который, естественно, можно было бы вывести также из интеграла (21) живых сил, принимая во внимание допущенные здесь частные предположения. На основании предыдущего синтетического рассуждения условное представление величин p и q посредством изображающей точки в данном случае реализуется на экваториальной плоскости концом составляющей e вектора ω, описывающим в течение прецессии окружность (21″) с радиусом $\sqrt{p_0^2+q_0^2}$ постоянно в одном и том же направлении (и с постоянной скоростью).

Обращаясь теперь к любому перманентному вращению $\bar{\sigma}(r=\bar{r}, p=q=0)$ вокруг гироскопической оси, мы увидим, что для любой регулярной прецессии σ, вначале близкой к $\bar{\sigma}$, т. е. такой, что p_0 и q_0 близки к нулю, изображающая точка для p, q движется сколь угодно долго по окружности с весьма малым радиусом (21″), а потому p и q остаются всегда близкими к нулю, и устойчивость вращения $\bar{\sigma}$, таким образом, доказана.

Наоборот, рассмотрим любое перманентное вращение вокруг какой-нибудь экваториальной оси, которую, не нерушая общности, мы можем предположить совпадающей с осью x, т. е. обратимся к решению $\bar{\sigma}_1(p=\bar{p}, q=r=0)$. Для какой-нибудь регулярной прецессии σ, вначале близкой к $\bar{\sigma}_1$, т. е. имеющей p_0 и q_0 соответственно близкими к $\bar{p}$ и к нулю, окружность (21″) будет иметь радиус не ничтожно малый, а близкий к $\bar{p}$, так что при движении по ней изображающей точки проекция q изменяется по гармоническому закону в интервале, близком к интервалу от $\bar{p}$ до $-\bar{p}$ и, следовательно, большем конечного интервала от $\bar{p}/2$ до $-\bar{p}/2$, не зависящего от начальной разности между решениями σ и $\bar{\sigma}$.

Это вполне ясно показывает неустойчивость всякого перманентного вращения вокруг экваториальной оси [5].

§ 5. Движение тяжелого твердого тела около неподвижной точки

20. Чтобы изучить движение твердого тела S с одной неподвижной точкой при менее частных предположениях относительно характера действующих сил, чем это имело место в случае Эйлера, рассмотрим случай, когда твердое тело S, закрепленное в своей точке O, находится в однородном силовом поле. Таким однородным полем можно считать, например, поле силы тяжести, если рассматривать его в достаточно малой части пространства. Каково бы ни было рассматриваемое однородное поле, активные силы, под действием которых находится твердое тело, эквивалентны (не только векторно, но и механически) одной силе (результирующей сил, действующих на отдельные точки, или элементы твердого тела), приложенной в центре масс или в центре тяжести G тела. Ясно, что, не уменьшая общности, мы можем прямо обратиться к только что упомянутому

частному случаю (*тяжелое* твердое тело с закрепленной точкой); с другой стороны, мы можем исключить совпадение G с O, т. е. предположение, что тяжелое твердое тело закреплено в своем центре тяжести, так как в этом случае мы снова пришли бы к движению по инерции (п. 3).

21. Первые интегралы. При принятых предположениях мы начнем с определения в явной форме первых интегралов нашей задачи, получающихся из общих теорем о движении системы. Предположим, что в неподвижной системе осей $O\xi\eta\zeta$ (с началом в O) ось ζ вертикальна и направлена вниз и что система $Oxyz$, неизменно связанная с телом, как обычно, совпадает с системой главных осей инерции, так что соотношения между проекциями вектора угловой скорости и результирующего момента количеств движения имеют вид

$$K_x = Ap, \quad K_y = Bq, \quad K_1 = Cr. \tag{4}$$

Заметим прежде всего, что так как внешние силы сводятся к весу и к реакции в точке O, моменты их относительно вертикали ζ, проходящей через точку O, равны нулю, и потому результирующий момент количеств движения относительно оси $O\zeta$ сохраняет постоянную величину. Таким образом, теорема моментов количеств движения, если обозначим через $\varkappa$ единичный вектор оси ζ (нисходящей вертикали) и через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ его проекции (направляющие косинусы) на подвижные оси, даст первый интеграл

$$K_\zeta \equiv \boldsymbol{K} \cdot \varkappa \equiv K_x\gamma_1 + K_y\gamma_2 + K_z\gamma_3 = \text{const} \equiv K_\zeta^0,$$

или же в силу (4)

