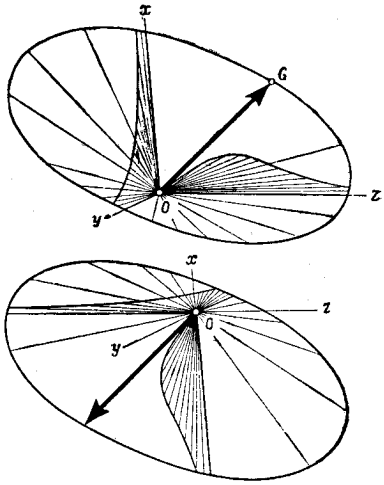
равновесия), *оказывается безразличным, какое из двух ее противоположных направлений совпадает с нисходящей вертикалью.*

Предыдущим оправдывается название *перманентных осей вращения*, которое дают в случае твердого тела, закрепленного в одной точке, образующим конуса Штауде, включая, как соответствующие предельным случаям, главные оси инерции и прямую [1]), проходящую через центр тяжести.



Фиг. 17.

§ 6. Тяжелый гироскоп

27. Дифференциальные уравнения движения. Мы будем рассматривать здесь один из тех случаев, когда благодаря некоторым частным предположениям (которые можно оправдать на основании физических соображений) удается указать для уравнений движения тяжелого твердого тела, закрепленного в одной точке, существование еще одного первого интеграла и, следовательно, на основании теоремы Лиувилля, упомянутой в п. 24, привести задачу к квадратурам.

Случай интегрируемости, на котором мы хотим здесь остановиться и который указан еще Лагранжем и более глубоко изучен Пуассоном, представляется наиболее простым и наиболее ясным с физической точки зрения.

Речь идет о движении *тяжелого гироскопа*, закрепленного в какой-либо точке O своей оси, отличной от центра тяжести G. Согласно определению п. 17 гл. IV, гироскопом мы называем всякое твердое тело, центральный эллипсоид инерции которого есть эллипсоид вращения; необходимо вспомнить, что для такого твердого тела эллипсоидом вращения будет также и эллипсоид инерции относительно всякой другой точки оси; обратно, чтобы заключить, что какое-нибудь твердое тело является гироскопом в этом смысле, достаточно знать, что оно имеет гироскопическую структуру относительно одной из своих точек O и что центр тяжести G принадлежит соответствующей оси.

Поэтому по отношению к обычным подвижным осям $Oxyz$, в которых Oz есть гироскопическая ось, структурные предположения,

[1]) Об устойчивости этих перманентных вращений твердого тела, закрепленного в одной точке, см. E. J. Routh, Dynamics и пр., т. II, § 214; J. Hadamard, *Assoc. française*, Bordeaux, т. 24, 1895, ч. II, стр. 1; R. Grammel, *Math. Zeitschrift*, т. 6, 1920, стр. 124.

характеризующие этот случай, выражаются в обозначениях предыдущего параграфа тремя условиями

$$A = B, \quad x_0 = y_0 = 0; \tag{41}$$

достаточно представить себе, что ось Oz направлена от O к G, чтобы можно было считать, что $z_0 > 0$. Точка полупрямой OG, находящаяся от точки O на расстоянии, равном 1, называется вершиной гироскопа. Вершина лежит на поверхности сферы с радиусом, равным 1, и с центром в закрепленной точке O.

Условия нашей задачи получатся при этом из условий задачи предыдущего параграфа о движении какого угодно твердого тела вокруг одной из его закрепленных точек, путем добавления условий (41), и также, если угодно, условия $z_0 > 0$.

Необходимо теперь же отметить, что момент (33) силы тяжести, так как вектор $\overrightarrow{OG}$ лежит на оси z, имеет в данном случае вид

$$\boldsymbol{M} = Pz_0\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\varkappa}. \tag{33'}$$

Что касается дифференциальных уравнений, то мы возьмем их прямо в форме (34′), (35′). Ограничиваясь здесь пока уравнениями Эйлера (34′), мы видим, что третье из них (совпадающее в этом случае с уравнением (15) п. 7) приводится в силу условий (41) к виду

$$C\dot{r} = 0$$

и непосредственно дает новый первый интеграл

$$r = \text{const}, \tag{42}$$

что и делает возможным интегрирование задачи в квадратурах.

Отсюда следует, что *во всяком движении тяжелого гироскопа проекция угловой скорости его на гироскопическую ось (гироскопическая угловая скорость) остается постоянной.*

Два других уравнения (34′) (равносильные в совокупности экваториальному уравнению (16) п. 7) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} - (A - C)rq &= -Pz_0\gamma_2, \\ A\dot{q} + (A - C)rp &= Pz_0\gamma_1, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

где в силу только что сказанного r означает постоянную.

Естественно, что остаются в силе и два первых интеграла, полученных в общем случае (п. 21), т. е. интеграл (28) момента количеств движения относительно вертикали и интеграл (32) живых сил, которые здесь на основании условий (41) и равенства (42) приводятся соот-

ветственно к следующим:

$$A(p\gamma_1+q\gamma_2)+Cr\gamma_3=K_\zeta^0, \tag{44}$$

$$\frac{1}{2}A(p^2+q^2)+\frac{1}{2}Cr^2-Pz_0\gamma_3=E \tag{45}$$

при постоянном r.

28. Определение угла нутации. Обратимся теперь к дифференциальным уравнениям (35′). Принимая во внимание оба первых интеграла (44), (45) и общие уравнения (35′) (достаточно третьего), легко выделить уравнение для определения переменного $\gamma_3=\cos\theta$ и свести задачу к интегрированию уравнения первого порядка типа

$$\dot{s}^2=\Phi(s),$$

уже встречавшегося несколько раз (см., в частности, гл. I, § 6).

Положим $\gamma_3=\cos\theta=s$ и введем для упрощения формул более короткие обозначения

$$\frac{C}{A}=c,\quad \frac{2Pz_0}{A}=\rho^2,\quad \frac{E}{Pz_0}=h,\quad \frac{K_\zeta^0}{A}=\rho k,\quad r=\rho\lambda; \tag{46}$$

здесь c и ρ представляют собой две положительные постоянные (первое — отвлеченное число, а второе имеет размерность угловой скорости), зависящие исключительно от распределения масс в теле; а h, k, λ так же как и E, K_ζ^0 и r, от которых они отличаются соответственно множителем (однородности), суть постоянные интегрирования, приведенные к отвлеченным числам.

При этом соглашении первые интегралы (44), (45) принимают вид

$$p\gamma_1+q\gamma_2=\rho(k-c\lambda s), \tag{44′}$$

$$p^2+q^2=\rho^2(s+h-c\lambda^2); \tag{45′}$$

поэтому, подставляя в тождество

$$(p\gamma_1+q\gamma_2)^2+(p\gamma_2-q\gamma_1)^2=(p^2+q^2)(1-\gamma_3^2)=$$
$$=(p^2+q^2)(1-s^2) \tag{47}$$

и принимая во внимание третье из уравнений (35′), получим для s упомянутое выше уравнение

$$\frac{1}{\rho^2}\dot{s}^2=(1-s^2)(s+h-c\lambda^2)-(c\lambda s-k)^2. \tag{48}$$

Это уравнение представляет собой в некотором смысле резольвенту задачи о движении тяжелого гироскопа, потому что (мы покажем это в п. 33) как только будет определено путем интегрирования уравнения (48) выражение для $s=\gamma_3$ в функции от времени, так при помощи алгебраических преобразований и квадратур найдутся

аналогичные выражения и для других неизвестных функций, а именно для γ_1, γ_2, p, q (r, как мы видели, постоянно), после чего уже можно определить углы Эйлера φ, ψ.

Уравнение (48) в свою очередь может быть проинтегрировано в квадратурах (гл. I, п. 15), и так как функция в правой части есть многочлен третьей степени относительно s, то общий интеграл выразится в эллиптических функциях.

Таким образом, установлено приведение к квадратурам задачи о движении тяжелого гироскопа.

29. Замечание о случае, когда гироскопическая скорость равна нулю. Мы не будем здесь останавливаться на выкладках, необходимых для интегрирования дифференциального уравнения (48), а изучим характер общего решения, применяя к этому уравнению критерии, установленные в общем случае в § 6 гл. I для исследования интегралов уравнений этого типа.

Такое исследование для настоящего случая упрощается путем исключения частного предположения $\lambda = 0$, т. е., в силу последнего из равенств (46), $r = 0$, которое, как мы здесь покажем, приводило бы к разобранной уже задаче, а именно к движению сферического маятника (гл. II, пп. 48, 49).

Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что при предположении $r = 0$, т. е. когда исключается вращение вокруг гироскопической оси, положение гироскопа в пространстве будет вполне определено направлением в любой момент гироскопической оси или, другими словами, значениями, выраженными в функциях от времени, сферических координат θ и χ (широты и долготы) вершины (п. 27) и, кроме того, начальным положением тела относительно подвижных осей.

