о векторной производной, которую надо взять относительно инерциальной системы отсчета, мы имеем

$$\frac{de}{dt} = \dot{e} + \omega \times e,$$

или же в силу первого из уравнений (7)

$$\frac{de}{dt} = \dot{e} + rk \times e; \tag{17}$$

перпендикулярность к k оказывается здесь непосредственно очевидной, так как $\dot{e}$ есть производная от экваториального вектора e, которая берется относительно осей, неизменно связанных с экваториальной плоскостью.

Теперь если приравняем в обеих частях второго основного уравнения осевые составляющие, то получим уравнение (15); если же приравняем экваториальные составляющие, то придем к уравнению

$$A\frac{de}{dt} + Cre \times k = M_1, \tag{16'}$$

которое в силу равенства (17) совпадает с уравнением (16).

§ 3. Движение по Пуансо

8. Уравнения движения. В дальнейшем в этой главе мы приложим общую теорию, развитую в предыдущих двух параграфах, к углубленному изучению некоторых частных задач, соответствующих простым и физически наглядным предположениям о природе действующих сил или о материальной структуре твердого тела, закрепленного в одной из своих точек O. Прежде всего, обращаясь к твердому телу с какой угодно материальной структурой, рассмотрим движения, происходящие в том случае, когда активные силы (внешние), приложенные к твердому телу, имеют по отношению к закрепленной точке O результирующий момент, постоянно равный нулю (т. е. векторно эквивалентны одной силе, приложенной в точке O). Это обстоятельство, очевидно, осуществляется для всякого твердого тела, находящегося исключительно под действием силы тяжести и закрепленного в его центре тяжести, и, в еще более частном случае, для каждого твердого тела, закрепленного в одной из его точек, на которое не действует никакая активная сила.

При сделанных предположениях в число внешних сил, помимо активных, входит еще только реакция неподвижной точки, момент которой относительно точки O равен нулю. Поэтому второе основное уравнение (2) относительно неподвижных осей $O\xi\eta\zeta$ принимает вид

$$\frac{dK}{dt} = 0 \tag{18}$$

и выражает то обстоятельство, что в течение всего времени движения момент количеств движения $\boldsymbol{K}$ твердого тела относительно неподвижной точки O остается постоянным (по величине, направлению и стороне). Следовательно, имеет место *интеграл моментов* (векторный) *количеств движения*

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_0, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{K}_0$ означает начальный результирующий момент количеств движения.

Здесь имеется частный случай, когда один этот первый интеграл достаточен для полного определения движения, — это случай, когда эллипсоид инерции относительно неподвижной точки O сводится к шару ($A=B=C$), благодаря чему уравнения (4) оказываются равносильными одному векторному уравнению

$$\boldsymbol{K}=A\boldsymbol{\omega}.$$

Таким образом, если $\boldsymbol{K}=\text{const}$, то и $\boldsymbol{\omega}=\text{const}$, так что движение сведется к равномерному вращению (вокруг прямой, проходящей через O и направленной как угодно, как в пространстве, так и в теле).

Если эллипсоид инерции не сводится к шару, то из того, что $\boldsymbol{K}$ постоянно относительно неподвижной системы осей, еще не следует, что этот вектор сохраняет неизменное направление внутри тела или, точнее, неизменное направление относительно осей, связанных с телом, начало которых, как обычно, совпадает с O. Закон, по которому изменяется внутри тела вектор $\boldsymbol{K}$ (поскольку $\boldsymbol{K}$ является неизменным в пространстве), определяется равенством

$$\dot{\boldsymbol{K}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}=0, \tag{18'}$$

в которое переходит при этой системе отсчета равенство (18).