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = K_\zeta^0. \tag{28}$$

Далее, так как сила тяжести есть консервативная сила (и связи не зависят от времени), то для нашей задачи имеет место интеграл живых сил

$$T - U = E,$$

где

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{29}$$

а потенциал U силы тяжести P (ср. гл. V, п. 32) определяется равенством

$$U = P\zeta_0, \tag{30}$$

где через ζ_0 обозначена третья координата центра тяжести G относительно неподвижных осей. Если обозначим теперь через x_0, y_0, z_0 координаты самого центра тяжести G относительно подвижных осей, то будем иметь

$$\zeta_0 = \varkappa \cdot (\overrightarrow{OG}) \equiv \gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0 + \gamma_3 z_0, \tag{31}$$

$$U = P(\gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0 + \gamma_3 z_0); \tag{30'}$$

на основании формулы (29) приходим к явному выражению для интеграла живых сил

$$\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-P(\gamma_1x_0+\gamma_2y_0+\gamma_3z_0)=E. \qquad (32)$$

Заметим, что из общих теорем о движении систем нельзя получить для рассматриваемой здесь задачи другие первые интегралы, кроме (28) и (32), до тех пор, пока не будут введены дальнейшие предположения о распределении масс внутри тела и относительно неподвижной точки O[1]).

Так как речь идет о задаче с тремя степенями свободы, т. е. с тремя неизвестными функциями, то ясно, что эти два первых интеграла недостаточны для полного ее решения.

22. Дифференциальные уравнения движения. Согласно общим соображениям п. 1 мы придем к полной постановке задачи, отправляясь еще раз от основного уравнения

$$\frac{dK}{dt}\equiv\dot{K}+\omega\times K=M; \qquad (3)$$

в рассматриваемом нами случае результирующий момент внешних сил относительно точки O приводится к моменту силы тяжести $P\varkappa$, т. е.

$$M\equiv P(\overrightarrow{OG})\times\varkappa. \qquad (33)$$

Этот момент явно зависит от единичного вектора $\varkappa$, определяющего в теле направление и сторону нисходящей вертикали, проходящей через неподвижную точку; поэтому уравнение

$$K+\omega\times K=P(\overrightarrow{OG})\times\varkappa \qquad (34)$$

(или эквивалентная ему система уравнений Эйлера) не приводит в этом случае, как в случае движения по Пуансо, к изолирован-

---

[1]) Этим мы не хотим утверждать абсолютно, что не *существует* других первых интегралов; напротив, для всякой нормальной дифференциальной системы первого порядка с n неизвестными функциями от одного переменного t из теоремы существования общего решения, зависящего от n произвольных постоянных, необходимо следует существование n первых интегралов, которые теоретически можно получить, разрешая относительно произвольных постоянных уравнения общего решения. Если из этих n первых интегралов, зависящих от t, исключим это переменное, то придем во всяком случае к $n-1$ первых интегралов, связывающих только неизвестные величины задачи. Но во все теоремы существования входят разложения в степенные ряды или другие виды последовательных приближений, т. е. бесконечные алгоритмы, которые, вообще говоря, не приводят к функциям, выражающимся элементарно (алгебраическим, показательным или тригонометрическим), а когда в механике говорят о первых интегралах, известных или подлежащих определению (если нет явно выраженной оговорки о противном), то подразумеваются именно интегралы, выражаемые в этой элементарной форме.

ному определению угловой скорости (или ее проекций p, q, r) в функции времени; оно позволяет только выразить производную по времени от K и, следовательно, от ω посредством того же вектора ω и единичного вектора $\varkappa$. Чтобы дополнить постановку задачи, мы должны будем согласно п. 1 прибегнуть к некоторому другому уравнению, которое вместе с уравнением (3) образует систему, позволяющую определить оба вектора ω и $\varkappa$. Таким, очевидно, будет уравнение, выражающее постоянство вектора $\varkappa$ относительно неподвижных осей $O\xi\eta\zeta$, т. е. уравнение

$$\frac{d\varkappa}{dt} \equiv \dot{\varkappa} + \omega \times \varkappa = 0. \tag{35}$$

Уравнения (34) и (35), определяющие производные от ω и $\varkappa$ посредством тех же векторов, вполне характеризуют движение твердого тела; их можно назвать *векторными уравнениями движения тяжелого твердого тела, закрепленного в одной точке.* После проектирования на главные оси инерции x, y, z они дают шесть скалярных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)\,qr &= P\,(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), \\ B\dot{q} - (C - A)\,rp &= P\,(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), \\ C\dot{r} - (A - B)\,pq &= P\,(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1); \end{aligned}\right\} \tag{34'}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 r - \gamma_3 q, \\ \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 p - \gamma_1 r, \\ \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 q - \gamma_2 p; \end{aligned}\right\} \tag{35'}$$

первые три из них представляют собой, конечно, уравнения Эйлера для нашего случая.