Далее, направляющие косинусы α_3, β_3, γ_3 гироскопической оси Oz относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$ определяются в функциях от θ и χ равенствами

$$\alpha_3 = \sin\theta\cos\chi, \quad \beta_3 = -\sin\theta\sin\chi, \quad \gamma_3 = \cos\theta.$$

Сравнение с выражениями тех же самых косинусов в функции от двух углов Эйлера θ, ψ (т. I, гл. III, п. 32)

$$\alpha_3 = \sin\theta\sin\psi, \quad \beta_3 = -\sin\theta\cos\psi, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

показывает (как, впрочем, можно было бы убедиться и прямым путем на основании геометрического значения различных рассматриваемых углов), что широта θ действительно совпадает с первым углом Эйлера и что χ и ψ связаны соотношением $\chi = \psi - \pi/2$.

После этого мы сразу же видим указанную эквивалентность настоящей задачи с задачей о сферическом маятнике. Заметим при этом, что, за исключением физического значения постоянных, выра-

жения живой силы и потенциала в той и другой задаче имеют один и тот же вид в обобщенных координатах θ и χ.

Действительно, в случае сферического маятника, обозначая через m_1 массу, через l — длину и принимая во внимание тождество $\chi = \psi - \pi/2$, будем иметь

$$T = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta), \quad U = m_1 g \zeta = m_1 g l \cos \theta;$$

а для гироскопа живая сила при $r = 0$ определяется равенством

$$T = \frac{1}{2} A (p^2 + q^2).$$

Принимая во внимание (т. I, гл. III, п. 34), что

$$p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta, \quad q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta,$$

можно написать

$$T = \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta),$$

потенциал же имеет следующее выражение:

$$U = m g z_0 \cos \theta.$$

Очевидно, уравнения Лагранжа, соответствующие этим двум задачам, совпадут, если отождествить длину l сферического маятника с количеством $A/m z_0$, имеющим размерность длины.

30. Исследование резольвенты. Исключим теперь на основании замечания предыдущего пункта случай $\lambda = 0$ и ограничимся исследованием решения уравнения (48) только с качественной стороны. Такое качественное рассмотрение основывается на исследовании корней (действительных) многочлена третьей степени в правой части (48)

$$(1 - s^2)(s - h - c\lambda^2) - (c\lambda s - k)^2,$$

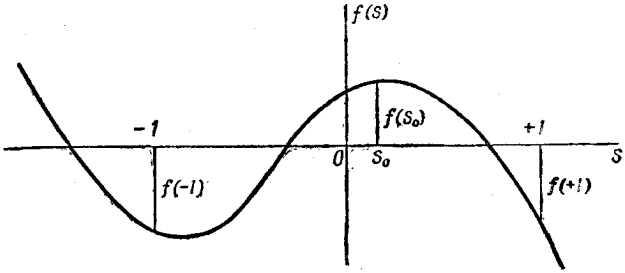
который мы будем обозначать для краткости через $f(s)$ или, если хотим выявить постоянные (интеграции), от которых он зависит, через $f(s \mid \lambda, h, k)$.

Многочлен $f(s)$ при s, стремящемся к $-\infty$, стремится к $+\infty$ и, за исключением двух случаев, когда $c\lambda = \pm k$, принимает отрицательные значения как при $s = -1$, так и при $s = 1$; отсюда следует, что этот многочлен, по крайней мере при указанном исключении, допускает один действительный корень, меньший -1. С другой стороны, во всяком движении гироскопа $s = \cos \theta$ остается всегда заключенным между -1 и $+1$; к этому интервалу должно

принадлежать и начальное значение s_0, и так как для действительности движения необходимо должно быть $f(s_0) \geqslant 0$, то s_0 обязательно будет отличным от крайних значений -1 и $+1$.

Если $f(s_0) > 0$, то из предыдущих рассуждений непосредственно следует, что трехчлен $f(s)$ допускает три действительных простых корня (фиг. 18), заключенных соответственно в интервалах от $-\infty$ до -1, от -1 до s_0 и от s_0 до $+1$ (за исключением концов).

Если, наоборот, $f(s_0) = 0$, то возможно, что s_0 является двойным корнем многочлена; но в таком случае, так как всегда существует третий корень вне интервала от -1 до $+1$ (именно,



Фиг. 18.

корень, меньший -1), $f(s)$ в этом интервале не может уже менять знака и поэтому будет постоянно отрицательным, как и на концах (исключая точку $s = s_0$, в которой нуль будет второго порядка).

Если, далее, s_0 есть простой корень многочлена $f(s)$, то из общего исследования, проведенного в § 6 гл. I, будет вытекать, что функция $s(t)$, определенная уравнением (48) и начальным значением s_0, имея также нулевую производную вначале, не будет все же постоянной, и потому найдутся моменты t^*, а значит, и положения s^*, в которых в силу действительного характера движения будем иметь $f(s^*) > 0$; поэтому и здесь, как и в случае $f(s_0) > 0$, мы заключаем, что многочлен допускает три простых корня, из которых два являются *внутренними* для интервала от -1 до $+1$, а третий меньше -1.

Остаются два особых случая $c\lambda = \pm k$, исключенные выше. При $c\lambda = k$ многочлен $f(s)$, как всегда, стремится к $+\infty$ при s, стремящемся к $-\infty$, кроме того, он будет отрицательным при $s = -1$ и нулем при $s = 1$; поэтому он всегда будет иметь простой корень, меньший -1; если $s = 1$ есть двойной корень, то, как и в общем случае, утверждаем, что при $-1 \leqslant s < 1$ многочлен всегда будет отрицательным. Если, далее, $s = 1$ не является двойным корнем, то мы увидим, рассуждая, как и выше, что соответственно действительному движению гироскопа многочлен обязательно имеет третий простой корень внутри интервала от -1 до $+1$.

Наконец, мы должны рассмотреть еще случай $c\lambda = -k$. В этом предположении многочлен $f(s)$ допускает корень $s = -1$; для других же двух корней могут представиться различные случаи. Именно, $s = -1$ прежде всего может быть тройным корнем. Если, далее, он является двойным корнем, то третий корень может попасть как внутрь, так и вне интервала от -1 до $+1$. Наконец, если $s = -1$ есть простой корень, то для других двух корней могут представиться все возможные случаи, т. е. они могут быть мнимыми, или совпадающими между собой (лежащими внутри или вне интервала), или действительными и различными (один внутри, другой вне этого интервала, или оба вне интервала).

Для последующего необходимо изложить вкратце все случаи, в которых соответственно действительным решениям уравнения (48) многочлен $f(s)$ может иметь кратные корни в интервале от $s = -1$ до $s = +1$. Из предыдущего следует, что, за исключением частного случая $c\lambda = -k$, для $f(s)$ в этом интервале (если включить в него $f = +1$) могут встретиться только кратные корни второго порядка, изолированные в том смысле, что во всякой другой точке интервала многочлен будет отрицательным.

Если, наоборот, $c\lambda = -k$, то для $f(s)$ в интервале от $s = -1$ до $s = 1$ могут быть:

а) тройной корень, и он обязательно будет равен -1;

б) или, помимо простого корня $s = -1$, двойной корень внутри интервала от -1 до $+1$; этот двойной корень, как легко убедиться на основании знака $f(s)$, при очень большом по абсолютной величине s будет необходимо изолированным в только что разъясненном смысле;

в) или двойной корень $s = -1$, изолированный в обычном смысле;

г) или, наконец, двойной корень $s = -1$, вместе с другим корнем (простым) внутри интервала от -1 до $+1$.

31. Случай простых корней. Нутация гироскопической оси. Приложим теперь общие результаты § 6 гл. I, начиная со случая двух простых корней s_1, s_2 (принадлежащих интервалу от -1 до $+1$). При этом предположении функция $s = \cos\theta$ с возрастанием времени неопределенно долго колеблется между двумя крайними значениями s_1 и s_2; по отношению к гироскопу это означает, что ось описывает в пространстве коническую поверхность, которая все время остается заключенной между двумя конусами вращения с вертикальной осью и с углами при вершинах

$$2\theta_1 = 2 \arccos s_1, \quad 2\theta_2 = 2 \arccos s_2$$

Эта коническая поверхность поочередно касается то одного, то другого конуса (*нутация гироскопической оси*).

Чтобы определить движение гироскопической оси, будем рассматривать движение так называемой *вершины* гироскопа (п. 27), т. е.

конца V вектора $\overrightarrow{OV}=\boldsymbol{k}$, в котором прямая OG, проходящая через центр тяжести, пересекает сферу с центром O и радиусом 1.

Траектория (сферическая) точки V называется *траекторией вершины*; из того, что было сказано выше, следует, что в случае, который мы здесь рассматриваем, она будет вся заключена между двумя параллелями широты (южной, т. е. измеряемой от южного полюса, или, еще точнее, нижней, поскольку мы приняли ось Oz направленной вниз): $\theta_1=\arccos s_1$ и $\theta_2=\arccos s_2$ и идет попеременно от одной к другой. В силу нашего соглашения, что $\theta=\arccos s$ является южной широтой, из этих двух крайних параллелей будет выше та, которая соответствует меньшему корню s_1.

Теперь интересно, в частности, знать, каково будет расположение траектории вершины по отношению к двум крайним параллелям в тех местах, где эта траектория имеет с ними общие точки. Мы ограничимся здесь предположением, что вершина движется по сфере между двумя параллелями в собственном смысле, т. е. исключим оба случая, когда или $s_1=-1$ (и $c\lambda=-\boldsymbol{k}$), или $s_2=1$ (и $c\lambda=\boldsymbol{k}$), т. е. когда та или другая параллель сводится к одной точке (северный или южный полюс сферы).