Если, как обычно, примем систему подвижных осей $Oxyz$, совпадающих с системой главных осей инерции в O, то равенство (18′) после проектирования на эти оси даст три уравнения Эйлера с тождественно равными нулю правыми частями

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p}-(B-C)qr&=0,\\ B\dot{q}-(C-A)rp&=0,\\ C\dot{r}-(A-B)pq&=0,\end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

которые, в отличие от того, что имеет место при общем предположении относительно действующих сил (п. 1), содержат в себе исключительно p, q, r и их производные, так что три уравнения (5′) достаточны для определения закона изменения этих величин с течением времени, т. е., по существу, движения тела. Активные силы, не входящие в уравнения (5′), никакого влияния на движение тела не оказывают, и все их действие в силу первого основного уравнения

выражается в возникновении реакции закрепленной точки. Твердое тело движется вокруг неподвижной точки так, как если бы никаких внешних активных сил не было и сказывался бы только эффект начального состояния движения. По этим соображениям рассматриваемое здесь движение носит название *движения по инерции* или *спонтанного движения*. Мы будем называть его движением по Пуансо, по имени того, кто дал ему геометрическое истолкование, которым мы будем заниматься в п. 11 [4].

9. Первые интегралы. Мы видели в предыдущем пункте, что в настоящем случае, для движения Пуансо, второе основное уравнение (1) или эквивалентные ему уравнения Эйлера (5) допускают интеграл (векторный) момента количеств движения

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0. \tag{19}$$

Отсюда следует, в частности, что при движении по инерции величина результирующего момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ остается неизменной, что на основании равенств (4) можно представить в виде

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_0^2. \tag{20}$$

Это соотношение представляет собой так называемый *интеграл (скалярный) момента количеств движения* (*интеграл площадей*).

Легко видеть, что существует еще один первый интеграл уравнений (5′). Действительно, когда речь идет о системе со связями, не зависящими от времени, справедливо уравнение живых сил (гл. V, п. 30)

$$dT = dL,$$

где dL есть элементарная работа внешних сил; с другой стороны, эта элементарная работа, которая для всякого закрепленного в одной точке твердого тела определяется (гл. IV, п. 3) выражением $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt$, здесь будет постоянно равна 0 вместе с моментом $\boldsymbol{M}$ внешних сил. Поэтому теорема живых сил принимает вид $dT = 0$, откуда, интегрируя, получим

$$T = \text{const} = E; \tag{21}$$

это и есть *интеграл живых сил*; вспоминая известное выражение живой силы твердого тела, закрепленного в одной точке (гл. IV, п. 15),

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

мы можем написать интеграл (21) в виде

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2E. \tag{21′}$$

Необходимо заметить, что постоянную величину кинетической энергии можно также рассматривать как *постоянную величину полной энер-*

гии, так как здесь не может быть изменения другого вида энергии (потенциальной), ибо элементарная работа в данном случае постоянно равна нулю.

10. Об интегрировании уравнений движения твердого тела по инерции. Мы видели в предыдущем пункте, что для уравнения (5′) существуют четыре первых скалярных интеграла, а именно интеграл живых сил и три интеграла, получающиеся путем проектирования на неподвижные оси интеграла моментов количеств движения (19). Отсюда на основании теоремы Лиувилля, которую мы установим в гл. X, можно непосредственно заключить, что уравнения (5′) движения тела по инерции интегрируются в квадратурах.

Мы не будем останавливаться на этом интегрировании, ограничиваясь лишь утверждением, что квадратуры, к которым мы таким образом приходим, будут эллиптического типа.

Здесь же мы покажем, что после определения угловых скоростей p, q, r в функции времени t в данном случае достаточно одной квадратуры и некоторых алгебраических преобразований, чтобы найти в функции времени и углы Эйлера, определяющие положение системы $Oxyz$ относительно системы $O\xi\eta\zeta$; в общем же случае для этой цели необходимо интегрирование (невыполнимое в квадратурах) уравнения Риккати (т. I, гл. IV, § 8).

Чтобы доказать это, удобно использовать интеграл (19), т. е. принять во внимание неизменность момента $\boldsymbol{K}$ относительно осей $O\xi\eta\zeta$. Приняв неподвижную ось ζ направленной по этому моменту и обозначив через γ_1, γ_2, γ_3 направляющие косинусы оси ξ относительно системы главных осей инерции, мы можем написать уравнения (4) в виде

$$K\gamma_1 = Ap, \quad K\gamma_2 = Bq, \quad K\gamma_3 = Cr,$$

так что, принимая во внимание известные соотношения (т. I, гл. III, п. 32)

$$\gamma_1 = \sin\varphi\sin\theta, \quad \gamma_2 = \cos\varphi\sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta, \tag{22}$$

получим уравнения

$$K\sin\varphi\sin\theta = Ap, \quad K\cos\varphi\sin\theta = Bq, \quad K\cos\theta = Cr, \tag{4′}$$

откуда тотчас же выводим соотношения

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{Ap}{Bq},$$

которые дают θ, φ в функции от p, q, r, т. е. от t.