В общем мы имеем систему шести дифференциальных уравнений первого порядка, связывающих шесть неизвестных функций времени p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3; следует, однако, заметить, что γ_1, γ_2, γ_3 в силу их геометрического значения как направляющих косинусов (проекций единичного вектора) должны также удовлетворять алгебраическому уравнению

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \tag{36}$$

которое должно быть поэтому добавлено к дифференциальным уравнениям (34′), (35′). Впрочем, уравнение (35), или, если угодно, эквивалентная ему система (35′), выражает постоянство вектора $\varkappa$, или $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \text{const}$; поэтому уравнение (36) дает лишь уточнение этой постоянной интегрирования.

Отсюда следует, что общее решение системы (смешанной) (34′), (35′), (36) зависит от *пяти* произвольных постоянных.

При средствах современного анализа мы не сможем проинтегрировать эту систему в элементарной форме, по крайней мере до тех пор, пока не добавим подходящих ограничительных предположений о распределении масс в твердом теле. В § 9 мы дадим некоторые исторические указания относительно многочисленных исследований, посвященных, начиная с Эйлера, этой интересной проблеме и имеющих своей целью прежде всего открытие все новых и новых случаев интегрируемости. Один особенно простой и важный также для приложений случай мы будем рассматривать несколько более подробно в § 6.

Здесь же в качестве общего замечания укажем, что система (34′), (35′), (36) определяет в функции времени, кроме p, q, r, уже не углы Эйлера θ, φ, ψ (подвижных осей относительно неподвижных), а только направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3 вертикального единичного вектора $\mathbf{x}$ относительно $Oxyz$, и вся аналитическая трудность задачи заключается именно в интегрировании этой системы. Всякий раз как будут определены в функциях от времени проекции угловой скорости p, q, r и направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3, соответствующие выражения углов Эйлера найдутся путем несложных алгебраических преобразований и одной квадратуры. Действительно, пользуясь известными соотношениями (22)

$$\gamma_1 = \sin\varphi \sin\theta, \quad \gamma_2 = \cos\varphi \sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta,$$

мы непосредственно получим выражения θ и φ в конечном виде как функции от γ_1, γ_2, γ_3 и, следовательно, от времени; после этого аналогичное выражение для ψ получится путем одной квадратуры, если мы воспользуемся каким-нибудь из уравнений

$$p = \gamma_1\dot{\psi} + \dot{\theta}\cos\varphi, \quad q = \gamma_2\dot{\psi} - \dot{\theta}\sin\varphi, \quad r = \gamma_3\dot{\psi} + \dot{\varphi},$$

или, в более симметричной форме, уравнением

$$\dot{\psi} = p\gamma_1 + q\gamma_2 + (r - \dot{\varphi})\gamma_3,$$

которое получается из предыдущих путем умножения их соответственно на γ_1, γ_2, γ_3 и последующего сложения.

Квадратура, определяющая ψ, вводит новую произвольную постоянную, которая вместе с произвольными постоянными общего решения системы (34′), (35′), (36) дает шесть постоянных. От этих шести постоянных и должно зависеть в самом общем случае движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой (голономная система с тремя степенями свободы).

23. В виде дополнения к предыдущим общим рассуждениям выведем непосредственно из векторных уравнений (34), (35) два первых интеграла (28), (32), которые в п. 21 мы получили из общих теорем о движении системы.

Что касается интеграла (28) момента количеств движения (относительно вертикали ζ, проходящей через O), то заметим, что, умножая скалярно обе части уравнения (34) на $\varkappa$, мы придем к уравнению

$$\varkappa \cdot \dot{K} + \varkappa \cdot (\omega \times K) = 0,$$

так как вектор M перпендикулярен к единичному вектору $\varkappa$, а умножая скалярно обе части уравнения (35) на K, получим

$$K \cdot \dot{\varkappa} + K \cdot (\omega \times \varkappa) = 0.$$

Достаточно сложить почленно полученные таким образом два уравнения и принять во внимание векторное тождество

$$\varkappa \cdot (\omega \times K) = K \cdot (\varkappa \times \omega) = -K \cdot (\omega \times \varkappa),$$

чтобы получить уравнение

$$K \cdot \dot{\varkappa} + \varkappa \cdot \dot{K} = 0,$$

из которого следует

$$K \cdot \varkappa = \text{const}, \tag{28'}$$

что и выражает искомый первый интеграл.

