться к общей постановке динамической задачи о движении твердого тела, рассматривая совместно оба основных уравнения.

§ 2. Быстрое вращение твердого тела и элементарные гироскопические явления

3. Элементарная теория гироскопических явлений. Мы сделаем здесь небольшое отступление от наших рассуждений, чтобы напомнить и несколько точнее описать некоторые механические явления, невольно обращающие на себя внимание каждого, кто их наблюдает. Каждый из нас, конечно, замечал, что быстро вращающиеся твердые тела обнаруживают необычное поведение по отношению к силе тяжести. Диск, катящийся быстро по земле, колеса велосипеда во время езды на нем, волчок, быстро вращающийся вокруг собственной оси,