На поставленный таким образом вопрос можно ответить, отыскав выражение угла α, который касательная к траектории вершины в любой своей точке образует с меридианом, проходящим через нее, т. е. угла α скорости вершины с единичным вектором $\boldsymbol{u}$, касательным к местному меридиану (направленным безразлично в ту или другую сторону). Этот единичный вектор $\boldsymbol{u}$, как перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{k}$ и параллельный вертикальной плоскости $(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{k})$, будет параллелен составляющей вектора $\boldsymbol{\varkappa}$, которая расположена в экваториальной плоскости гироскопа, т. е. равен $\gamma_1\boldsymbol{i}+\gamma_2\boldsymbol{j}$; поэтому можно написать

$$\boldsymbol{u}=\frac{\gamma_1\boldsymbol{i}+\gamma_2\boldsymbol{j}}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}=\frac{\gamma_1\boldsymbol{i}+\gamma_2\boldsymbol{j}}{\sqrt{1-s^2}}. \tag{49}$$

С другой стороны, скорость вершины V, свободного конца единичного вектора $\boldsymbol{k}$, приложенного в O, определяется уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}, \tag{50}$$

так что квадрат соответствующей величины есть p^2+q^2.

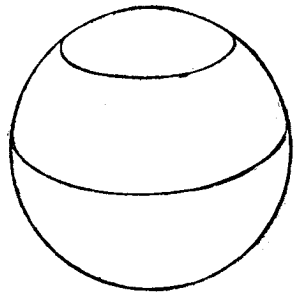
Так как по определению скалярного произведения имеем

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{\left(\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right)^2}\left(\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}\right)^2,$$

то достаточно принять во внимание равенства (49), (50) и третье из уравнений (35′), чтобы заключить, что

$$\cos^2\alpha=\frac{\dot{s}^2}{(1-s^2)(p^2+q^2)}. \tag{51}$$

Заметив это, рассмотрим один из моментов времени, когда вершина будет находиться на той или другой крайней параллели. В этот момент производная $\dot{s}$ исчезает, что соответствует максимуму или минимуму s. Поэтому если вспомним, что предположение $s_1 = -1$ или $s_2 = 1$ исключено, и, кроме того, предположим временно, что в рассматриваемый момент p и q не равны одновременно нулю, то увидим на основании формулы (51), что $\cos\alpha$ исчезает, а это означает, что *траектория вершины, вообще говоря, будет касательной к крайним параллелям в точках, в которых она попеременно достигает их* (фиг. 19).



Фиг. 19.

Остается рассмотреть исключенный выше случай, когда p и q одновременно равны нулю в тот момент, когда вершина гироскопа достигает крайней параллели. Заметим прежде всего, что до тех пор, пока вершина не достигла параллели, ее скорость при $\dot{s} \gtrless 0$ не может исчезнуть, так что p и q не могут одновременно быть равными нулю. Для того чтобы, далее, соответственно одному из двух корней $s = s_1$ или $s = s_2$ было $p = q = 0$, необходимо, чтобы для такого корня удовлетворялись на основании первых интегралов (44′), (45′) оба уравнения:

$$k - c\lambda s = 0, \quad s + h - c\lambda^2 = 0,$$

из которых следует условие

$$\frac{k}{c\lambda} = c\lambda^2 - h; \tag{52}$$

общая величина этих двух выражений как раз и дает корень, о котором идет речь, наверное, заключенный (что следует отметить) между -1 и $+1$. Далее, при условии (52) из уравнений (45′), (48) будем иметь

$$p^2 + q^2 = \frac{\rho^2}{c\lambda}(c\lambda s - k), \tag{45″}$$

$$\dot{s}^2 = \frac{\rho^2}{c\lambda}(c\lambda s - k)\{1 - s^2 - c\lambda(c\lambda s + k)\}, \tag{48″}$$

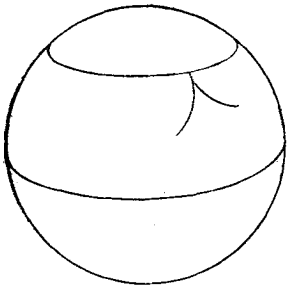
так что равенство (51) принимает в этом случае вид

$$\cos^2\alpha = 1 - c\lambda\frac{c\lambda s - k}{1 - s^2},$$

откуда заключаем, что когда s стремится к своему крайнему значению $k/c\lambda$, то $\cos\alpha$ стремится к 1, а это значит, что касательная к траектории вершины стремится расположиться ортогонально к параллели. Другими словами, при указанных условиях *траектория вершины гироскопа в точках, общих у нее с данной параллелью,*

имеет точки заострения, в которых она касается соответствующих меридианов (фиг. 20).

Важно добавить, что *такой случай может представиться только на верхней параллели.* Чтобы подтвердить это, достаточно проверить, что в рассматриваемом здесь предположении (52) $k/c\lambda$ для многочлена $f(s)$ в правой части уравнения (48′) является меньшим из двух простых корней, заключенных между -1 и $+1$. Для этой цели заметим, что множитель второй степени многочлена $f(s)$ при $s = k/c\lambda$ положителен и становится отрицательным как при $s \to -\infty$, так и при $s \to \infty$, так что он имеет два корня, один из которых меньше $k/c\lambda$, а другой больше. Далее, первый из этих двух корней является наименьшим из трех корней многочлена $f(s)$ и, конечно, будет меньше -1 (предыдущий пункт); поэтому заключаем, что в настоящем случае корень многочлена $f(s)$, который вместе с $k/c\lambda$ дает границы колебания функции s, является как раз корнем, большим $k/c\lambda$.



Фиг. 20.

До сих пор мы исключали два случая: $c\lambda = \pm k$, в которых одна из двух крайних параллелей, а именно нижняя параллель в первом случае ($s_2 = 1$) и верхняя параллель во втором случае ($s_1 = -1$), сводится к точке (соответственно южный или северный полюс).

Поступив теперь так же, как в общем случае, легко увидим, что если $c\lambda = k$ и, следовательно, $s_2 = 1$, то вершина гироскопа периодически приходит в полюс (южный) в направлении меридиана и со скоростью, необходимо отличной от нуля, так что всякий раз она продолжает свое движение и касается затем крайней параллели, соответствующей значению $s_1 > -1$.

Если, далее, будем иметь $c\lambda = -k$ и, следовательно, $s_1 = -1$, то вершина, как и в предыдущем случае, может стремиться к полюсу (северному) только в меридианном направлении, но при этом возможны два случая: или вершина действительно приходит к полюсу со скоростью, отличной от нуля, и, следовательно, продолжает свое периодическое движение, чтобы затем прийти в соприкосновение с соответствующей параллелью $s_2 < 1$, или (имея при $s_1 = -1$ двойной нуль многочлена $f(s)$ типа г) предыдущего пункта) приближается асимптотически к этому полюсу.

32. Случай кратных корней. Установившиеся движения. Возвращаясь к последнему замечанию п. 30, рассмотрим предположение, что многочлен $f(s)$ в замкнутом интервале от -1 до $+1$ допускает кратный корень.

Если исключить сначала частный случай $c\lambda = -k$, то речь может идти только о двойном корне s_0 (п. 30), изолированном в том

смысле, что многочлен $f(s)$ во всякой другой точке интервала будет отрицательным. Мы будем иметь в этом случае меростатическое движение, в котором s будет сколь угодно долго сохранять свое начальное значение s_0. Это значит, что гироскопическая ось все время будет образующей конуса вращения вокруг вертикали с углом при вершине $2\theta_0 = 2 \arccos s_0$ (или, в частности, будет совпадать с вертикалью, направленной вниз, если $c\lambda = k$ и $s_0 = 1$ есть двойной корень). Легко видеть, что движение твердого тела сведется к регулярной прецессии (т. I, гл. IV, п. 15) или, как предельный случай, к равномерному вращению вокруг гироскопической оси, направленной вертикально вниз. Действительно, из равенства $\gamma_3 = s_0$ на основании интеграла (45′) живых сил следует, что будет постоянным также $\sqrt{p^2+q^2}$, т. е. модуль e экваториальной составляющей $\boldsymbol{e}$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. С другой стороны, второе из уравнений (35′), приводящееся при постоянном γ_3 к равенству

$$\gamma_2 p - \gamma_1 q = 0,$$

выражает пропорциональность p и q величинам γ_1 и γ_2; поэтому можно написать

$$\boldsymbol{e} = \frac{e}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}\,(\gamma_1 \boldsymbol{i} + \gamma_2 \boldsymbol{j});$$

принимая во внимание, что $\boldsymbol{\varkappa} = \gamma_1 \boldsymbol{i} + \gamma_2 \boldsymbol{j} + \gamma_3 \boldsymbol{k}$, получим окончательно

$$\boldsymbol{e} = \frac{e}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}\,(\boldsymbol{\varkappa} - \gamma_3 \boldsymbol{k}).$$

На основании этого выражения экваториальной составляющей угловой скорости, последней можно придать вид

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}\,\boldsymbol{\varkappa} + \left(r_0 - \frac{e\gamma_3}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}\right)\boldsymbol{k};$$

эта формула выражает, что $\boldsymbol{\omega}$ есть сумма двух векторов: первый из них остается неизменным в пространстве и направлен вдоль вертикали, а второй остается неизменным в теле и направлен вдоль гироскопической оси. Это и доказывает, что речь идет о регулярной прецессии, причем ось гироскопа описывает конус вращения около вертикали, представляющей собой ось прецессии.