Что же касается ψ, то мы будем исходить из известных формул (т. I, гл. III, п. 34)

$$p = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\varphi\sin\theta, \quad q = -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\cos\varphi\sin\theta,$$

из которых путем исключения $\dot{\theta}$ получим

$$\dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}.$$

Так как из уравнений (4′) и из только что написанных выражений для p и q следует

$$p \sin \theta + q \cos \theta = \frac{Ap^2 + Bq^2}{K \sin \theta}, \quad K^2 \sin^2 \theta = A^2p^2 + B^2q^2,$$

то заключаем, что

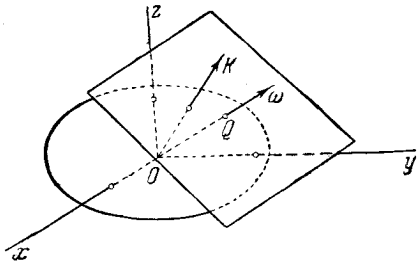
$$\dot{\psi} = K \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2};$$

теперь достаточно одной квадратуры, чтобы вычислить ψ в функции от времени.

11. Геометрическое представление движения по Пуансо. Если требуется определить только геометрическую картину движения относительно неподвижных осей, т. е. последовательность положений, принимаемых телом в его движении вокруг точки O, отвлекаясь от закона движения, то отпадает необходимость в интегрированиях, указанных в предыдущем пункте; достаточно будет знать только первые интегралы п. 9, т. е. интегралы моментов количеств движения и интеграл живых сил

$$K = K_0, \tag{19}$$

$$T = E. \tag{21}$$



Фиг. 11.

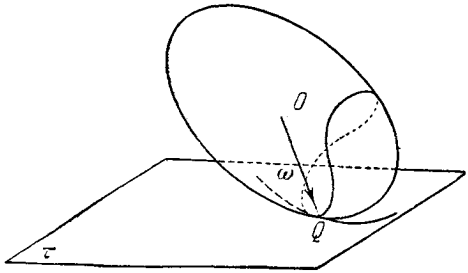
Принимая во внимание эти два интеграла (один векторный и другой скалярный), можно сделать наглядным закон, согласно которому вращается твердое тело вокруг точки O; мы придем при этом к результату, который, как увидим, представляет известную аналогию с результатом, относящимся к траекториям мгновенного центра вращения для твердых фигур, движущихся в плоскости (т. I, гл. V, § 2).

Для этой цели рассмотрим эллипсоид инерции твердого тела относительно его неподвижной точки O. В каждый момент полупрямая (мгновенная ось вращения), на которой лежит вектор $\boldsymbol{\omega}$, предполагаемый приложенным в точке O, будет пересекать поверхность этого эллипсоида в некоторой точке Q, которую Пуансо назвал *полюсом* (в рассматриваемый момент) (фиг. 11). Далее, на основании равенства, связывающего векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ (гл. IV, п. 18), мы заключаем, что при движении тела вектор $\boldsymbol{K}$ всегда будет перпендикулярен

к плоскости τ, касательной к эллипсоиду в точке Q, и что расстояние δ от точки O до этой плоскости в любой момент определяется выражением

$$\delta = \frac{\sqrt{2T}}{K}.$$

Так как в настоящем случае вектор K является неизменным в пространстве и живая сила постоянна, то заключаем, что плоскость τ, касательная к эллипсоиду в полюсе, *неподвижна в пространстве*, как плоскость, которая имеет неизменное положение и постоянное расстояние от неподвижной точки O.



Фиг. 12.

