ное уравнение (1) однозначно определит в функции времени реакцию неподвижной точки O аналогично тому, как это было в соответствующем статическом случае (т. I, гл. XIII, п. 55).

2. Движение свободного твердого тела около центра тяжести. Согласно тому, что мы видели в п. 2 предыдущей главы, второе основное уравнение принимает вид

$$\dot{K} + \omega \times K = M \tag{3}$$

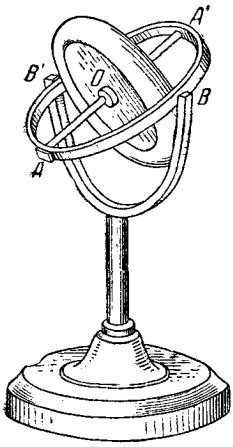
также и для свободного *твердого тела*, лишь бы за центр приведения (и начало подвижных осей) был взят центр тяжести тела. Здесь, естественно, не может быть речи о реакции в точке O, так что M означает результирующий момент только внешних активных сил (на этот раз относительно центра тяжести). Уравнение (3) после проектирования на главные центральные оси инерции твердого тела дает три дифференциальных соотношения между характеристиками p, q, r (движения относительно центра тяжести) и моментами M_x, M_y, M_z, которые формально также имеют вид уравнений Эйлера (5). Но здесь по сравнению со случаем предыдущего пункта имеется существенная разница. Если мы введем параметры ориентировки твердого тела, например углы Эйлера, определяющие ориентировку центральных осей $Gxyz$ относительно инерциальной системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$, то момент M так же, как и активные силы, мы будем рассматривать зависящим не только от аргументов θ, φ, ψ, p, q, r (и t), связанных с движением относительно центра тяжести, но также и от положения и скорости (абсолютной) самого центра тяжести. А так как движение центра тяжести определяется первым основным уравнением (вспомним теорему о движении центра тяжести гл. V, п. 6), то мы видим, что для определения движения свободного твердого тела около центра тяжести недостаточно рассматривать основное уравнение моментов изолированно, как при движении около неподвижной точки, но необходимо также (по крайней мере в общем случае) обратиться к общей постановке динамической задачи о движении твердого тела, рассматривая совместно оба основных уравнения.

§ 2. Быстрое вращение твердого тела и элементарные гироскопические явления

3. Элементарная теория гироскопических явлений. Мы сделаем здесь небольшое отступление от наших рассуждений, чтобы напомнить и несколько точнее описать некоторые механические явления, невольно обращающие на себя внимание каждого, кто их наблюдает. Каждый из нас, конечно, замечал, что быстро вращающиеся твердые тела обнаруживают необычное поведение по отношению к силе тяжести. Диск, катящийся быстро по земле, колеса велосипеда во время езды на нем, волчок, быстро вращающийся вокруг собственной оси,

показывают, что при быстром вращении не наблюдаются, по крайней мере полностью, обычные эффекты действия силы тяжести. Мы указали здесь некоторые примеры тех явлений, которые принято называть *гироскопическими*.

Под названием *гироскоп* (которое впервые, повидимому, ввел Фуко для прибора, построенного Боненбергером [2] в Тюбингене в 1877 г.) в физике подразумевается прибор, в его простейшей форме состоящий из металлического однородного массивного диска, насаженного в его центре O (фиг. 10) перпендикулярно к его плоскости на ось, концы которой опираются в двух диаметрально противоположных точках A, A' на металлическое кольцо, свободно вращающееся вокруг своего диаметра, перпендикулярного к AA'. Концы B, B' этого второго диаметра опираются на концы полукруглой вилки; эта вилка сама свободно вращается вокруг своей оси, помещенной своим нижним концом в муфту, вделанную в устойчивую подставку, которая должна опираться на горизонтальный стол. Согласно терминологии, принятой нами в гл. IV, п. 17, массивный диск вместе с неизменно связанной с ним осью AA' (поскольку он является твердым телом вращения, обладающим относительно прямой AA' полной геометрической и динамической симметрией) и представляет собой гироскоп в узком смысле; подвес же, описанный выше, предназначен для того, чтобы этот гироскоп мог свободно вращаться вокруг своего центра тяжести O.