Чтобы получить интеграл живых сил, умножим скалярно обе части уравнения (34) на $\omega\, dt$, после чего получим

$$\dot{K} \cdot \omega\, dt = dU$$

или

$$dK \cdot \omega = dU,$$

так как вектор ω перпендикулярен к $\omega \times K$, и (гл. IV, п. 3)

$$M \cdot \omega\, dt = dL = dU.$$

На основании соотношения между векторами K и ω имеем

$$dK \cdot \omega = Ap\, dp + Bq\, dq + Cr\, dr = dT,$$

поэтому можно написать

$$dT = dU,$$

а отсюда путем квадратуры мы и придем к интегралу живых сил.

24. Последнее предварительное замечание. Если не вводится никаких специальных предположений относительно распределения масс, то общие теоремы о движении системы не приводят к другим первым интегралам, кроме интегралов живых сил и момента количеств движения (относительно вертикали); на системе уравнений (34), (35) это сказывается в том, что эта система, вообще говоря, не заключает в себе никаких соотношений в конечном виде между векторами ω и $\varkappa$, кроме соотношений (28), (32). Хотя, с аналитической точки зрения уравнение (35) допускает очевидный интеграл $\varkappa^2 = \text{const}$,

но для нашей механической задачи, в которой $\varkappa$ означает как раз единичный вектор, этот интеграл неявно заключается в предпосылках, вместе с последующим условием, что постоянная в правой части должна быть равна 1; при таких условиях невозможно элементарным путем приступить к определению неизвестных векторов ω и $\varkappa$ в функциях от времени и, следовательно, к исследованию движения.

Все же важно уже теперь отметить, что на основании общей теоремы Лиувилля, которую мы уже упоминали в п. 10 и доказательство которой отложили до § 7 гл. X, задача о движении тяжелого твердого тела, закрепленного в одной точке, будет интегрироваться только в квадратурах во всех тех случаях, когда для системы уравнений (34′), (35′) возможно указать первый интеграл, отличный от первых интегралов живых сил и моментов.

25. Перманентные вращения тяжелого тела, закрепленного в одной из его точек. То обстоятельство, что мы не можем найти общий интеграл уравнений движения тяжелого твердого тела, закрепленного в одной из его точек, не исключает, конечно, возможности найти какие-нибудь частные их решения. Даже не вводя каких-либо ограничительных предположений о материальной структуре твердого тела, можно показать, как при помощи совсем элементарных средств удается выявить класс частных решений уравнений (34), (35), зависящий от одной произвольной постоянной.

Мы придем к таким решениям, исследуя вопрос о том, может ли тяжелое твердое тело, закрепленное в одной из своих точек, равномерно (или, как часто говорят, *перманентно*) вращаться вокруг одной и той же постоянной оси (в пространстве и в теле).

Прежде всего легко видеть, что ось перманентного вращения в пространстве может быть только вертикалью. Действительно, речь идет о том, чтобы показать, возможно ли удовлетворить уравнениям (34), (35) и, следовательно, их первым интегралам (28), (32), предполагая в них постоянной в пространстве угловую скорость ω. Но в таком случае, как мы знаем (т. I, гл. IV, п. 11), эта угловая скорость будет постоянной также и в теле, откуда следует на основании соотношений между векторами ω и K, что будет постоянным в теле также и момент K количеств движения; достаточно принять во внимание интеграл живых сил (32), который можно написать в виде

$$\frac{1}{2} K \cdot \omega - \varkappa \cdot P \cdot \overrightarrow{OG} = E,$$

чтобы заключить, что во время движения должно оставаться неизменным скалярное произведение $\varkappa \cdot \overrightarrow{OG}$ и, следовательно, должна быть постоянной проекция вертикального единичного вектора $\varkappa$ на направление прямой OG. Но легко также видеть, что остается постоянной (в теле) и проекция этого вектора на плоскость, перпендикуляр-

ную к OG. Действительно, из уравнения (34) мы видим, что так как вектор $\dot{K}$ исчезает, а векторное произведение $\omega \times K$ остается постоянным (в теле), то таким же будет и векторное произведение $\varkappa \times \overrightarrow{OG}$. Отсюда следует, что вертикаль, проходящая через точку O, неподвижна в теле, т. е. что ось вращения может быть расположена только вертикально.

Заметим, кстати, что если при движении тяжелого твердого тела, закрепленного в одной точке, остается постоянным в теле момент K, то постоянной (в теле) будет в силу соотношения между ω и K и угловая скорость ω; а так как она будет тогда неизменной и в пространстве, то мы опять приходим к перманентным вращениям, которые поэтому можно определить как такие движения, в которых сохраняется постоянным внутри тела результирующий момент K количеств движения.