В то время как тело движется около точки O, вместе с ним движется также и неизменно связанный с ним эллипсоид, но так, что он во всякий момент касается неподвижной плоскости τ в мгновенном полюсе Q (фиг. 12); а так как эта точка касания (положение которой, вообще говоря, изменяется как на эллипсоиде, так и на плоскости) принадлежит всегда мгновенной оси вращения, то *движение твердого тела происходит так, как если бы эллипсоид инерции, связанный с телом, катился без скольжения по неподвижной плоскости.*

Две кривые, описываемые при движении твердого тела полюсом соответственно на эллипсоиде и на плоскости, называются (по Пуансо) *полодией* (первая) и *герполодией* (вторая). Если указаны эти две кривые, то геометрическая картина движения (т. е. картина движения, оставляющая в стороне закон движения во времени) будет определена однозначно.

На основании того обстоятельства, что величина вектора K остается постоянной, легко было бы доказать, что полодия есть кривая четвертого порядка, получающаяся при пересечении эллипсоида инерции с другим эллипсоидом, а герполодия, вообще говоря, есть трансцендентная кривая (мы возвратимся к этому в упражнениях) [1]).

---

[1]) Для более подробного изучения можно рекомендовать уже упоминавшиеся сочинения Аппелля и Лекорню, а также специальные сочинения по динамике твердого тела. См., в частности, Klein—Sommerfeld, Ueber die Theorie des Kreisels, Leipzig, 1897—1910; A. Gray, A treatise on gyrostatics and rotational motion, London, Macmillan, 1918 *).

*) См. также Суслов Г. К., Теоретическая механика, 1946; Жуковский Н. Е., Механика системы. Динамика твердого тела, 1939. (*Прим. ред*).

Наряду с предыдущим геометрическим представлением спонтанного движения твердого тела, закрепленного в одной точке, принадлежащим Пуансо, рассматривались и другие, менее простые, но столь же изящные и наглядные.

Так, Сильвестр[1]) заметил, что при движении твердого тела по инерции всякая поверхность второго порядка, гомотетичная с другой такой же поверхностью, гомофокальной с эллипсоидом инерции, катится без скольжения по плоскости, параллельной τ и вращающейся равномерно вокруг перпендикуляра, опущенного на нее из точки O.

С другой стороны, Мак-Куллах[2]), преобразовывая представление Пуансо при помощи инверсии относительно сферы с центром в O и радиусом, равным 1 (которая скользит по самой себе во всяком движении вокруг O), заметил, что при движении по Пуансо так называемый гирационный *эллипсоид* или *взаимный эллипсоид инерции*

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,$$

движется таким образом, что постоянно проходит через неподвижную точку, расположенную на линии действия вектора K (и, следовательно, через диаметрально противоположную точку).

Наконец, Джеббиа[3]), обобщая результат Сиаччи[4]), заметил, что при движении по Пуансо всякая поверхность второго порядка с центром в O, гомоцикличная с эллипсоидом инерции, катится без скольжения по неподвижной поверхности вращения второго порядка (вокруг линии действия K); или также (если преобразовать предыдущую теорему при помощи инверсии относительно сферы с центром в O и радиусом, равным 1) всякая гомофокальная с эллипсоидом инерции поверхность второго порядка катится без скольжения по поверхности вращения второго порядка (вокруг полярного для линии действия K диаметра).

12. Перманентное вращение. Посмотрим, имеются ли между бесконечно разнообразными движениями по Пуансо, возможными для твердого тела, закрепленного в точке O, равномерные вращения. Это равносильно вопросу: возможно ли удовлетворить уравнениям Эйлера (5′) или эквивалентному векторному уравнению (18′), полагая ω равным постоянному вектору в теле (а следовательно, также и в пространстве; т. I, гл. IV, п. 11)? Но в таком случае в силу

---

[1]) Sylvester, On the motion of a rigid body acted on by no external forces, *Coll. Math. Papers*, т. II, стр. 577—601.

[2]) Mac Cullagh, On the rotation of a solid body round a fixed point, being..., *The collected works*, стр. 329—346.

[3]) Gebbia, Su due proprietà della rotazione spontanea dei corpi, *Mem. della R. Acc, dei Lincei*, т. I, 1885; стр. 326—333.

[4]) *Collect. math. in mem. D. Chelini*, Milano, Hoepli, 1881, стр. 6—16.