Фиг. 10.

Представим себе, далее, что гироскопу сообщено очень быстрое вращение вокруг его оси AA' и что прибор опирается на стол, в силу чего эта ось AA' займет определенное направление. Если теперь мы попробуем отклонить ось AA' от этого направления, поворачивая рукой кольцо около его диаметра BB' или вилку вокруг ее вертикальной оси, то почувствуем тотчас же сопротивление, значительно большее того, которое могли бы вызвать силы, действующие на ось, если бы гироскоп был в покое (относительном). Если, далее, мы возьмем подставку прибора в руку и будем перемещать прибор как угодно в пространстве (конечно, не слишком быстро и избегая резких движений), то увидим, что ось AA' гироскопа, находящегося в быстром вращении, будет сохранять неизменным свое первоначальное направление относительно окружающих предметов. Если бы мы воспользовались более тонкими приспособлениями, способными лучше, чем вилка и муфта, обеспечить свободную подвижность гироскопа вокруг его центра тяжести и поддерживали бы в течение длительного времени, например при помощи электромотора, быстрое вра-

щение, то увидели бы, что и суточное вращение Земли не изменит направления оси AA': ось останется неизменно направленной в одну и ту же точку небесной сферы. Это утверждение, основанное на эксперименте, носит название *принципа сохранения направления гироскопической оси.*

На этом приборе можно наблюдать и другое явление, столь же важное, но не столь очевидное. Прикладывая к оси гироскопа в любой ее точке силу F, например силу тяжести, мы достигнем того, что сопротивление гироскопической оси будет преодолено и она будет смещаться. Но это смещение будет происходить не так, как можно было бы ожидать, т. е. не в плоскости, проходящей через ось и линию действия силы, а в направлении, перпендикулярном к этой плоскости. Тщательное наблюдение позволяет описать явление более точно. Сила F, приложенная в любой точке оси, например в точке A, имеет относительно центра тяжести O определенный момент M, который будет перпендикулярным (и направленным в определенную сторону) к плоскости, проходящей через силу F и ось. Под действием силы F ось гироскопа (направленная, как обычно, в ту сторону, относительно которой предположенное быстрое вращение гироскопа оказывается правым) будет стремиться расположиться по направлению и в сторону момента M. В этом и заключается так называемый *принцип стремления к параллельности* (*оси гироскопа* с моментом действующей силы).

Пользуясь уравнением моментов количеств движения, мы сможем теоретически объяснить оба найденные выше экспериментальным путем свойства движения тяжелого гироскопа; начнем с разбора принципа стремления к параллельности. Заметим теперь же, что для объяснения этого явления совсем несущественно предположение, что речь идет о твердом теле, имеющем гироскопическую структуру; достаточно предположить, что ось, вокруг которой происходит быстрое вращение, совпадает с одной из главных осей инерции твердого тела.

4. Качественное объяснение стремления оси быстрого вращения к параллельности с моментом действующих сил. Чтобы изложить вопрос в наиболее общем виде, возьмем твердое тело какой угодно структуры и рассмотрим любое движение тела вокруг одной из его точек O, предполагаемой неподвижной или совпадающей с центром тяжести. Уравнение моментов количеств движения, отнесенное к инерциальной системе осей и написанное в виде

$$dK = M\,dt,$$

показывает, что приращение за любой элемент времени результирующего момента K количеств движения параллельно результирующему моменту M внешних сил, так что можно сказать, что вектор K с течением времени *стремится* расположиться параллельно M.

Представим себе теперь, что тело очень быстро вращается вокруг одной из своих главных осей инерции; выражаясь точнее, примем за

подвижные оси $Oxyz$ главные оси инерции твердого тела относительно точки O и, обозначая через p, q, r соответствующие проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, предположим, что в промежутке времени, в течение которого рассматривается движение, r так велико по сравнению с p, q, что каждое из отношений p/r, q/r можно рассматривать как количество первого порядка, т. е. можно считать, что

$$\left|\frac{p}{r}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{q}{r}\right| < \varepsilon,$$

где ε есть малая величина, которой можно пренебречь в первом приближении.