Таким образом, наша задача приведена к тому, чтобы определить, возможно ли удовлетворить уравнениям (34), (35), полагая в них $\omega = \nu\varkappa$, где ν обозначает неизвестную постоянную, дающую по величине и по знаку угловую скорость (скалярную) предполагаемого вращательного движения твердого тела вокруг вертикали, направленной вниз.

При таком предположении уравнение (35) будет тождественно удовлетворено, потому что, с одной стороны, имеем $\omega \times \varkappa = 0$ вследствие параллельности векторов ω и $\varkappa$, с другой стороны, $\dot{\varkappa} = 0$ вследствие того, что единичный вектор $\varkappa$, как принадлежащий оси вращения, будет иметь неизменное направление также и относительно тела.

Поэтому остается только удовлетворить уравнению (34), которое вследствие неизменности относительно тела момента K количеств движения, в предположении $\omega = \nu\varkappa$, приводится к виду

$$\nu\varkappa \times K = P \cdot \overrightarrow{OG} \times \varkappa,$$

или

$$\varkappa \times [\nu K + P \cdot \overrightarrow{OG}] = 0, \tag{37}$$

причем надо отметить, что вектор $\overrightarrow{OG}$, так же как и векторы $\varkappa$ и K, остается постоянным внутри тела.

Поэтому все сводится к тому, чтобы убедиться, можно ли подходящими значениями γ_1, γ_2, γ_3 и ν удовлетворить уравнению (37), принимая во внимание, что проекции на подвижные оси вектора $\varkappa$ суть γ_1, γ_2, γ_3, а вектора K —

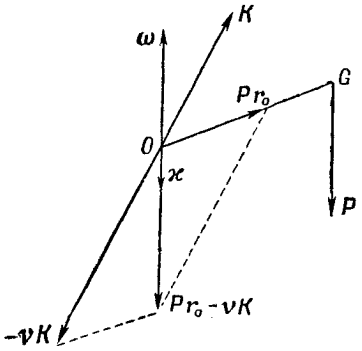
$$K_x = A\nu\gamma_1, \quad K_y = B\nu\gamma_2, \quad K_z = C\nu\gamma_3. \tag{38}$$

Освободимся теперь же от частного случая $\nu = 0$, соответствующего возможным состояниям равновесия твердого тела. Уравнение (37)

приведется тогда к виду

$$\varkappa \times \overrightarrow{OG} = 0$$

и выразит, что ось OG, проходящая через центр тяжести, как мы уже знаем, должна располагаться по вертикали или вниз (устойчивое равновесие), или вверх (неустойчивое равновесие).



Фиг. 16.

Исключая теперь эти два случая равновесия, т. е. предполагая $\nu \neq 0$, заметим, как это следует из уравнения (37), что *необходимое* условие для того, чтобы $\omega = \nu\varkappa$ давало угловую скорость перманентного вращения твердого тела, заключается в том, чтобы три вектора ω, K, $\overrightarrow{OG}$ были компланарны (фиг. 16), т. е. чтобы было *)

$$(K \times \omega) \cdot \overrightarrow{OG} = 0. \qquad (39)$$

Это скалярное уравнение, если принять во внимание соотношение (38), по сокращении на $\nu^2 = \omega^2$, можно написать в виде

$$\begin{vmatrix} A\gamma_1 & B\gamma_2 & C\gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (39')$$

или в виде

$$(B - C)\, x_0\gamma_2\gamma_3 + (C - A)\, y_0\gamma_3\gamma_1 + (A - B)\, z_0\gamma_1\gamma_2 = 0. \qquad (39'')$$

Оно определяет, следовательно, внутри тела (в координатах γ_1, γ_2, γ_3 прямой, принадлежащей пучку с центром в O) конус второго порядка. Такой конус, зависящий только от структуры тела и от положения в нем закрепленной точки, называется конусом Штауде (относительно точки O) — по имени математика, впервые разрешившего задачу, которой мы здесь занимаемся [1]); поэтому мы можем утверждать, что те прямые в твердом теле, которые могут быть осями равномерного вращения, надо искать исключительно между образующими конуса Штауде.

Естественно, что этот конус может выродиться в пару плоскостей (различных или совпадающих) или даже сделаться неопределенным. Но

*) Из равенства (37) следует, что геометрическая сумма $\nu K + P \cdot \overrightarrow{OG}$ параллельна вектору $\varkappa$; это невозможно, если три вектора K, $\overrightarrow{OG}$ и $\varkappa$ не лежат в одной плоскости. (*Прим. ред.*)

[1]) Crelle, т. 113, 1894, стр. 318; *Leipz. Ber.*, т. 51, 1899, стр. 219.