соотношений между ω и K последний вектор также будет постоянным как в пространстве, так и в теле; поэтому

$$\omega \times K = 0,$$

т. е. оба вектора будут все время параллельны.

Обратно, всякий раз, как будет удовлетворяться это условие, из (18′) будет следовать неизменность в теле (помимо неизменности в пространстве) момента количеств движения K и, следовательно, угловой скорости ω. Поэтому условие, необходимое и достаточное для того, чтобы движение по Пуансо сводилось к равномерному вращению, заключается в том, чтобы оба вектора ω и K оставались параллельными.

Но, как мы знаем (гл. IV, п. 18), это будет иметь место только в том случае, когда угловая скорость ω (и, следовательно, вектор K) постоянно направлена по главной оси инерции; а так как это условие не налагает никаких ограничений ни на величину, ни на сторону, в которую направлена угловая скорость ω, то заключаем, что, когда результирующий момент внешних сил равен нулю, *твердое тело может вращаться* (с произвольной угловой скоростью, как в ту, так и в другую сторону) *только вокруг каждой из его главных осей инерции относительно неподвижной точки.*

В каждом из этих равномерных вращений полюс остается неподвижным как в пространстве, так и на эллипсоиде (в вершине) его так что полодия и герполодия сведутся к этой точке.

Определенные только что равномерные вращения твердого тела, закрепленного в своей точке O (и находящегося под действием активных сил с результирующим моментом относительно O, равным нулю), так же как и соответствующие оси вращения (главные оси инерции относительно точки O), называются соответственно *перманентными вращениями и перманентными осями.*

Для оправдания этого названия заметим следующее. При произвольном выборе начальных значений проекций угловой скорости p, q, r или, что одно и то же, при произвольном начальном значении вектора ω, эти величины изменяются с течением времени в согласии с уравнением (18′) или с уравнениями (5′), а также в согласии с условиями качения эллипсоида инерции по плоскости τ. Если же начальное мгновенное вращение происходит (при какой угодно величине и стороне) вокруг одной из главных осей инерции, то в силу тех же уравнений (18′), или уравнений (5′), или на основании геометрического представления Пуансо угловая скорость ω будет сохраняться неизменной также и в последующие моменты. В конце концов, здесь речь идет о таких же статических решениях уравнений (5′), о которых говорилось ранее (гл. VI, п. 17).

Для твердого тела с любой структурой (при отличных друг от друга A, B, C) имеется только три перманентные оси, перпендикулярные друг к другу. Их будет бесконечно много, когда эллипсоид

инерции относительно неподвижной точки будет эллипсоидом вращения (например, для твердого тела с гироскопической структурой относительно точки O), так как в этом случае главными осями инерции, помимо оси симметрии эллипсоида, будут все его экваториальные диаметры.

Если, в еще более частном случае, эллипсоид инерции сводится к шару, то перманентными осями будут все прямые, выходящие из неподвижной точки; в этом предположении *всякое* движение по инерции твердого тела будет равномерным вращением, как это следует из предыдущего и как это уже было подтверждено в п. 8 на основании дифференциальных уравнений движения.

13. Центробежные моменты инерции (моменты девиации). Остановимся на только что отмеченном обстоятельстве: если прямая a, проходящая через точку O, не является перманентной осью вращения, а начальная угловая скорость совпадает с ней по направлению, то ось мгновенного вращения при движении тела по инерции будет смещаться тотчас же после начала движения из своего начального положения a. Чтобы несколько выяснить причины этого явления, посмотрим, нельзя ли добавить (к возможным внешним активным силам с результирующим моментом относительно точки O, равным нулю) новую силу, которая препятствовала бы оси a перемещаться и вынуждала бы твердое тело перманентно вращаться вокруг нее с заданной начальной угловой скоростью.