Отсюда следует, что угол θ, образованный линией действия вектора $\boldsymbol{\omega}$ или мгновенной осью вращения и единичным вектором $\boldsymbol{k}$, направленным по оси быстрого вращения Oz, весьма мал, так как

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r} < \varepsilon\sqrt{2},$$

так что ось мгновенного вращения приблизительно совпадает с главной осью инерции Oz.

При этих условиях также и результирующий момент $\boldsymbol{K}$ количеств движения совпадает приблизительно с осью Oz. Действительно, угол $\theta_1 = \widehat{\boldsymbol{K}\boldsymbol{k}}$ определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2}}{Cr} < \varepsilon\sqrt{\frac{A^2+B^2}{C^2}}$$

и потому весьма мал, если предположить, что A, B, C являются величинами одного и того же порядка.

Поэтому ось Oz будет вести себя так же, как и главный момент количеств движения $\boldsymbol{K}$; отсюда мы сейчас же заключаем, что ось быстрого вращения стремится расположиться параллельно результирующему моменту $\boldsymbol{M}$.

Необходимо отметить, что в то время, как приближенное совпадение мгновенной оси вращения с осью Oz имеет место во всяком случае при одном только предположении о том, что угловая скорость вращения вокруг Oz велика, последнее утверждение о приблизительном совпадении направлений $\boldsymbol{K}$ и Oz существенным образом основано на том, что быстрое вращение происходит вокруг *главной* оси инерции. Действительно, если бы этого не было, то числитель в выражении, определяющем $\operatorname{tg}\theta_1$, зависел бы также и от r, так что ничего нельзя было бы утверждать о порядке величины угла θ_1.

5. Качественное объяснение принципа сохранения направления гироскопической оси. Для объяснения этого второго явления обратимся специально к твердому телу S гироскопической структуры относительно одной из его точек O, принимаемой за неподвижную или совпадающей с центром тяжести.

Напомним, что под этим, по терминологии, установленной в п. 17 гл. IV, подразумевается, что эллипсоид инерции тела относительно точки O будет эллипсоидом вращения ($A = B$). Вспомним, кроме того, что, выбрав оси $Oxyz$, в которых Oz является гироскопической осью (т. е. осью этого эллипсоида вращения), и обозначив через $\boldsymbol{k}$ соответствующий единичный вектор и через A и C — главные моменты инерции, соответственно экваториальный и осевой, мы можем выразить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и результирующий момент количеств движения $\boldsymbol{K}$ в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e} + r\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{K} = A\boldsymbol{e} + Cr\boldsymbol{k}, \tag{7}$$

где вектор $\boldsymbol{e}$ есть экваториальная составляющая вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Добавим к этому простое замечание кинематического характера. Очевидно, что движение твердого тела будет вполне определено, если, начиная с определенного начального момента, когда задано положение твердого тела относительно его оси Oz, будет известен для любого момента единичный вектор $\boldsymbol{k}(t)$ и скаляр $r(t)$ или *гироскопическая угловая скорость.*

Легко видеть, что экваториальная составляющая $\boldsymbol{e}(t)$ угловой скорости однозначно определяется только единичным вектором $\boldsymbol{k}(t)$. Действительно, вспомним прежде всего одну из формул Пуассона (т. I, гл. III, п. 19).

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}, \tag{8}$$

которое в силу первого из равенств (7) приводится к виду

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{k}. \tag{9}$$

Обратим теперь внимание на то, что геометрическое умножение вектора $\boldsymbol{e}$ справа на единичный вектор $\boldsymbol{k}$, перпендикулярный к нему, равносильно повороту вектора $\boldsymbol{e}$ вокруг вектора $\boldsymbol{k}$ на прямой угол в направлении левого вращения. Если, далее, вектор $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{k}$ умножается еще раз векторно на тот же самый единичный вектор $\boldsymbol{k}$, но слева, то вектор $\boldsymbol{e}$ будет приведен в свое начальное положение, т. е. будет иметь место тождество [1])

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{k});$$

в нашем случае, принимая во внимание соотношение (9), найдем

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k} \times \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}. \tag{10}$$

---

[1]) Это является частным случаем известного тождества, относящегося к двойным векторным произведениям (т. I, гл. I, п. 26),

$$\boldsymbol{v}_1 \times (\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3) = (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3)\ \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)\ \boldsymbol{v}_3.$$

Достаточно предположить, что $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_3$ совпадают с одним и тем же единичным вектором $\boldsymbol{k}$, перпендикулярным к $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}$.