эти случаи могут встретиться лишь при частных предположениях относительно A, B, C и x_0, y_0, z_0, т. е. относительно распределения масс в теле и положения закрепленной точки по отношению к центру тяжести. Оставляя для упражнений исследование этих исключительных случаев, мы продолжим здесь рассмотрение общего случая, заключающегося в том, что закрепленная точка занимает в теле любое положение относительно центра тяжести и что соответствующие главные моменты инерции A, B, C все различны.

Прежде чем идти далее, добавим два важных замечания.

Сначала посмотрим, как при допущенных предположениях находятся пять независимых прямых, принадлежащих конусу Штауде (т. е. ровно столько, сколько нужно для его определения), которые определяются внутри конуса распределением масс и положением закрепленной точки. Этими прямыми будут:

1) три главные оси инерции (относительно точки O), направляющие косинусы которых имеют соответственно значения 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1;

2) прямая OG, направляющие косинусы которой пропорциональны x_0, y_0, z_0;

3) прямая с направляющими косинусами, пропорциональными x_0/A, y_0/B, z_0/C, которая по отношению к эллипсоиду инерции является диаметром, сопряженным с диаметральной плоскостью, перпендикулярной к OG, и поэтому на основании известного геометрического построения вектора $\boldsymbol{\omega}$ по вектору $\boldsymbol{K}$ (гл. IV, п. 18) представляет собой линию действия вектора $\boldsymbol{\omega}$, когда вектор $\boldsymbol{K}$ принимает направление прямой OG.

Далее, можно показать, что конус Штауде является просто конусом (который следовало бы назвать конусом Ампера [1])) прямых, выходящих из O и представляющих собой главные оси инерции

[1]) Андре Мари Ампер родился в Лионе в 1775 г., умер в Марселе в 1836 г., был назван Ньютоном электродинамики за открытие и классически совершенную иллюстрацию законов механического действия, развивающегося между проводниками (нитеобразными), по которым текут электрические токи (постоянные). В честь его была названа *ампером* единица тока (в абсолютной системе, принятой повсюду в электротехнике; ср. т. I, гл. VIII, упражнение 12). Кроме электромагнетизма, он связал свое имя также и с теорией уравнений в частных производных, в которой, как и в дифференциальной геометрии, был последователем Монжа.

Автор знаменитого Essai sur la philosophie des sciences (Париж, 1834). Ампер, классифицируя науки, выдвинул предложение, быстро всеми принятре, отделить от механики и назвать „кинематикой" ту часть ее, которая относится к описанию движения (рассматриваемого само по себе, независимо от его причин).

Ампер был профессором математики в Политехнической школе, занимал кафедру физики в Collège de France, был членом Академии наук в Париже и т. п.

В тексте имеется в виду его Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanents de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes. *Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris*, т. 5, 1821—1822, стр. 86.

твердого тела (каждая относительно одной из своих точек, которая, естественно, будет отличной от O, для всех осей, за исключением разве осей x, y, z) [1]).

Для доказательства этой теоремы найдем условие того, чтобы прямая в твердом теле, выходящая из O и имеющая направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3, была главной осью инерции относительно своей точки O', расстояние которой от O, неизвестное по величине и по знаку, обозначим через ρ, так что соответствующие координаты выразятся так: $\rho\gamma_1$, $\rho\gamma_2$, $\rho\gamma_3$.

Рассматривая теперь какие-нибудь оси $O'x'y'z'$, связанные с телом и имеющие начало в точке O', а осью z' — прямую OO', будем иметь при надлежащих значениях косинусов α_i, β_i, γ_i

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$
$$y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,$$
$$z' = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z - \rho,$$

где (x, y, z), (x', y', z') суть координаты произвольной точки в системах $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ соответственно. Условия того, чтобы прямая OO' была для твердого тела главной осью инерции, мы получим, если напишем, что соответствующие моменты девиации (центробежные моменты инерции) равны нулю

$$\sum_i m_i y_i' z_i' = 0, \quad \sum_i m_i z_i' x_i' = 0.$$

Эти два уравнения в развернутой форме принимают вид

$$\alpha_1 (A\gamma_1 - \rho m x_0) + \alpha_2 (B\gamma_2 - \rho m y_0) + \alpha_3 (C\gamma_3 - \rho m z_0) = 0,$$
$$\beta_1 (A\gamma_1 - \rho m x_0) + \beta_2 (B\gamma_2 - \rho m y_0) + \beta_3 (C\gamma_3 - \rho m z_0) = 0,$$

где m обозначает полную массу твердого тела. Они, очевидно, равносильны уравнениям

$$A\gamma_1 - \rho m x_0 = \sigma\gamma_1,$$
$$B\gamma_2 - \rho m y_0 = \sigma\gamma_2,$$
$$C\gamma_3 - \rho m z_0 = \sigma\gamma_3,$$

где σ обозначает множитель пропорциональности. Если исключим вспомогательные неизвестные ρ и σ, то придем к уравнению (39′) конуса Штауде.