Для того чтобы движение гироскопа имело этот прецессионный характер (или характер равномерного вращения), т. е. для того, чтобы многочлен $f(s)$ в правой части уравнения резольвенты (48) имел двойной корень, необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль дискриминант многочлена $f(s)$, т. е. чтобы существовало некоторое соотношение между постоянными c, h, k, λ, или, иначе, между величинами, характеризующими структуру тела и положение

закрепленной точки, и начальными данными, которые входят в первые интегралы уравнений движения. Мы не будем формулировать здесь это условие, так как встретимся с ним немного позже, изучая непосредственно регулярную прецессию и равномерное вращение тяжелого гироскопа.

Здесь же отметим, что для того, чтобы полностью исчерпать исследование кратных корней, необходимо рассмотреть также исключенный ранее случай $c\lambda = -k$.

Из замечаний в конце п. 30 естественно следует, что в этом случае для вершины прежде всего возможны такие движения к асимптотической точке в северном полюсе, на которые мы уже имели случай указывать в предыдущем пункте и которые представляются соответственно случаю г) (двойной нуль $s_1 = -1$, сопровождаемый простым нулем s_2 внутри интервала от -1 до $+1$) всякий раз, когда начальное значение s_0 будет больше -1.

Наоборот, в предположении $s_0 = -1$, как и в трех других случаях а), б), в) п. 30, обязательно осуществляются установившиеся движения, в которых s при любом t сохраняет свое начальное значение, соответствующее кратному корню (прецессия или равномерное вращение около оси, направленной вертикально вверх).

В случае а) тройного корня $s = -1$ мы будем иметь перманентное вращение вокруг гироскопической оси, направленной вертикально вверх; как легко проверить, угловая скорость определится равенством

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{c}.$$

33. Полное определение движения. Чтобы дополнить предыдущее общее исследование, нам остается показать, что не только функция $s = \gamma_3$, получающаяся в результате интегрирования уравнения (48), но также и другие элементы движения можно вычислить посредством квадратур.

Так как r постоянно (п. 27), остается рассмотреть только p, q, γ_1, γ_2. Заметим теперь, что равенства (44′), (47), если принять во внимание также и интеграл (45′), дают возможность представить биномы $p\gamma_1 + q\gamma_2$, $-p\gamma_2 + q\gamma_1$ в функции от s, т. е. теперь уже в функции от времени; из двух полученных таким образом уравнений, которые для краткости напишем в виде

$$p\gamma_1 + q\gamma_2 = \Theta_1, \quad -p\gamma_2 + q\gamma_1 = \Theta_2, \tag{53}$$

где Θ_1, Θ_2 обозначают две известные функции от t, вводя для удобства вывода мнимые числа, получим соотношение

$$(p + iq)(\gamma_1 - i\gamma_2) = \Theta_1 + i\Theta_2,$$

которое на основании тождества

$$(\gamma_1 - i\gamma_2)(\gamma_1 + i\gamma_2) = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2$$

можно написать так:

$$p+iq=(\gamma_1+i\gamma_2)\frac{\Theta_1+i\Theta_2}{1-\gamma_3^2}. \tag{54}$$

С другой стороны, из двух первых, еще неиспользованных уравнений (35′) следует

$$\dot{\gamma}_1+i\dot{\gamma}_2=-ir(\gamma_1+i\gamma_2)+i\gamma_3(p+iq),$$

поэтому, подставляя вместо $p+iq$ его выражение (54) и деля на $\gamma_1+i\gamma_2$, получим

$$\frac{d\ln(\gamma_1+i\gamma_2)}{dt}=-ir+i\gamma_3\frac{\Theta_1+i\Theta_2}{1-\gamma_3^2}.$$

Так как правая часть есть известная функция от t, то достаточно одной квадратуры, чтобы получить выражение для $\gamma_1+i\gamma_2$, после чего, заменяя i на $-i$, мы найдем сопряженную функцию $\gamma_1-i\gamma_2$ и, следовательно, определим γ_1 и γ_2 в отдельности. После этого p и q определятся из системы линейных уравнений (53) или из уравнения (54).

Впрочем, и не определяя p, q, γ_1, γ_2, можно прямо прийти к определению в квадратурах двух других углов Эйлера φ и ψ, если известна функция $s=\cos\theta$.

Действительно, из первых двух уравнений (37) п. 22, умножая их на γ_1, γ_2, складывая почленно и принимая во внимание, что (т. I, гл. III, п. 32)

$$\gamma_1=\sin\theta\sin\varphi,\quad \gamma_2=\sin\theta\cos\varphi,$$

получим уравнение

$$p\gamma_1+q\gamma_2=\dot{\psi}(1-\gamma_3^2),$$

которое при сравнении с уравнением (44′) дает

$$\dot{\psi}=\frac{\rho(k-c\lambda\gamma_3)}{1-\gamma_3^2}=\frac{K_\zeta^0-Cr\gamma_3}{A(1-\gamma_3^2)};$$

после этого из третьего из уравнений (37) п. 22 получим

$$\dot{\varphi}=r-\dot{\psi}\gamma_3.$$

Из двух последних уравнений находим посредством квадратур выражения для φ и ψ в функциях от времени.

Следует заметить, что в частном случае, рассмотренном в предыдущем пункте, когда резольвента имеет один двойной корень и, следовательно, когда $\gamma_3=\cos\theta$ во время движения остается постоянным, предыдущие выражения для $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ дают новое доказательство прецессионного характера движения, так как эти угловые скорости постоянны.

34. Приближенные уравнения движения гироскопа при больших угловых скоростях собственного вращения. Оценивая приближенно различные члены в общих уравнениях, установленных в предыдущих пунктах, мы можем указать преобладающие члены в интегральных выражениях θ, φ, ψ, справедливых для любого движения тяжелого гироскопа (движение с нутацией), в том случае, когда гироскоп совершает быстрое вращение вокруг собственной оси.

В п. 4 мы уже указали на точный смысл, который следует вкладывать в понятие быстрого вращения. Здесь необходимо добавить, что проекция (постоянная) r угловой скорости гироскопа в течение всего времени движения будет велика не только по сравнению с двумя другими проекциями p и q, но также и по сравнению со структурной постоянной ρ, определенной из второго из равенств (46), т. е. из равенства $\rho^2 = 2Pz_0/A$.

При этом предположении, последнее из равенств (46), т. е. $r = \lambda\rho$, показывает, что и постоянную λ нужно считать очень большой; затем из интеграла (45) живых сил мы видим, что в выражении постоянной E слагаемое с r^2 преобладает над остальными, так что на основании первого и третьего из равенств (46) можно положить

$$h = c\lambda^2 + h_1, \tag{55}$$

где h_1 есть отвлеченное число, не зависящее от λ и, по предположению, очень малое по сравнению с $c\lambda^2$.

Аналогично первый интеграл (44) моментов количеств движения на основании равенств (46) можно написать в виде

$$k = c\lambda s + \ldots,$$

где ненаписанные члены не зависят от λ; отсюда получаем

$$s = \frac{k}{c\lambda} - \frac{\ldots\ldots}{c\lambda};$$

вторая дробь, числитель которой изменяется с временем, остается ничтожной по сравнению с постоянной величиной $s_0 = k/c\lambda$ в силу того, что ненаписанные члены остаются конечными и не зависят от λ *). Таким образом, мы видим, что когда гироскоп находится в быстром вращении вокруг своей оси, то ось гироскопа сохраняет приблизительно постоянный наклон к вертикали ($\cos\theta_0 = s_0$).

На основании предыдущего в качестве приближенного значения k (по крайней мере до членов, не зависящих от λ) мы примем

$$k = c\lambda s_0;$$

*) Предыдущее равенство можно написать в виде

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \frac{\ldots\ldots}{c\lambda},$$

откуда и видно, что второе слагаемое тем меньше, чем больше λ, а первое от λ не зависит. (*Прим. ред.*)

положим еще, что $s_0 \neq \pm 1$, в силу чего исключается частный случай $k = \pm ch$.

Для изучения малых отклонений угла нутации θ от постоянного значения θ_0, т. е. для изучения нутации оси гироскопа, положим

$$s = s_0 + \sigma,$$

где σ рассматривается как количество первого порядка, т. е. как количество, квадратом которого можно пренебречь.