С этой целью отнесем тело вместо главных осей инерции к любым осям $Oxyz$, неизменно связанным с ним, в которых ось Ox совпадает с заданной осью вращения a, в силу чего для составляющих результирующего момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ вместо выражений (4) будем иметь более общие выражения

$$K_x = \frac{\partial T}{\partial p} = Ap - C'q - B'r,$$

$$K_y = \frac{\partial T}{\partial q} = -C'p + Bq - A'r,$$

$$K_z = \frac{\partial T}{\partial r} = -B'p - A'q + Cr,$$

где A, B, C означают моменты инерции (теперь уже не главные) относительно осей x, y, z и A', B', C' — те структурные коэффициенты твердого тела (относительно той же самой системы отсчета), которые мы назвали выше произведениями инерции (центробежные моменты, моменты девиации).

В более частном случае вращения вокруг оси Ox, которое мы хотим придать здесь твердому телу и которое определяется условиями

$$p = p_0, \quad q = r = 0,$$

где p_0 есть заданная угловая скорость, мы должны будем положить

$$K_x = Ap_0, \quad K_y = -C'p_0, \quad K_z = -B'p_0.$$

С другой стороны, если обозначим через $\boldsymbol{M}$ неизвестный добавочный момент, то будет справедливо второе из основных уравнений в виде

$$\dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} = \boldsymbol{M};$$

достаточно спроектировать это уравнение на подвижные оси, чтобы получить уравнения

$$M_x = 0, \quad M_y = B'p_0^2, \quad M_z = -C'p_0^2,$$

однозначно определяющие искомый добавочный момент. Этот момент $\boldsymbol{M}$ будет равен нулю только тогда, когда одновременно исчезают B' и C', т. е. (как известно) когда ось вращения является главной осью инерции; и во всех случаях именно коэффициенты B', C' определяют этот добавочный момент. В более выразительной форме можно сказать, что необходимость прибегать к добавочному моменту для того, чтобы сделать невозможным смещение оси вращения из ее начального положения Ox, обусловливается наличием двух коэффициентов B', C'. Так как то же самое можно сказать и о коэффициентах C', A' по отношению к оси Oy и, соответственно, о коэффициентах A', B' по отношению к оси Oz, то оказывается оправданным название *моментов девиации*, которое мы приписали структурным коэффициентам A', B', C' твердого тела (т. I, гл. X, п. 22).

14. Прецессионный характер движения по инерции твердого тела с гироскопической структурой относительно закрепленной точки. В случае твердого тела, имеющего относительно своей закрепленной точки O гироскопическую структуру, легко описать кинематические свойства движения более точным и полным способом, чем тот, который дается для общего случая чисто геометрическим рассуждением Пуансо.

Действительно, возьмем снова первое из уравнений Эйлера в гироскопической форме [п. 7, уравнение (15)]. Так как, по предположению, результирующий момент $\boldsymbol{M}$ внешних активных сил относительно точки O равен нулю, то это уравнение принимает здесь вид

$$C\dot{r} = 0$$

и выражает то обстоятельство, что в продолжение всего движения проекция r угловой скорости на гироскопическую ось остается постоянной.

Вспомним теперь общее выражение, найденное в п. 17 гл. IV для угловой скорости тела с гироскопической структурой,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{A}\boldsymbol{K} + \frac{A-C}{A} r\boldsymbol{k}, \tag{23}$$

где $\boldsymbol{k}$ обозначает единичный вектор гироскопической оси.

Так как этот единичный вектор $\boldsymbol{k}$, по определению, не изменяется в теле, а с другой стороны, в настоящем случае r постоянно и речь идет о движении по инерции, а это значит, что момент $\boldsymbol{K}$ неподвижен в пространстве, то из предыдущего выражения для $\boldsymbol{\omega}$ мы видим, что угловая скорость есть сумма двух векторов постоянной величины, первый из которых, направленный по $\boldsymbol{K}$, неподвижен в пространстве, а второй, направленный по $\boldsymbol{k}$, неподвижен в теле. Этого достаточно для того, чтобы можно было заключить (т. I, гл. IV, п. 15), что *всякое движение по инерции твердого тела с гироскопической структурой относительно закрепленной точки O представляет собой регулярную прецессию, имеющую осью прецессии прямую, параллельную моменту $\boldsymbol{K}$ количеств движения и проходящую через точку O, и осью фигуры — его гироскопическую ось.* Обозначим через $\boldsymbol{\varkappa}$ единичный вектор (неподвижный в пространстве) момента $\boldsymbol{K}$ и введем характеристические элементы любой регулярной прецессии, т. е. угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_1 = \mu\boldsymbol{k}$, которую можно назвать *собственной* для твердого тела или *гироскопической*, угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_2 = \nu\boldsymbol{\varkappa}$ *прецессии* и угол $\theta = \widehat{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{k}}$. Тогда, применяя критерий п. 17 гл. III т. I, мы можем видеть, идет ли речь о прямой (прогрессивной) или обратной (регрессивной) прецессии, в зависимости от того, будет ли положительным или отрицательным скалярное произведение