Заметив это, сравним два различных движения твердого тела, в которых единичный вектор $\boldsymbol{k}$ изменяется по одному и тому же произвольно заданному закону $\boldsymbol{k}(t)$, угловая же скорость r в первом движении постоянно равна нулю, а во втором велика, например сохраняет определенное постоянное весьма большое значение. Вычислим моменты $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}^*$ сил, которые должны быть приложены, чтобы осуществить как первое, так и второе движение соответственно.

Для этой цели начнем с указания, что в силу замечания, сделанного выше, экваториальная составляющая $\boldsymbol{e}$ угловой скорости будет в любой момент иметь одно и то же значение для обоих движений, а оба результирующих момента $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}^*$ количеств движения, наоборот, будут различными, поскольку для первого $r=0$, а для второго $r=r_0$, и будут определяться равенствами

$$\boldsymbol{K}=A\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{K}^*=A\boldsymbol{e}+Cr_0\boldsymbol{k}.$$

Теперь достаточно применить в обоих случаях уравнение моментов количеств движения (2) и принять во внимание для второго случая равенство (9), чтобы заключить

$$\boldsymbol{M}=A\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}, \quad \boldsymbol{M}^*=A\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}+Cr_0\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k}, \tag{11}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{M}^*=\boldsymbol{M}+Cr_0\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k}. \tag{12}$$

То обстоятельство, что приращение $\boldsymbol{M}^*-\boldsymbol{M}$ определяется произведением вектора $C\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k}$, одинакового в любой момент в обоих движениях, на скалярную величину r_0, показывает, что необходимое усилие для изменения положения гироскопической оси по заданному закону движения, при прочих равных условиях, будет тем более, чем быстрее вращение вокруг этой оси. Далее, если при очень большом r_0 необходимо очень значительное усилие, то ясно, что небольшие усилия могут дать только ничтожный эффект; этим как раз и объясняется стремление тел с гироскопической структурой, быстро вращающихся около оси симметрии, сохранять приблизительно неизменным (относительно неподвижных звезд) направление своей оси, даже если небольшими усилиями пытаются вызвать ее отклонение.

Выше мы ограничились сравнением моментов $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}^*$, соответствующих двум заданным движениям. Так как оба эти момента являются экваториальными, как это следует из равенств (11), то каждый из них можно представить себе осуществленным посредством силы, приложенной к оси Oz в произвольно заданной точке P и перпендикулярной к ней. Далее, интересно также сравнить и обе эти силы $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}^*$, которые, если положить $OP=l$, определятся соответственно двумя уравнениями

$$l\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}, \quad l\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{F}^*=\boldsymbol{M}^*,$$

причем каждая сила перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{k}$. Отсюда на основании замечания, сделанного выше, об эффекте векторного умножения вектора на единичный перпендикулярный к нему вектор получим

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{l}\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{F}^*=\frac{1}{l}\boldsymbol{M}^*\times\boldsymbol{k},$$

и, следовательно, на основании равенства (12)

$$\boldsymbol{F}^*=\boldsymbol{F}-\frac{C}{l}r_0\boldsymbol{e}.$$

Присутствие множителя r_0 во втором слагаемом еще раз указывает на стремление гироскопической оси сохранить свое направление в пространстве; в этой форме доказательство кажется даже более наглядным, так как последнее равенство дает прямо величину требующейся силы [3].