Здесь речь идет об определении с заданным приближением закона изменения с временем этой функции σ, для чего, конечно, придется обратиться к дифференциальному уравнению (48). Если s_0, которое мы предположили не равным ± 1, есть двойной корень многочлена $f(s)$, то движение гироскопа сведется, как мы уже знаем (п. 32), к регулярной прецессии, и мы будем *строго* иметь $s = s_0$, т. е. $\sigma = 0$. Если исключить этот случай, то $\dot{s}$ не будет тождественно обращаться в нуль для решения уравнения (48), о котором здесь идет речь; продифференцировав это уравнение по t и разделив результат на $\dot{s}$, мы получим уравнение

$$\frac{2\ddot{s}}{\rho^2} = f'(s);$$

достаточно будет подставить в него $s_0 + \sigma$ вместо s и принять во внимание, что σ должно рассматриваться как величина первого порядка, чтобы получить для определения σ линейное уравнение

$$\ddot{\sigma} - \frac{1}{2}\rho^2 f''(s_0)\sigma - \frac{1}{2}\rho^2 f'(s_0) = 0.$$

Здесь необходимо уточнить значения, которые надо приписать $f'(s_0)$ и $f''(s_0)$, учитывая наш порядок приближения. Для этой цели заметим, что многочлен $f(s)$, если вместо h и k подставить их значения $c\lambda^2 + h_1$ и $c\lambda s_0$, сводится к следующему:

$$f(s) = (1 - s^2)(s + h_1) - c^2\lambda^2(s - s_0)^2.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по s и полагая после дифференцирования $s = s_0$, получим

$$f'(s_0) = 1 - 2h_1 s_0 - 3s_0^2,$$
$$f''(s_0) = -2c^2\lambda^2 - 2h_1 - 6s_0.$$

Если обозначим через $2a$ величину $f'(s_0)$, не зависящую от λ, и заметим, что в выражении $f''(s_0)$ по сравнению с первым членом $-2c^2\lambda^2$ два другие ничтожны, и, кроме того, примем во внимание, что $\rho\lambda = r$, то уравнение относительно σ можно будет написать в виде

$$\sigma'' + c^2 r^2 \sigma - a\rho^2 = 0;$$

достаточно положить

$$\sigma_1 = \sigma - \frac{a\rho^2}{c^2r^2} = \sigma - \frac{a}{c^2\lambda^2},$$

чтобы придать ему вид

$$\sigma_1'' + c^2r^2\sigma_1 = 0.$$

Это есть уравнение гармонического колебательного движения.

Но здесь, чтобы получить как можно более точный и определенный результат, лучше перейти от закона изменения σ_1, т. е., по существу, от закона изменения $\sigma = s - s_0$ к закону изменения угла нутации, который, как известно, колеблется вблизи своего среднего значения θ_0 ($s_0 = \cos\theta_0$). Введя угловое отклонение $\varepsilon = \theta - \theta_0$, которое надо рассматривать бесконечно малым, как и σ, и пренебрегая членами порядка выше первого относительно ε, будем иметь

$$s = \cos(\theta_0 + \varepsilon) = s_0 - \varepsilon\sin\theta_0$$

и, следовательно,

$$s - s_0 = \sigma = \sigma_1 + \frac{a}{c^2\lambda^2} = -\varepsilon\sin\theta_0; \tag{56}$$

поэтому (допуская возможность деления на $\sin\theta_0$ на основании предположения $s_0 = \cos\theta_0 \neq \pm 1$) можно представить угловое отклонение ε в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

где первое слагаемое

$$\varepsilon_1 = -\frac{a}{c^2\lambda^2\sin\theta_0} \tag{57}$$

является числом, зависящим от начальных постоянных, и во всяком случае очень мало вследствие наличия в знаменателе $c^2\lambda^2$, а другое слагаемое

$$\varepsilon_2 = -\frac{\sigma_1}{\sin\theta_0}, \tag{58}$$

отличаясь от σ_1 на постоянный множитель, определяется тем же линейным дифференциальным уравнением, что и для σ_1, т. е.

$$\ddot{\varepsilon}_2 + c^2r^2\varepsilon_2 = 0. \tag{59}$$

Интегрируя это уравнение и обозначая через ε_0, t_0 две постоянные, мы получим формулу

$$\theta - \theta_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_0\cos\{cr(t - t_0)\}, \tag{60}$$

которая дает искомое приближенное выражение для угла нутации, тем более точное, чем более значительным будет r. Наибольшее отклонение угла θ от его среднего значения θ_0 определяется постоянной ε_0.

Чтобы дополнить решение задачи о движении гироскопа при указанных ранее условиях, мы должны найти аналогичные выражения

для двух других углов Эйлера, ψ и φ, определяемых, как мы видели в предыдущем пункте, двумя уравнениями

$$\dot{\psi} = \frac{\rho(k - c\lambda s)}{1 - s^2}, \quad \dot{\varphi} = r - \dot{\psi} s. \tag{61}$$

Припоминая, что $k/c\lambda$ отличается от s_0 членами порядка $1/\lambda$ и что $\rho\lambda = r$, выражению $\dot{\psi}$ можно придать следующий вид:

$$\dot{\psi} = -cr\,\frac{s - s_0}{1 - s^2};$$

так как в переменном множителе числитель $s = s_0 = \sigma$ уже первого порядка, то, по крайней мере с точностью до членов высшего порядка малости, можно подставить в знаменателе s_0 вместо s. После этого, вводя угловое отклонение ε из выражения (56) для $s - s_0$ и принимая во внимание тождество $1 - s_0^2 = \sin^2\theta_0$, мы получаем окончательно

$$\dot{\psi} = \frac{cr}{\sin\theta_0}\,\varepsilon;$$

наконец, разбивая ε на два слагаемых ε_1, ε_2, определяемых из (57), (58), можно придать этому равенству вид

$$\dot{\psi} = \nu + \frac{cr}{\sin\theta_0}\,\varepsilon_2, \tag{62}$$

где для краткости через ν обозначено число, имеющее размерность угловой скорости и во всяком случае очень малое по сравнению с r, ввиду наличия сомножителя ε_1,

$$\frac{cr}{\sin\theta_0}\,\varepsilon_1 = -\frac{a}{c\lambda^2\sin^2\theta_0}\,r = -\frac{1 - 2h_1 s_0 - 3s_0^2}{2c\lambda^2\sin^2\theta_0}\,r.$$

Для интегрирования уравнения (62) удобно использовать дифференциальное уравнение (59), которому удовлетворяет ε_2, написав

$$\dot{\psi} = \nu - \frac{1}{cr\sin\theta_0}\,\ddot{\varepsilon}_2;$$

отсюда легко получается

$$\psi = \nu t - \frac{1}{cr\sin\theta_0}\,\dot{\varepsilon}_2 + \text{const},$$

или, так как $\varepsilon_2 = \varepsilon_0\cos\{cr(t - t_0)\}$,

$$\psi = \nu t + \frac{\varepsilon_0}{\sin\theta_0}\sin\{cr(t - t_0)\} + \text{const}. \tag{63}$$

Как мы видим, ψ состоит из суммы двух членов, первый из которых, пропорциональный времени, соответствует равномерному вращению оси фигуры, медленному по сравнению с гироскопическим вращением (с угловой скоростью r), а второй, периодический

(с периодом $2\pi/cr$), определяет очень малые колебания около этого прецессионного движения.

Остается, наконец, определить φ. Подставляя в выражение (61) для $\dot{\varphi}$ вместо s его среднее значение s_0, получим

$$\dot{\varphi} = r - \dot{\psi} s_0 = r - \nu s_0 + \frac{s_0}{cr \sin \theta_0} \ddot{\varepsilon}_2,$$

откуда видно, что характер изменения φ совершенно аналогичен только что определенному характеру изменения ψ; точнее, имеем уравнение

$$\varphi = (r - \nu s_0)\, t - \frac{s_0 \varepsilon_0}{\sin \theta_0} \sin cr (t - t_0) + \text{const}, \tag{64}$$

которое в первом приближении приводится к виду

$$\varphi = (r - \nu s_0)\, t + \text{const}.$$

Формулы (60), (63), (64) дают упомянутое выше приближенное аналитическое представление движения тяжелого гироскопа, обладающего большой угловой скоростью собственного вращения. Полученные здесь результаты оправдывают название *псевдорегулярной прецессии*, которое обычно дают такому движению.

Заслуживает внимания частный случай, когда в начальный момент p и q равны нулю. Это можно осуществить, удерживая сначала ось гироскопа в заданном направлении неподвижной и сообщив ему каким-либо образом быстрое вращение около этой оси; после этого надо предоставить гироскоп самому себе без толчка.

В этом случае выражение постоянной E живых сил приводится в силу интеграла энергии (45) к виду

$$E = \frac{1}{2} Cr^2 - P z_0 s_0,$$

поэтому на основании соотношений (46) имеем $h = c\lambda^2 - s_0$; следовательно, постоянная h_1, которая появляется в формуле (55), есть не что иное, как $-s_0$, и выражение для ν принимает вид

$$-\frac{1}{2c\lambda^2} r.$$

35. Равномерное вращение тяжелого гироскопа. В п. 32 мы исследовали регулярную прецессию и, как предельный случай, перманентное вращение тяжелого гироскопа. Здесь, изменяя несколько постановку задачи, мы непосредственно определим и изучим в связи с начальными условиями движения прежде всего все возможные равномерные вращения тяжелого гироскопа и затем регулярные прецессии, имеющие осью прецессии вертикаль и осью фигуры ось гироскопа. При этом следует заметить, что прямое исследование равномерных вращений тяжелого гироскопа не сводится к рассмотрению простого

частного случая, изложенного нами уже в п. 25 для аналогичной задачи относительно тяжелого тела с любой структурой, так как справедливость приведенных там рассуждений основывалась на предположении полной структурной асимметрии тела; мы увидим сейчас, что при условиях симметрии (41), принятых здесь, конус Штауде, выражающийся уравнением (39′), будет неопределенным.