26. Перейдем теперь к обращению результата предыдущего пункта, т. е. к доказательству того, что *всякая* образующая конуса Штауде, расположенная вдоль вертикали (и направленная в надлежащую сто-

---

[1]) Эта замечательная теорема (остававшаяся долгое время странным образом незамеченной в столь избитом вопросе) принадлежит W. van der Woude, *Math. Zeitschr.*, т. 16, 1923, стр. 170.

рону), будет действительно для твердого тела осью перманентного вращения (с величиной угловой скорости, зависящей от направления этой образующей в теле).

Выберем на конусе Штауде образующую q, ориентированную по одному из своих направлений и имеющую относительно твердого тела направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3, и предположим, что она совпадает (также и по стороне) с нисходящей вертикалью, проходящей через точку O. По предположению, направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3 удовлетворяют уравнению (39′), и все сводится к тому, чтобы убедиться, можно ли при соблюдении условия (39′) определить, по крайней мере, одно действительное значение ν, которое удовлетворяло бы уравнению (37). Это векторное соотношение, после проектирования на подвижные оси, дает три линейных уравнения относительно ν^2 (уравнения Эйлера перманентного вращения тяжелого твердого тела)

$$\left.\begin{aligned}(B-C)\gamma_2\gamma_3\nu^2 &= P(\gamma_2 z_0-\gamma_3 y_0),\\ (C-A)\gamma_3\gamma_1\nu^2 &= P(\gamma_3 x_0-\gamma_1 z_0),\\ (A-B)\gamma_1\gamma_2\nu^2 &= P(\gamma_1 y_0-\gamma_2 x_0).\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Эти уравнения при сделанных предположениях будут обязательно совместны, так как определители второго порядка соответствующей матрицы с тремя строками и двумя столбцами по исключении множителя P будут в то же время минорами взаимного определителя, по предположению равного нулю,

$$\begin{vmatrix} A\gamma_1 & B\gamma_2 & C\gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix};$$

так что по известной теореме [1]) они сами будут равны нулю.

Предположим пока, что образующая g, приведенная к совпадению с нисходящей вертикалью, будет отлична от прямой OG и от каждой из главных осей инерции x, y, z, чем будет исключено то обстоятельство, что косинусы γ_1, γ_2, γ_3 пропорциональны x_0, y_0, z_0 или что два из них одновременно равны нулю.

При этих ограничениях уравнения (40) однозначно определяют ν^2 в функции от γ_1, γ_2, γ_3

$$\nu^2=\frac{P(\gamma_2 z_0-\gamma_3 y_0)}{(B-C)\gamma_2\gamma_3}=\frac{P(\gamma_3 x_0-\gamma_1 z_0)}{(C-A)\gamma_3\gamma_1}=\frac{P(\gamma_1 y_0-\gamma_2 x_0)}{(A-B)\gamma_1\gamma_2}. \tag{40′}$$

Если полученное таким образом значение ν^2 будет положительным, то мы непосредственно видим, что вокруг образующей g с направляющими косинусами γ_1, γ_2, γ_3, расположенной вдоль нисходящей верти-

[1]) См., например, Э. Чезаро, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. I, 1913, п. 34, стр. 29.

кали, для твердого тела возможны два перманентных вращения с угловыми скоростями $\pm\nu$. Если, наоборот уравнения (40′) для ν^2 дадут отрицательное значение, то твердое тело не может равномерно вращаться вокруг образующей g, расположенной вертикально и направленной в первоначально выбранную сторону. Но достаточно будет изменить ее направление на противоположное *), чтобы изменили знаки все три направляющих косинуса γ_1, γ_2, γ_3, и тогда уравнения (40′) дадут для ν^2 положительное значение.

Этим и доказано наше утверждение, за исключением случая, когда образующая g совпадает с прямой OG или с одной из главных осей инерции твердого тела относительно точки O.

Если теперь прямая OG располагается вертикально, т. е. если имеем $\gamma_1:\gamma_2:\gamma_3=x_0:y_0:z_0$, то уравнения (40′) дадут $\nu=0$, какова бы ни была сторона, в которую обращен вектор $\overrightarrow{OG}$ на вертикали; мы приходим, таким образом, к двум известным случаям равновесия.