6. Замечание о возникающем движении. В виде дополнения к предыдущим качественным соображениям обратимся еще раз к твердому телу S гироскопической структуры и представим себе, что после того, как ему сообщено быстрое вращение вокруг гироскопической оси Oz, на него стала действовать сила $\boldsymbol{F}$, приложенная в произвольной точке P оси и перпендикулярная к Oz.

При этих условиях, в силу принципа стремления к параллельности, гироскопическая ось Oz начнет отклоняться, двигаясь в плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{F}$, и будет стремиться расположиться в направлении момента $\boldsymbol{M}$ силы $\boldsymbol{F}$ относительно O.

Однако, хотя это и является наиболее характерным для движения, мы не можем утверждать, что в любой момент ось Oz перемещается перпендикулярно к $\boldsymbol{F}$. Наоборот, если, в частности, сосредоточим внимание на начальном моменте, когда на тело, находящееся уже в быстром вращении, начинает действовать сила $\boldsymbol{F}$, то увидим, что в полном согласии с непосредственным представлением возникающее движение будет происходить в направлении активной силы $\boldsymbol{F}$ [3].

Для доказательства заметим прежде всего, что так как момент $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$ лежит в экваториальной плоскости, то имеем $M_z=0$, вследствие чего третье уравнение Эйлера (5), если обратить внимание на характеристическое условие гироскопической структуры $A=B$, сведется к равенству

$$\dot{r}=0.$$

Отсюда следует, что во время движения угловая скорость вращения тела вокруг Oz постоянно сохраняет свое начальное значение r_0.

С другой стороны, положив, как обычно, $OP=l$, продифференцируем по времени тождество

$$\overrightarrow{OP}=l\boldsymbol{k}$$

относительно неподвижных осей, если O есть неподвижная точка, или относительно осей с неизменными направлениями и с началом в O, если эта точка совпадает с центром тяжести. Дифференцирование на основании равенства (9) дает

$$\frac{dP}{dt} = l\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{k}, \tag{13}$$

откуда следует, что в начальный момент, когда по предположению экваториальная составляющая $\boldsymbol{e}$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (целиком направленной по оси) равна нулю, будет равна нулю также и скорость точки P.

Таким образом, эта точка движется (без трения) по сфере с центром в O и радиусом l.

Следовательно, ее возникающее движение будет происходить в направлении составляющей активной силы в касательной плоскости к сфере; эта составляющая будет тождественна с $\boldsymbol{F}$, если сила $\boldsymbol{F}$ перпендикулярна к оси.

Отсюда, естественно, можно отдать себе отчет также и в физическом смысле дифференцирования равенства (13) по времени.

Так как вначале $\boldsymbol{e}$ равно нулю и, с другой стороны, справедливо равенство (9), то имеем

$$\left(\frac{d^2P}{dt^2}\right)_0 = l\left(\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} \times \boldsymbol{k}\right)_0. \tag{14}$$

Но в силу того же равенства (9) и равенства $\boldsymbol{K} = A\boldsymbol{e} + Cr_0\boldsymbol{k}$ уравнение моментов количеств движения дает

$$A\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} + Cr_0\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{M},$$

и, следовательно, вначале

$$\left(\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}\right)_0 = \frac{1}{A}(\boldsymbol{M})_0,$$

после чего, подставляя в (14) и замечая, что из равенства

$$\boldsymbol{M} = l\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{F}$$

в силу обычного тождества, относящегося к двойному векторному произведению, следует, что

$$l\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{k},$$

мы приходим к равенству

$$\left(\frac{d^2P}{dt^2}\right)_0 = \frac{l^2}{A}(\boldsymbol{F})_0,$$

которое и выражает как раз то, что возникающее движение точки P происходит в направлении активной силы $\boldsymbol{F}$.

Заметим, что предположение, которое мы имели в виду при этом втором доказательстве, что активная сила перпендикулярна к оси, несущественно, ибо всякую силу, приложенную в любой точке P оси, можно разложить на ее составляющие: осевую $\boldsymbol{F}_a$ и экваториальную $\boldsymbol{F}$; а так как $\boldsymbol{F}_a$ ничего не прибавляет к моменту $\boldsymbol{M}$, то все произойдет так, как если бы сила приводилась к осевой экваториальной составляющей.

