§ 4. Вопросы устойчивости движения по Пуансо

16. Мы предполагаем здесь исследовать на основе критериев, установленных в § 4 гл. IV, устойчивость или неустойчивость перманентных вращений, которые, как мы видели в предыдущем параграфе, возможны для всякого твердого тела, закрепленного в одной из своих точек O, относительно которой результирующий момент внешних активных сил постоянно равен нулю; заметим также, что все, что мы скажем в этом случае, можно будет непосредственно повторить и в применении к перманентным вращениям относительно осей, проходящих через центр тяжести свободного твердого тела, находящегося под действием внешних сил, результирующий момент которых относительно центра тяжести постоянно равен нулю.

Обратимся сначала к твердому телу со структурой общего вида, т. е., точнее, предположим неравными три главных момента инерции A, B, C твердого тела относительно закрепленной точки, что равносильно допущению, что неравными являются три главные полуоси a, b, c эллипсоида инерции относительно точки O; для определенности пусть будет

$$A < B < C, \tag{25}$$

т. е.

$$a > b > c.$$

Мы знаем, что в этом случае для твердого тела возможны перманентные вращения (с произвольной постоянной угловой скоростью) вокруг каждой из трех главных осей инерции x, y, z; если введем, как обычно, проекции p, q, r угловой скорости ω, то перманентные вращения твердого тела определятся равенствами

$$\bar{\sigma}_1)\quad p = \bar{p},\quad q = r = 0,$$

$$\bar{\sigma}_2)\quad q = \bar{q},\quad r = p = 0,$$

$$\bar{\sigma}_3)\quad r = \bar{r},\quad p = q = 0,$$

где $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ обозначают произвольные постоянные.

Равенства $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}_3$ дают три семейства (зависящие каждое от одной произвольной постоянной) *статических решений* уравнений Эйлера (5′), которые, определяя p, q, r в функциях времени, вполне определяют всякое возможное при предположенных условиях движение твердого тела.

Покажем теперь, что вращения $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_3$, т. е. перманентные вращения вокруг наибольшей оси x и наименьшей оси z эллипсоида инерции, будут устойчивыми, а перманентные вращения вокруг средней оси y, т. е. вращения $\bar{\sigma}_2$, будут неустойчивыми.

17. Устойчивые перманентные вращения. Мы будем исходить в нашем исследовании из интеграла моментов количеств движения и интеграла живых сил

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_0^2, \tag{20}$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2E \tag{21'}$$

[первые интегралы уравнений Эйлера (5′) (п. 9)] и рассмотрим то соотношение, которое выводится из них путем исключения p^2, q^2 или r^2, смотря по тому, какую устойчивость мы намерены исследовать, $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ или $\bar{\sigma}_3$.

Начнем с первого случая и положим

$$c_1 = K_0^2 - 2AE.$$

После исключения p^2 из уравнений (20) и (21′) мы получим первый квадратичный интеграл

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = c_1, \tag{26}$$

в котором для всякого решения σ уравнений (5′), определяемого заданными начальными условиями $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$ при $t = t_0$, постоянная c_1 в силу соотношений (25) будет положительной, если исключить, что вполне естественно, предположение $q_0 = r_0 = 0$, которое означало бы возвращение к случаю $\bar{\sigma}_1$.

Если согласно обычному геометрическому представлению истолковывать значения, которые в любой момент принимают проекции q, r в решении σ, как декартовы координаты точки, движущейся по плоскости, то можно сказать, что эта изображающая точка движется вдоль кривой, определяемой уравнением (26). Эта кривая в силу неравенств (25) и неравенства $c_1 > 0$ всегда будет эллипсом.

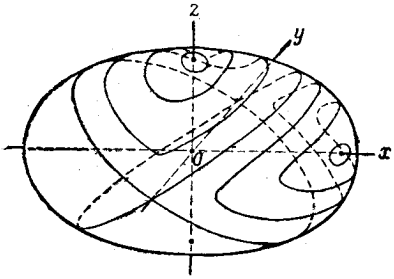
Предположим теперь, что решение σ соответствует начальным условиям, получаемым путем незначительного возмущения любого перманентного вращения $\bar{\sigma}_1$ вокруг оси x, т. е. предположим, что q_0 и r_0 являются произвольно малыми, а p_0 близко к значению $\bar{p}$, определяющему вращение $\bar{\sigma}_1$. Значения постоянной c_1, а следовательно, и осей эллипса (26) будут ничтожно малыми; мы видим таким образом, что при движении, определяемом из решения σ, проекции q и r будут сколь угодно долго оставаться близкими к $q = r = 0$.