Если, далее, совместим с вертикалью одну из главных осей инерции, то одно из уравнений (40) сведется к тождеству, а два других окажутся противоречивыми (поскольку в них ν рассматривается как конечная величина).

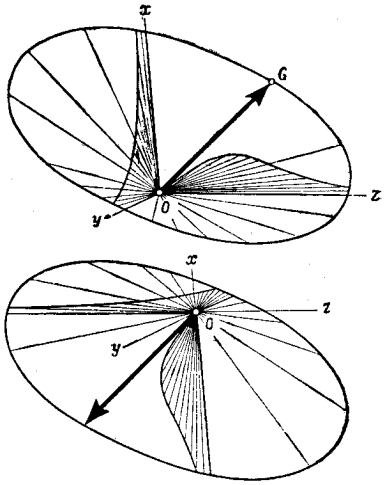
Будем, однако, переходить к пределу, представляя себе сначала одну из образующих g конуса Штауде, близкую к какой-нибудь главной оси инерции, например к оси x (с направляющими косинусами 1, 0, 0), расположенной вертикально и направленной в надлежащую сторону, и будем неограниченно приближать эту ось к вертикали. Это равносильно предположению, что направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3 прямой g стремятся соответственно к 1, 0, 0; в силу этого, в то время как первое из уравнений (40) будет стремиться к тождеству, второе или, безразлично, третье дадут для ν^2 значение, стремящееся к положительной бесконечности. То же самое остается в силе и для двух других главных осей инерции; поэтому в виде теоретической интерпретации действительного случая весьма большой скорости можно сказать, что главные оси инерции, расположенные вертикально в надлежащую сторону для твердого тела, будут осями вращения с бесконечными угловыми скоростями (как в одну, так и в другую сторону, безразлично) (фиг. 17).

Поэтому заключаем, что *всякая образующая конуса Штауде для твердого тела является осью равномерного вращения, если только надлежащая сторона этой образующей совпадает с нисходящей вертикалью; при этом абсолютная величина угловой скорости* $|\nu|$ *определяется однозначно, а направление вращения остается произвольным* (обратимые перманентные вращения). *Только для прямой, проходящей через центр тяжести* (*соответственно двум случаям*

*) После такой перемены направления на образующей с нисходящей вертикалью будет совпадать другая ее половина. (*Прим. ред.*)

равновесия), *оказывается безразличным, какое из двух ее противоположных направлений совпадает с нисходящей вертикалью.*

Предыдущим оправдывается название *перманентных осей вращения*, которое дают в случае твердого тела, закрепленного в одной точке, образующим конуса Штауде, включая, как соответствующие предельным случаям, главные оси инерции и прямую [1]), проходящую через центр тяжести.



Фиг. 17.

§ 6. Тяжелый гироскоп

27. Дифференциальные уравнения движения. Мы будем рассматривать здесь один из тех случаев, когда благодаря некоторым частным предположениям (которые можно оправдать на основании физических соображений) удается указать для уравнений движения тяжелого твердого тела, закрепленного в одной точке, существование еще одного первого интеграла и, следовательно, на основании теоремы Лиувилля, упомянутой в п. 24, привести задачу к квадратурам.

Случай интегрируемости, на котором мы хотим здесь остановиться и который указан еще Лагранжем и более глубоко изучен Пуассоном, представляется наиболее простым и наиболее ясным с физической точки зрения.

Речь идет о движении *тяжелого гироскопа*, закрепленного в какой-либо точке O своей оси, отличной от центра тяжести G. Согласно определению п. 17 гл. IV, гироскопом мы называем всякое твердое тело, центральный эллипсоид инерции которого есть эллипсоид вращения; необходимо вспомнить, что для такого твердого тела эллипсоидом вращения будет также и эллипсоид инерции относительно всякой другой точки оси; обратно, чтобы заключить, что какое-нибудь твердое тело является гироскопом в этом смысле, достаточно знать, что оно имеет гироскопическую структуру относительно одной из своих точек O и что центр тяжести G принадлежит соответствующей оси.

Поэтому по отношению к обычным подвижным осям $Oxyz$, в которых Oz есть гироскопическая ось, структурные предположения,

[1]) Об устойчивости этих перманентных вращений твердого тела, закрепленного в одной точке, см. E. J. Routh, Dynamics и пр., т. II, § 214; J. Hadamard, *Assoc. française*, Bordeaux, т. 24, 1895, ч. II, стр. 1; R. Grammel, *Math. Zeitschrift*, т. 6, 1920, стр. 124.