В виде общих предпосылок к двум задачам, которые мы имеем здесь в виду, вспомним (пп. 22, 27), что движение тяжелого гироскопа определяется динамическим уравнением (уравнением моментов количеств движения)

$$\frac{dK}{dt} \equiv \dot{K} + \omega \times K = Pz_0 k \times \varkappa \tag{34$_1$}$$

и кинематическим уравнением

$$\frac{d\varkappa}{dt} \equiv \dot{\varkappa} + \omega \times \varkappa = 0; \tag{35}$$

при этом в соответствии с распределением масс в гироскопе предполагается

$$A = B, \quad x_0 = y_0 = 0, \tag{41}$$

и, кроме того, положительное направление оси z выбирается так, что $z_0 > 0$.

Примем также во внимание, что существует интеграл площадей

$$r = \text{const};$$

поэтому для угловой скорости ω будем иметь векторное выражение (гл. IV, п. 17)

$$\omega = \frac{1}{A} K + \frac{A-C}{A} rk \tag{65}$$

при постоянном r.

Если мы хотим теперь определить возможные равномерные вращения тяжелого гироскопа, то все сведется к тому, чтобы посмотреть, существуют ли для уравнения (34$_1$) при условиях (41) такие решения K, для которых выражение (65) вектора ω будет постоянным; неизменность угловой скорости можно выразить безразлично, как по отношению к неподвижным осям $O\xi\eta\zeta$, так и по отношению к подвижным осям $Oxyz$ (т. I, гл. IV, п. 11).

Если напишем, что производная от ω по времени, вычисленная относительно неподвижных осей, равна нулю, и примем во внимание уравнение (34$_1$) и известную формулу Пуассона

$$\frac{dk}{dt} = \omega \times k, \tag{8}$$

то придем к уравнению

$$[(A-C) r\omega - Pz_0\varkappa] \times k = 0, \tag{66}$$

из которого следует, что вектор

$$(A-C)r\boldsymbol{\omega}-Pz_0\boldsymbol{\varkappa} \tag{67}$$

для всякого возможного равномерного вращения тяжелого гироскопа должен быть параллельным вектору $\boldsymbol{k}$ или равным нулю.

Первый из этих двух случаев приводит к результату, непосредственно очевидному. Действительно, параллельность вектора (67) с единичным вектором $\boldsymbol{k}$ заключает в себе то, что этот вектор, вместе с векторами $\boldsymbol{\varkappa}$ и $\boldsymbol{\omega}$, должен оставаться неподвижным в пространстве; а так как во вращательном движении единственной неподвижной прямой является ось вращения, то отсюда следует, что эта ось совпадает в теле с гироскопической осью.

Положив

$$\boldsymbol{\omega}=r\boldsymbol{k},$$

мы приведем уравнение (66) к виду

$$Pz_0\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{k}=0,$$

откуда следует, что оба единичных вектора $\boldsymbol{\varkappa}$ и $\boldsymbol{k}$ направлены по одной и той же прямой и могут отличаться только стороной, а потому и гироскоп должен вращаться вокруг своей оси симметрии, расположенной вертикально (вверх или вниз).

Обратно, если ось гироскопа находится в этом положении, то все условия задачи удовлетворяются, как бы ни выбиралась величина r (постоянная проекция угловой скорости на направление вектора $\boldsymbol{k}=\pm\boldsymbol{\varkappa}$), так как уравнение (65) во всех случаях (т. е. при любом выборе r) определяет, при $\boldsymbol{\omega}=r\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{\varkappa}=\pm\boldsymbol{k}$, вектор $\boldsymbol{K}$, который, как это следует из вычислений, аналогичных сделанным ранее для общего случая, должен удовлетворять уравнению (34_1).

Таким образом, мы приходим к заключению, которое можно было предвидеть заранее, что тяжелый гироскоп, ось которого расположена по вертикали вверх или вниз (т. е. в одном каком-нибудь из его положений равновесия, т. I, гл. XIII, п. 23), может вращаться вокруг этой оси с произвольной постоянной угловой скоростью.

Заметив это, перейдем к исключенному ранее случаю, в котором вектор (67) будет равен нулю, т. е. положим

$$(A-C)r\boldsymbol{\omega}=Pz_0\boldsymbol{\varkappa}. \tag{68}$$

Так как отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ имеют одно и то же направление, то мы опять будем иметь вращение вокруг вертикали; поэтому если мы не хотим возвращаться к разобранному ранее случаю, гироскопическую ось надо предполагать уже не вертикальной. Положим в этом случае

$$\boldsymbol{\omega}=\nu\boldsymbol{\varkappa}, \tag{69}$$

т. е. обозначим через ν проекцию угловой скорости на вертикаль, направленную вниз (т. е. $+\omega$ или $-\omega$ в зависимости от того, будет ли

вращение правым или левым), и обозначим, как обычно, через θ постоянный угол нутации $\widehat{\varkappa k}$ (отличный от 0 и π), так что

$$r = \nu \cos \theta. \tag{70}$$

Подставляя в уравнение (68) вместо ω и r эти их выражения, мы увидим, что ν и θ связаны между собой условием

$$(A - C)\nu^2 \cos \theta = Pz_0. \tag{68'}$$

Обратно, всякий раз как два действительных числа θ и ν будут удовлетворять уравнению (68′), будет удовлетворяться благодаря равенствам (69), (70) и уравнение (68). В силу этого момент K, определенный из уравнения (65), даст решение уравнения (34_1), т. е. тяжелый гироскоп, расположенный таким образом, что его ось образует угол θ с нисходящей вертикалью, может действительно вращаться около нее с угловой скоростью ν.

Поэтому можно произвольно задавать θ или ν, лишь бы, конечно, обе эти постоянные были действительными; легко видеть, каково как в том, так и в другом случае должно быть ограничение, вытекающее из этого условия действительности.

Предположим сначала, что мы задаем угол θ, проводя внутри тела через точку O ориентированную прямую, которую мы хотим иметь в качестве оси вращения, направленной по вертикали вниз. Для того чтобы уравнение (68′) определяло соответственно угловую скорость ν действительного вращения, необходимо, чтобы оно для ν^2 давало положительное значение, т. е., так как $z_0 > 0$, чтобы было

$$(A - C)\cos \theta > 0.$$

Таким образом, мы видим, что всякая прямая в теле гироскопа, проходящая через неподвижную точку и не являющаяся экваториальной осью инерции ($\theta \gtrless \pi/2$), может быть осью перманентного вращения гироскопа, если только она направлена по вертикали *в ту сторону, которая с осью гироскопа OG образует угол* θ, *острый или тупой, смотря по тому, будет ли* $A > C$ *или* $A < C$. Другими словами, *при равномерном вращении тяжелого гироскопа* (когда его ось не является вертикалью) *центр тяжести всегда остается ниже или выше горизонтальной плоскости, проходящей через закрепленную точку, смотря по тому, будет ли симметричный эллипсоид инерции относительно точки O растянутым* ($A > C$) *или сплюснутым* ($A < C$).

Так как при всяком действительном вращении из уравнения (68′) определяется только квадрат угловой скорости ν^2, то вращение может происходить как в ту, так и в другую сторону, как и в случае тяжелого твердого тела с какой угодно структурой (п. 26).

Принимая еще во внимание уравнение (68′), можно добавить, что исключенное ранее предположение $\theta = \pi/2$ (экваториальная ось вращения), рассматриваемое как идеальный предельный случай в смысле,

разъясненном в п. 26, приводит к вращениям (обратимым) с бесконечной угловой скоростью.

Предположим теперь, что желательно задаться угловой скоростью ν. В этом случае необходимо принять во внимание, что соответствующее значение, даваемое уравнением (68′) для $\cos\theta$, должно быть заключено между -1 и $+1$ (за исключением концов), так что выбор ν остается подчиненным условию $\nu^2 > Pz_0/|A-C|$. Другими словами, во всех равномерных вращениях тяжелого гироскопа вокруг прямых, отличных от его оси, абсолютное значение угловой скорости не опускается ниже критического значения (зависящего от распределения масс в гироскопе)

$$\sqrt{\frac{Pz_0}{|A-C|}}.$$

Резюмируя, можно сказать, что *тяжелый гироскоп может совершать бесконечное множество равномерных и обратимых перманентных вращений. Все эти вращения имеют своей осью в пространстве вертикаль, проходящую через закрепленную точку. Если вдоль этой вертикали располагается гироскопическая ось, безразлично, вверх или вниз, то угловая скорость и сторона вращения остаются совершенно произвольными; всякая другая прямая в теле гироскопа, проходящая через O, может быть осью перманентного вращения только тогда, когда она располагается вдоль вертикали в одном вполне определенном из двух возможных направлений, после чего будет однозначно определено абсолютное значение соответствующей угловой скорости* (но уже не меньшее некоторого заданного критического значения).

36. Имея в виду исследование устойчивости, которым мы будем заниматься в ближайшем параграфе (§ 7), возьмем снова уравнение (48), чтобы посмотреть, каким условиям должны удовлетворять постоянные интегрирования λ, h, k, для того чтобы движение гироскопа сводилось к перманентному вращению вокруг гироскопической оси, расположенной вертикально.