Далее, для определения p возьмем снова один из двух первых интегралов (20), (21′), например второй. Решив уравнение (21′), получим

$$p^2 = \frac{1}{A}(2E - Bq^2 - Cr^2).$$

Так как вначале величина p близка к $\bar{p}$, а величины q, r остаются во время движения весьма малыми, то прямо заключаем, что p

в решении σ сколь угодно долго остается в непосредственной близости к $\bar{p}$. То же самое произойдет, если мы будем сравнивать указанное решение $\bar{\sigma}_1$ с другим решением того же семейства, соответствующим постоянному значению p, очень близкому к $\bar{p}$ (и нулевым значениям q, r). Поэтому движение $\bar{\sigma}_1$ устойчиво.



Фиг. 15.

Аналогично доказывается и устойчивость любого решения $\bar{\sigma}_3$, т. е. устойчивость всякого перманентного вращения вокруг наименьшей оси эллипсоида инерции (фиг. 15).

18. Неустойчивое перманентное вращение. Перейдем теперь к исследованию решения $\bar{\sigma}_2$. Исключая q^2 из уравнений (20) и (21′), получим квадратичный интеграл вида

$$A(A-B)p^2 - C(B-C)r^2 = K_0^2 - 2BE = c_2, \tag{27}$$

где для общего решения σ уравнений (5′) постоянная c_2 может оказаться как положительной, так и отрицательной (или нулем), в зависимости от выбора начальных условий $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$, определяющих σ. Здесь изображающая точка для одновременных значений p и r в решении σ движется по гиперболе, которая может принадлежать тому или другому из двух сопряженных семейств гипербол, имеющих действительную ось тем меньшую, чем меньше будет по абсолютной величине c_2 или чем ближе к нулю будут начальные значения p_0, r_0.

Легко убедиться, что предположение об устойчивости решения σ_2 приводит к противоречию. В самом деле, предположим, что в некотором решении σ, вначале близком к решению $\bar{\sigma}_2$, величина q даже при беспредельном возрастании времени остается близкой к $\bar{q}$ — угловой скорости этого перманентного вращения. В этом предположении q сохраняет сколь угодно долго знак $\bar{q}$, что же касается абсолютной величины q, то ее всегда можно считать большей $|\bar{q}|/2$. Тогда, имея из уравнений (5′)

$$r\dot{p} - p\dot{r} = \frac{q}{AC}[C(B-C)r^2 - A(A-B)p^2] = -\frac{c_2}{AC}q,$$

легко видеть, что секторная скорость изображающей точки для p, r относительно центра ветви гиперболы (27), по которой движется эта точка, сохраняет всегда один и тот же знак, а по абсолютной

величине остается в течение всего движения больше постоянной

$$\frac{|c^2|}{4AC}|\bar{q}|;$$

точка, вынужденная двигаться по ветви гиперболы всегда в одном и том же направлении и так, чтобы своим радиусом-вектором описывать площадь, возрастающую беспредельно с течением времени, может только удаляться в бесконечность, вопреки предположению об устойчивости решения $\bar{\sigma}_2$.

Таким образом, мы заключаем, что перманентные вращения вокруг средней оси эллипсоида инерции, соответствующие решению $\bar{\sigma}_2$, неустойчивы (фиг. 15).

19. Случай тела с гироскопической структурой. Предыдущие результаты получены в предположении, что три главных момента инерции относительно точки O неравны между собой; поэтому нужно отдельно рассмотреть случай, когда некоторые из моментов инерции совпадают. Однако бесполезно останавливаться на предположении $A = B = C$ (эллипсоид инерции, сводящийся к шару), при котором, как мы знаем, все возможные движения твердого тела сводятся к перманентным вращениям, так что устойчивость каждого из них очевидна.