$$\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = \mu\nu\cos\theta.$$

Теперь из сопоставления выражений

$$\boldsymbol{\omega} = \nu\boldsymbol{\varkappa} + \mu\boldsymbol{k} \tag{23'}$$

и (23) имеем прежде всего

$$\mu = \frac{A-C}{A}\, r,$$

а с другой стороны, умножая скалярно обе части равенства (23′ на $\boldsymbol{k}$, получим

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{k} = r = \nu\cos\theta + \mu.$$

Таким образом, исключая r из двух последних уравнений, мы увидим, что характеристические элементы всякой регулярной спонтанной прецессии твердого тела с гироскопической структурой относительно неподвижной точки связаны соотношением

$$(A-C)\,\nu\cos\theta - C\mu = 0. \tag{24}$$

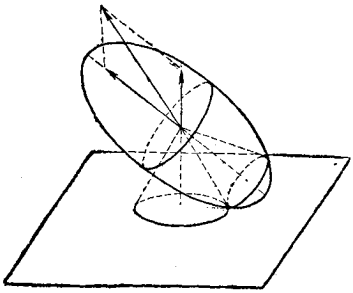
Отсюда получим

$$\mu\nu\cos\theta = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{C\mu^2}{A-C};$$

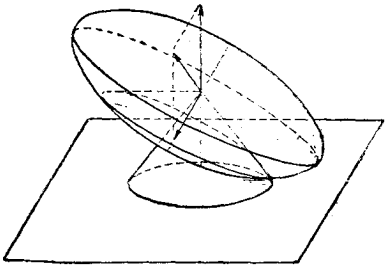
таким образом, мы видим, что прямой или обратный характер регулярной прецессии зависит исключительно от структуры твердого тела: прецессия будет прямой, если эллипсоид инерции (относительно за-

крепленной точки) будет удлиненным ($A > C$) (фиг. 13), и обратной, если этот эллипсоид будет сжатым ($A < C$) (фиг. 14).

Заметим, наконец, что мы, естественно, снова найдем равномерные вращения вокруг (бесконечно большого числа) главных осей инерции как вырожденные случаи прецессии.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

15. Движение относительно центра тяжести. Так как второе основное уравнение принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M} \tag{2}$$

также и в том случае, когда центр приведения O, неизменно связанный с телом, вместо того чтобы быть неподвижным, в любой момент совпадает с центром тяжести (п. 1), то результаты, полученные в пп. 8—14, останутся без изменения, если мы будем рассматривать вместо (абсолютного) движения твердого тела, закрепленного в одной из своих точек, относительное движение свободного твердого тела вокруг его центра тяжести, *лишь бы результирующий момент внешних сил относительно центра тяжести постоянно был равен нулю.*

Таким образом, мы убеждаемся, например, что тяжелое твердое тело, свободно падающее в пустоте, будет двигаться вокруг своего центра тяжести так, как если бы оно было закреплено в этой точке. Далее, если речь идет о теле вращения (или вообще о гироскопе, т. е. о твердом теле с гироскопической структурой относительно центра тяжести), то движение около центра тяжести будет регулярной прецессией.

В общем случае, какова бы ни была природа активных сил (лишь бы результирующий момент относительно центра тяжести был равен нулю), достаточно предположить, что в начале движения твердое тело вращается вокруг одной из своих главных центральных осей инерции (или же не вращается), чтобы можно было заключить, что оно будет продолжать вращаться бесконечно долго с той же угловой скоростью (или не будет вращаться) вокруг этой оси.