В то время как величины h и k согласно их определению (п. 28) дают каждое, по крайней мере с точностью до множителя однородности, постоянные E и K_z^0 интегралов живых сил и момента количеств движения, величина $\lambda = r/\rho$ есть отношение между постоянной угловой скоростью (произвольной) r перманентного вращения и постоянной ρ, которая является характеристикой рассматриваемого гироскопа и имеет размерность угловой скорости. Поэтому, принимая это ρ за единицу угловой скорости (естественная единица для угловой скорости гироскопа), можно истолковать λ как меру угловой скорости, относящейся к перманентному вращению гироскопа. Естественно, что λ так же, как и r, можно задавать произвольно, но во всяком перманентном вращении гироскопа вокруг его вертикально располо-

женной оси $s = \cos\theta$ должно оставаться сколь угодно долго равным $+1$ или -1, смотря по тому, будет ли ось гироскопа обращена вниз или вверх. Мы знаем, что для того, чтобы уравнение (48) допускало такое решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $s = +1$ или $s = -1$ было двойным корнем при заданном значении λ многочлена f, что, как известно, выражается двумя условиями

$$f(\pm 1 \mid \lambda,\ h,\ k) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{s=\pm 1} = 0.$$

Далее, эти два уравнения можно рассматривать как систему, пригодную для определения в функции от λ значений двух других постоянных h и k, которым соответствует перманентное вращение гироскопа со скоростью $\lambda\rho$ вокруг гироскопической оси, расположенной вертикально. Обозначая через $\bar{h}$ и $\bar{k}$ эти два значения, из вышенаписанных уравнений получим

$$\bar{h} = c\lambda^2 \pm 1, \qquad \bar{k} = \pm c\lambda, \tag{71}$$

где надо брать одновременно или верхние знаки, или нижние, в зависимости от того, будет ли гироскопическая ось расположена вдоль нисходящей или вдоль восходящей вертикали.

37. Регулярная прецессия тяжелого гироскопа. Мы будем искать здесь возможные случаи регулярной прецессии тяжелого гироскопа, имеющие осью прецессии вертикаль, проходящую через закрепленную точку, и осью фигуры — гироскопическую ось. С этой целью применим снова прием, подобный тому, которому мы следовали в п. 35 при определении перманентных вращений (прием, примененный в п. 35, мог бы войти как частный случай в настоящее исследование).

Положим поэтому

$$\boldsymbol{\omega} = \mu \boldsymbol{k} + \nu \boldsymbol{\varkappa}, \tag{72}$$

т. е. обозначим через μ и ν постоянные составляющие $\boldsymbol{\omega}$ по гироскопической оси и нисходящей вертикали или, как мы будем здесь говорить, *собственную угловую скорость* и *угловую скорость прецессии тела*. Подставляя выражение (72) в уравнение (65) и разрешая его относительно момента $\boldsymbol{K}$, найдем

$$\boldsymbol{K} = (A\mu - [A - C]\, r)\, \boldsymbol{k} + A\nu\boldsymbol{\varkappa}, \tag{73}$$

так что все сводится к ответу на вопрос, можно ли удовлетворить таким значением для $\boldsymbol{K}$ динамическому уравнению (34_1) движения тяжелого гироскопа, если r, μ и ν являются постоянными.

Выполняя подстановку (73) в это уравнение и принимая во внимание равенство (72) и тождества $d\boldsymbol{\varkappa}/dt = 0$, $\dot{\boldsymbol{k}} = 0$, найдем

$$\{(A\mu - [A - C]\, r)\, \nu + Pz_0\}\, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\varkappa} = 0;$$

а так как во всякой регулярной прецессии, не сводящейся к простому равномерному вращению вокруг гироскопической оси, эта ось (с единичным вектором $\mathbf{k}$) не может находиться в вертикальном положении, то предыдущее векторное уравнение равносильно такому скалярному соотношению:

$$(A\mu - [A - C]\, r)\nu + Pz_0 = 0. \tag{74}$$

Здесь следует явно выделить, кроме физических параметров гироскопа A, C, P, z_0, также и характеристические параметры прецессии, которые определяются, кроме угловых скоростей μ и ν, еще и постоянным углом θ нутации оси гироскопа. Для этой цели достаточно заметить, что на основании уравнения (72) проекция r вектора $\boldsymbol{\omega}$ на направление $\boldsymbol{k}$ определяется равенством

$$r = \mu + \nu \cos\theta,$$

так что, подставляя это значение r в соотношение (74), мы придадим ему окончательный искомый вид

$$(A - C)\,\nu^2 \cos\theta - C\mu\nu - Pz_0 = 0. \tag{74'}$$

Это и есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы параметры μ, ν, θ определяли для данного тяжелого гироскопа регулярную прецессию. Таким образом, мы видим, что каждый из трех параметров μ, ν, θ определяется значениями двух других; при этом, однако, важно ответить на вопрос, в каких пределах можно выбирать произвольно два из этих параметров.

Так как уравнение (74′) квадратное относительно ν и линейное относительно μ и $\cos\theta$, то прежде всего ясно, что вполне произвольно можно задавать угловую скорость прецессии ν и угол нутации θ, после чего уравнение (74′) дает вполне определенное (даже и по знаку) значение для угловой скорости μ собственного вращения.

Наоборот, произвольный выбор двух угловых скоростей μ и ν подчинен тому условию, чтобы вполне определенное и единственное значение для $\cos\theta$, которое получается из уравнения (74′), было заключено между -1 и $+1$ (за исключением концов); другими словами, требуется, чтобы было

$$\left| \frac{\nu^2 (A - C)}{C\mu\nu + Pz_0} \right| > 1.$$

Наконец, если желательно задать μ и θ, то необходимо это сделать так, чтобы оба корня уравнения (74′) второй степени относительно ν были действительными; для этого необходимо и достаточно, чтобы соответствующий дискриминант не был отрицательным, т. е. чтобы было

$$C^2\mu^2 + 4\,(A - C)\,Pz_0 \cos\theta \geqslant 0. \tag{75}$$

Это условие будет удовлетворено *при любом выборе собственной угловой скорости, даже когда она будет и очень мала*, если будет выполнено условие

$$(A-C)\cos\theta>0,$$

т. е. когда (п. 35) гироскопическая ось будет расположена так, чтобы образовывался острый или тупой угол с нисходящей вертикалью, в зависимости от того, будет ли эллипсоид вращения инерции относительно O растянутым или сплюснутым. В этом случае, если делается предельное предположение, допустимое само по себе, чтобы собственная угловая скорость μ была просто равна нулю, мы придем к равномерному вращению около вертикальной оси с угловой скоростью ν, вполне определенной по абсолютной величине; существование такого вращения мы установили прямым путем в упомянутом п. 35.

Если же, наоборот, будем иметь

$$(A-C)\cos\theta\leqslant 0,$$

то уравнение (75) накладывает на произвольный выбор собственной угловой скорости гироскопа μ ограничение

$$|\mu|\geqslant\frac{2}{C}\sqrt{Pz_0|(A-C)\cos\theta|}.$$

Во всяком случае, как бы ни выбирался угол θ, достаточно, чтобы угловая скорость μ имела надлежащую величину или была очень велика (как это и бывает в конкретных задачах, имеющих большой интерес), чтобы соответствующее уравнение второй степени (74′) допускало два действительных различных корня ν_1 и ν_2; легко видеть, что в предположении очень большого значения для μ один из этих двух корней будет тоже очень велик (т. е. порядка μ), а другой — очень мал (т. е. порядка μ^{-1}). Действительно, положив для краткости

$$4(A-C)Pz_0\cos\theta=C^2\delta,$$

где δ не зависит от μ, получим для корней уравнения (74′) два значения

$$\nu=\frac{\mu C}{2(A-C)\cos\theta}\left\{1\pm\left(1+\frac{\delta}{\mu^2}\right)^{1/2}\right\},$$

или же, разделив корни и предположив ничтожно малыми степени μ^{-1} с показателем, бо́льшим 1, получим

$$\nu_1=\frac{C\mu}{(A-C)\cos\theta},\quad \nu_2=-\frac{C\delta}{4(A-C)\cos\theta}\mu^{-1}=-\frac{Pz_0}{C}\mu^{-1}.$$

Следует заметить, что это приближенное значение ν_2 меньшего корня можно было бы найти также и прямо из уравнения (74′), пренебрегая в нем членом с ν^2.

Кинематическое истолкование очевидно: *какова бы ни была полупрямая, проходящая через точку O, неизменно связанная с телом*

(и отличная от гироскопической оси), которая (в данный момент) совпадает с вертикалью (и направлена вниз или вверх), для гироскопа возможны при всяком достаточно большом значении угловой скорости μ собственного вращения две различные регулярные прецессии вокруг этой полупрямой, для которых прецессионное вращение является быстрым в первом случае (ν того же порядка, что μ) *и медленным во втором* (ν порядка μ^{-1}).

Для этой последней прецессии произведение $\mu\nu_2 \cos\theta$ будет приблизительно равно

$$-\frac{Pz_0}{C}\cos\theta,$$

так что, вспоминая признак (уже упоминавшийся в п. 14) из т. I (гл. IV, п. 17), по которому прецессии делятся на прямые и обратные, мы увидим, что прецессия с медленным прецессионным вращением будет прямой или обратной, в зависимости от того, будет ли $\cos\theta$ меньше или больше нуля, т. е. смотря по тому, будет ли центр тяжести G выше или ниже горизонтальной плоскости, проходящей через O.