Остается, следовательно, гироскопический случай, характеризуемый равенством $A = B$ (C может быть, безразлично, больше или меньше общего значения величин A и B). В этом предположении возможны, как мы видели, перманентные вращения (с постоянной произвольной угловой скоростью) вокруг бесконечного множества осей: гироскопической оси z и всех экваториальных осей. Мы покажем здесь, что устойчивыми будут перманентные вращения вокруг гироскопической оси, и неустойчивыми — все остальные.

Напомним прежде всего (п. 14), что при любом движении σ твердого тела с гироскопической структурой (регулярная прецессия) проекция r угловой скорости на направление гироскопической оси остается постоянной; отсюда следует, что при исследовании устойчивости мы можем ограничиться рассмотрением двух экваториальных проекций p и q.

Заметим при этом, что при любом гироскопическом движении σ угловая скорость

$$\omega = e + rk$$

именно потому, что речь идет о регулярной прецессии, сохраняет неизменной свою величину; то же самое свойство имеет, следовательно, ее составляющая e в экваториальной плоскости, неизменно связанной с осью фигуры z; поэтому, обозначив через p_0 и q_0 начальные значения p и q в движении σ, будем иметь квадратичный интеграл

$$p^2 + q^2 = p_0^2 + q_0^2, \tag{21''}$$

который, естественно, можно было бы вывести также из интеграла (21) живых сил, принимая во внимание допущенные здесь частные предположения. На основании предыдущего синтетического рассуждения условное представление величин p и q посредством изображающей точки в данном случае реализуется на экваториальной плоскости концом составляющей e вектора ω, описывающим в течение прецессии окружность (21″) с радиусом $\sqrt{p_0^2+q_0^2}$ постоянно в одном и том же направлении (и с постоянной скоростью).

Обращаясь теперь к любому перманентному вращению $\bar{\sigma}(r=\bar{r}, p=q=0)$ вокруг гироскопической оси, мы увидим, что для любой регулярной прецессии σ, вначале близкой к $\bar{\sigma}$, т. е. такой, что p_0 и q_0 близки к нулю, изображающая точка для p, q движется сколь угодно долго по окружности с весьма малым радиусом (21″), а потому p и q остаются всегда близкими к нулю, и устойчивость вращения $\bar{\sigma}$, таким образом, доказана.

Наоборот, рассмотрим любое перманентное вращение вокруг какой-нибудь экваториальной оси, которую, не нерушая общности, мы можем предположить совпадающей с осью x, т. е. обратимся к решению $\bar{\sigma}_1(p=\bar{p}, q=r=0)$. Для какой-нибудь регулярной прецессии σ, вначале близкой к $\bar{\sigma}_1$, т. е. имеющей p_0 и q_0 соответственно близкими к $\bar{p}$ и к нулю, окружность (21″) будет иметь радиус не ничтожно малый, а близкий к $\bar{p}$, так что при движении по ней изображающей точки проекция q изменяется по гармоническому закону в интервале, близком к интервалу от $\bar{p}$ до $-\bar{p}$ и, следовательно, большем конечного интервала от $\bar{p}/2$ до $-\bar{p}/2$, не зависящего от начальной разности между решениями σ и $\bar{\sigma}$.

Это вполне ясно показывает неустойчивость всякого перманентного вращения вокруг экваториальной оси [5].

§ 5. Движение тяжелого твердого тела около неподвижной точки

20. Чтобы изучить движение твердого тела S с одной неподвижной точкой при менее частных предположениях относительно характера действующих сил, чем это имело место в случае Эйлера, рассмотрим случай, когда твердое тело S, закрепленное в своей точке O, находится в однородном силовом поле. Таким однородным полем можно считать, например, поле силы тяжести, если рассматривать его в достаточно малой части пространства. Каково бы ни было рассматриваемое однородное поле, активные силы, под действием которых находится твердое тело, эквивалентны (не только векторно, но и механически) одной силе (результирующей сил, действующих на отдельные точки, или элементы твердого тела), приложенной в центре масс или в центре тяжести G тела. Ясно, что, не уменьшая общности, мы можем прямо обратиться к только что упомянутому