7. Уравнения Эйлера для твердого тела с гироскопической структурой. При рассмотрении в пп. 5 и 6 движения твердого тела с гироскопической структурой мы пользовались, между прочим, разложением угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и результирующего момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ на их экваториальную и осевую составляющие по формулам (7).

Имея в виду последующие приложения, мы остановимся здесь на форме (указанной в предыдущем пункте), которую можно придать в этом случае уравнениям Эйлера (5), рассматривая отдельно третье и объединяя остальные два в одно векторное уравнение относительно экваториальной плоскости, для того чтобы отчетливо выявить характер изменения величин r и $\boldsymbol{e}$.

Третье из уравнений (5), в предположении $A = B$, приводится здесь к виду

$$C\dot{r} = M_z, \tag{15}$$

а два другие, если обозначить через $\boldsymbol{M}_1$ экваториальную составляющую результирующего момента внешних сил относительно точки O, можно будет, очевидно, объединить в одном векторном уравнении

$$A\dot{\boldsymbol{e}} - (C - A)\, r\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{M}_1. \tag{16}$$

В дальнейшем эти два уравнения мы будем называть *уравнениями Эйлера* для твердых тел с гироскопической структурой.

К ним можно прийти, конечно, не обращаясь к (общим) уравнениям Эйлера, а выводя их прямо из уравнения моментов количеств движения на основании предположения $A = B$, характерного для тел с гироскопической структурой; не бесполезно указать здесь такой вывод.

Для производной по времени от $\boldsymbol{K}$ по отношению к инерциальной системе отсчета в силу второго из уравнений (7) и уравнений (9) имеем выражение

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = A\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} + Cr\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{k} + C\dot{r}\boldsymbol{k},$$

где непосредственно ясно, что третий член в правой части является осевым, а второй — экваториальным. Но и первый член, т. е. по существу $d\boldsymbol{e}/dt$ является экваториальным, потому что, когда речь идет

о векторной производной, которую надо взять относительно инерциальной системы отсчета, мы имеем

$$\frac{de}{dt} = \dot{e} + \omega \times e,$$

или же в силу первого из уравнений (7)

$$\frac{de}{dt} = \dot{e} + rk \times e; \tag{17}$$

перпендикулярность к k оказывается здесь непосредственно очевидной, так как $\dot{e}$ есть производная от экваториального вектора e, которая берется относительно осей, неизменно связанных с экваториальной плоскостью.

Теперь если приравняем в обеих частях второго основного уравнения осевые составляющие, то получим уравнение (15); если же приравняем экваториальные составляющие, то придем к уравнению

$$A\frac{de}{dt} + Cre \times k = M_1, \tag{16'}$$

которое в силу равенства (17) совпадает с уравнением (16).

§ 3. Движение по Пуансо

8. Уравнения движения. В дальнейшем в этой главе мы приложим общую теорию, развитую в предыдущих двух параграфах, к углубленному изучению некоторых частных задач, соответствующих простым и физически наглядным предположениям о природе действующих сил или о материальной структуре твердого тела, закрепленного в одной из своих точек O. Прежде всего, обращаясь к твердому телу с какой угодно материальной структурой, рассмотрим движения, происходящие в том случае, когда активные силы (внешние), приложенные к твердому телу, имеют по отношению к закрепленной точке O результирующий момент, постоянно равный нулю (т. е. векторно эквивалентны одной силе, приложенной в точке O). Это обстоятельство, очевидно, осуществляется для всякого твердого тела, находящегося исключительно под действием силы тяжести и закрепленного в его центре тяжести, и, в еще более частном случае, для каждого твердого тела, закрепленного в одной из его точек, на которое не действует никакая активная сила.

При сделанных предположениях в число внешних сил, помимо активных, входит еще только реакция неподвижной точки, момент которой относительно точки O равен нулю. Поэтому второе основное уравнение (2) относительно неподвижных осей $O\xi\eta\zeta$ принимает вид

$$\frac{dK}{dt} = 0 \tag{18}$$