Наоборот, для прецессии с быстрым прецессионным вращением произведение $\nu\mu_1 \cos\theta$ принимает приблизительно то же самое значение

$$\frac{C\mu^2}{A-C},$$

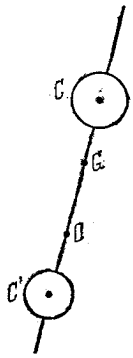
как и в регулярной прецессии в движении по Пуансо (п. 14), и имеет поэтому знак, зависящий исключительно от структурных постоянных. Отсюда следует, что для заданного гироскопа прецессии с быстрым прецессионным вращением будут все одного и того же вида (какова бы ни была прямая в теле, приводимая в совпадение с вертикалью); точнее, все прецессии будут прямыми, если эллипсоид инерции относительно точки O будет удлиненным ($A>C$), и все они будут обратными, если этот эллипсоид будет сплюснутым ($A<C$).

Наконец, можно отметить, что при исключавшемся до сих пор предположении, что $z_0=0$, т. е. что гироскоп закреплен в его центре тяжести, предыдущие рассуждения приведут опять к регулярной прецессии по инерции (п. 14). Сравнивая уравнение (74′) с уравнением (24) п. 14, мы увидим, что эти регулярные прецессии по инерции непрерывно переходят, в предположении $z_0 \neq 0$, в прецессии с быстрым ($\nu \to \infty$) прецессионным вращением.

38. Гироскопические весы. Существование регулярных прецессий с медленным прецессионным вращением как прямым, так и обратным может быть проверено экспериментально на так называемых *гироскопических весах*. Они состоят из твердого стержня, укрепленного при помощи карданова подвеса в одной из своих точек O (фиг. 21), и двух

тяжелых тел вращения C и C', укрепленных на стержне, как на оси, с противоположных сторон его точки O, один из которых, например C, неизменно связан со стержнем, тогда как другой можно закреплять на стержне на каком угодно расстоянии от O. Поэтому, перемещая надлежащим образом тело C' вдоль стержня, можно по желанию сделать так, что центр тяжести всей системы, всегда лежащий на оси симметрии (общей для стержня и для двух тел C и C'), будет лежать по ту или другую сторону от O.

Расположив стержень по наклонной прямой, например так, чтобы диск C был вверху, приведем диски в быстрое вращение около их осей и предоставим систему самой себе *). Тогда мы увидим, что вся система медленно поворачивается вокруг вертикали в ту же сторону, в которую происходит и собственное вращение, или в противоположную, смотря по тому, будет ли центр тяжести выше или ниже закрепленной точки.



Фиг. 21.

39. Регулярные прецессии, определенные в п. 37 для тяжелого гироскопа, зависят от двух произвольных параметров, например μ и ν. Но в совокупности ∞^6 возможных движений на самом деле прецессий насчитывается ∞^4, так как произвольными остаются, кроме μ и ν, начальная ориентация тела относительно его гироскопической оси (угол φ) и начальная долгота этой оси (угол ψ). Это подтверждается и формальными соображениями; вспоминая, что любая регулярная прецессия характеризуется тем, что остаются постоянными величины θ, $\dot{\varphi} = \mu$, $\dot{\psi} = \nu$, и принимая во внимание, что θ связано с μ и ν уравнением (74'), мы видим, что из шести начальных значений, θ, φ, ψ, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, остаются произвольными четыре: φ, ψ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$.

40. Мгновенное возмущение прецессии. Непосредственный эффект изменения угловой скорости прецессии. Два характеристических соотношения, $\theta = 0$ и (74'), которым должны удовлетворять в начальный момент параметры, для того чтобы движение тяжелого гироскопа, определяемое ими, было регулярной прецессией, будут удовлетворяться и в любой момент в течение всего времени движения. Но если в заданный момент t_0 в силу какой-нибудь внешней причины движение внезапно будет возмущено или, точнее, эти два соотношения в следующий момент не будут удовлетворяться, то движение гироскопа перестанет быть регулярной прецессией и перейдет в более общий

---

[1]) Стержню надо еще сообщить угловую скорость ν прецессии в начальный момент, чтобы было выполнено условие регулярной прецессии, которое остается в силе и для начального момента.

Если же систему предоставить самой себе без толчка ($\nu = 0$), то мы будем наблюдать псевдорегулярную прецессию. (*Прим. ред.*)

вид движения с нутацией, которое было рассмотрено в п. 31; при этом гироскопическая ось, вращаясь постоянно вокруг вертикали, начнет периодически колебаться между двумя крайними углами наклона.

Чтобы иметь особенно простой случай, рассмотрим, например, волчок с центром тяжести выше закрепленной точки, совершающий прямую регулярную прецессию с быстрым собственным и с медленным прецессионным вращением (п. 37). Представим себе, что в некоторый момент t_0 внезапно заставляют измениться угловую скорость прецессии $\dot{\psi} = \nu$, оставляя неизменными θ, φ, ψ, $\dot{\theta} = 0$, а также и гироскопическую скорость $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$, что влечет за собой соответствующее одновременное изменение угловой скорости $\dot{\varphi} = \mu$. Интуитивно понятно, как можно получить этот эффект, сообщив, например, рукою толчок оси волчка; динамическое оправдание такой постановки задачи мы отложим до теории импульсивного движения (гл. XII, § 2).

Допустив здесь возможность с физической точки зрения такого внезапного изменения величины $\dot{\psi} = \nu$ и вследствие этого одновременного изменения величины $\dot{\varphi} = \mu$, мы постараемся определить непосредственный эффект этого изменения и объяснить следующее явление, которое может быть проверено экспериментально: если импульс действует в сторону прецессионного движения, то гироскопическая ось тотчас же обнаруживает стремление выпрямиться, т. е. приблизиться к вертикали (подняться вверх), если же он действует в противоположную сторону, то ось тотчас же стремится опуститься.

Все исследование сводится к тому, чтобы определить знак, который имеет $\ddot{\gamma}_3$ в возникающем движении (возмущенном), начиная от момента t_0, причем в установившемся прецессионном движении $\ddot{\gamma}_3 = 0$, так как в этом случае $\gamma_3 = \cos\theta = \text{const}$.

Третье из кинематических уравнений (35′)

$$\dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p$$

после дифференцирования по t дает

$$\ddot{\gamma}_3 = \dot{\gamma}_1 q - \dot{\gamma}_2 p + \gamma_1 \dot{q} - \gamma_2 \dot{p};$$

поэтому, подставляя вместо первых производных выражения, даваемые теми же уравнениями (35′) и уравнениями Эйлера из п. 27, и принимая во внимание, что

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \sin^2\theta,$$

мы придем к уравнению

$$\ddot{\gamma}_3 = \frac{C}{A} r (p\gamma_1 + q\gamma_2) + \frac{Pz_0}{A}\sin^2\theta - (p^2 + q^2)\cos\theta. \qquad (76)$$

В частном случае регулярной прецессии имеем

$$p = \nu\gamma_1, \quad q = \nu\gamma_2, \quad r = \nu\gamma_3 + \mu,$$

и, следовательно,

$$p\gamma_1 + q\gamma_2 = \nu \sin^2\theta, \quad p^2 + q^2 = \nu^2 \sin^2\theta;$$

подставляя в уравнение (76) и принимая во внимание, что должно быть $\ddot{\gamma}_3 = 0$, мы приходим к соотношению

$$0 = \sin^2\theta \left(\frac{C}{A} r\nu + \frac{Pz_0}{A} - \nu^2 \cos\theta\right), \tag{76'}$$

из которого, между прочим, снова можно получить известное условие (74′).

Но так как в момент t_0 производится возмущение, благодаря которому при остающихся неизменными θ и r угловая скорость прецессии ν увеличивается на некоторую величину $\Delta\nu$, то можно сказать, что в возмущенном движении начальное значение $\ddot{\gamma}_3$, если обозначить через $F(\nu)$ квадратный трехчлен относительно ν в правой части равенства (76′), определяется равенством

$$\ddot{\gamma}_3 = F(\nu + \Delta\nu),$$

или, если раскрыть правую часть и принять во внимание, что $F(\nu) = 0$,

$$\ddot{\gamma}_3 = \Delta\nu \sin^2\theta \left[\frac{C}{A} r - (2\nu + \Delta\nu)\cos\theta\right]. \tag{76''}$$

Так как, по предположению, угловая скорость r значительно превосходит ν и $\Delta\nu$, то отсюда видим, что знак у $\ddot{\gamma}_3$ вначале одинаков со знаком $\Delta\nu$. В этом первоначальном совпадении знаков как раз и заключается объяснение указанного выше явления. Действительно, если, имея в виду опять волчок (центр тяжести которого лежит выше закрепленной точки), предположим для определенности, что в рассматриваемой прецессии угловая скорость μ, по предположению, очень велика и положительна, то угловая скорость ν вследствие прямого характера прецессии так же, как и $\cos\theta$, отрицательна; поэтому для увеличения скорости прецессии необходимо дать угловой скорости ν отрицательное приращение $\Delta\nu$. На основании уравнения (76″) и начальное значение $\ddot{\gamma}_3$ будет отрицательным, откуда следует, что $\gamma_3 = \cos\theta$ в момент t_0 начинает уменьшаться; это означает, что угол нутации θ вначале возрастает, т. е. гироскопическая ось стремится приблизиться к восходящей вертикали. Если, наоборот, возмущение замедляет прецессию, т. е. если $\Delta\nu > 0$, то γ_3 начинает увеличиваться, а ось гироскопа стремится опуститься.