

регулярной прецессии σ , так что прецессия дает здесь типичный пример практической устойчивости, тогда как теоретически мы имеем здесь случай неустойчивости.

Это замечание дает теоретическое объяснение одному факту, который легко установить экспериментальным путем. Если, приведя волчок в очень быстрое вращательное движение вокруг оси симметрии, мы закрепим одну точку этой оси (например, поместим конец оси волчка на подходящую опору в виде чашечки) и затем предоставим волчок самому себе в каком-нибудь начальном положении, в котором ось симметрии образует с вертикалью какой-нибудь угол θ , то движение, которое получит волчок, будет иметь все признаки регулярной прецессии (с медленным прецессионным вращением), хотя начальные условия движения не удовлетворяют строго характеристическому условию (74') регулярной прецессии. Действительно, гирокопическая скорость μ (по предположению, очень большая) и угол нутации θ заданы произвольно; а так как в начале движения волчок предоставлен самому себе, то начальные постоянные p_0, q_0 обе равны нулю или, точнее (если мы хотим учесть бесчисленные физические обстоятельства, которые, ускользая от нашего прямого контроля, неизбежно влияют на опыт), обе очень малы, но не зависят от произвольного выбора μ и θ . Такой же будет вначале и угловая скорость v , и нет решительно никакого основания, чтобы эта угловая скорость, очень малая, если не прямо равная нулю, и зависящая от случайных причин, была такой, чтобы при произвольных значениях μ и θ удовлетворять условию (74').

Несмотря на это, мы имеем здесь согласие между теоретическим предвидением и опытом, поскольку случайное значение v , сколь бы мало оно ни было, близко к угловой скорости v прецессии (с медленным прецессионным вращением); поэтому на основании изложенных выше соображений действительное движение волчка не может заметно отличаться от этой регулярной прецессии. Мы имеем здесь, таким образом, псевдорегулярную прецессию (см. п. 34).

§ 8. Стереонодальные и натуральные уравнения и приложения

46. Система ориентировки с подвижными осями в теле. В предыдущих параграфах мы показали с различных точек зрения, насколько выигрывает в смысле дедуктивной простоты и пригодности к выражению конкретных вопросов уравнение моментов количеств движений (относительно центра приведения O , закрепленного или совпадающего с центром тяжести), когда вместо галилеевых осей $\Omega\xi\eta\zeta$ мы обращаемся к осям $Oxuz$, неизменно связанным с телом (*уравнения Эйлера*).

Но в некоторых задачах динамики твердого тела в согласии с тем, что говорилось в общем случае в п. 3 предыдущей главы, оказывается удобным относить основные уравнения к осям, движущимся не только в пространстве, но также и в теле. Закон движения этих осей, смотря по обстоятельствам, выбирается наиболее подхо-

дящим образом к природе задачи, которую требуется разобрать. Мы рассмотрим здесь два частных выбора такой подвижной системы, каждый из которых приводит к замечательной форме динамических уравнений для всякого твердого тела с гироскопической структурой.

К этим формам мы придем, проектируя на подвижные оси второе основное уравнение. Если за центр приведения моментов выбирается закрепленная точка (или, при движении свободного твердого тела, центр тяжести), то уравнение это примет (п. 3 предыдущей главы) вид

$$\dot{K} + \omega' \times K = M, \quad (81)$$

где символы имеют обычное значение и, в частности, ω' обозначает угловую скорость (абсолютную) уже не твердого тела, а подвижной системы осей (в пространстве и в теле). За начало O этой системы принимается, как обычно, сам центр приведения моментов (закрепленный или совпадающий с центром тяжести).

Далее, ясно, что относительно осей, подвижных внутри тела, ни моменты, ни произведения инерций, вообще говоря, уже не будут более постоянными, так что при таком выборе осей теряются те выгоды формальной простоты выражений для проекций момента K , которые мы имели в случае осей, неизменно связанных с телом и представляющих собой главные оси инерции твердого тела. Однако существуют некоторые замечательные с механической точки зрения случаи, когда моменты и произведения инерции сохраняются постоянными *даже и по отношению к осям, движущимся относительно тела*. Типичный пример этого мы имеем в случае тела, имеющего гироскопическую структуру относительно его неподвижной точки.

Если за ось z возьмем гироскопическую ось и за начало — точку O , то всякая пара осей $Ox'y'$, взаимно перпендикулярных и перпендикулярных к z , определяет систему $Ox'y'z$ главных осей инерции, относительно которых, как бы ни вращались эти оси вокруг Oz , будут постоянными (главными) моменты инерции $A = B$ и C и останутся в силе соотношения между проекциями векторов K и ω

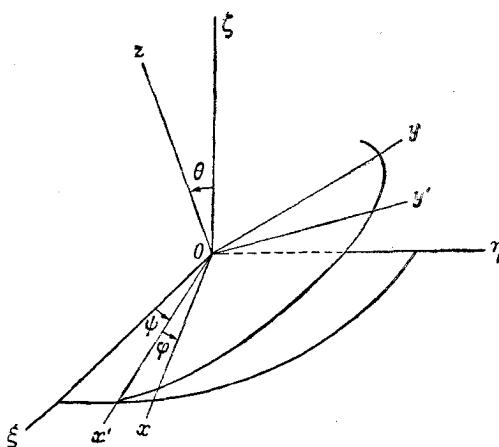
$$K_x = Ap, \quad K_y = Aq, \quad K_z = Cr, \quad (82)$$

где p, q, r обозначают проекции угловой скорости (абсолютной) ω твердого тела на подвижные оси $Ox'y'z$ (но уже не на подвижные оси, неизменно связанные с твердым телом, как это было в предыдущих параграфах).

В следующем пункте и в п. 51 мы покажем, как следует задать закон вращения системы отсчета $Ox'y'z$ вокруг оси z (неизменно связанный с телом), чтобы прийти, в случае тела с гироскопической структурой, к двум упоминавшимся выше формам динамических уравнений.

47. Стереонодальные уравнения. К одной из систем подвижных осей, о которых говорилось в предыдущем пункте, мы придем, если обратимся к вспомогательным осям, введенным при определении углов Эйлера φ, θ, ψ (т. I, гл. III, п. 32). Вспомним, что одна из этих систем осей, которая обозначена через $Ox'y'z$, имеет третью ось, совпадающую с осью z , неизменно связанный с телом, и ось x' , расположенную *вдоль линии узлов* (общий перпендикуляр к осям ζ и z , ориентированный таким образом, чтобы вращение от ζ к z на острый

угол было правым) (фиг. 22); эту систему осей можно получить из системы $Oxuz$, неизменно связанной с телом, одним вращением вокруг оси z на величину, равную второму углу Эйлера (или углу собственного вращения) с обратным знаком, т. е. $-\varphi$. Оси $Ox'y'z$, подвижные как в пространстве, так и в теле, можно назвать стереонодальными, так как ось z неподвижна в теле, а ось x' в любой момент совпадает с линией узлов двух систем осей, неподвижных в теле и в пространстве.



Фиг. 22.

Так как нам нужно спроектировать уравнение (81) на оси $Ox'y'z$, то мы должны здесь прежде всего получить проекции на эти подвижные оси двух угловых скоростей ω и ω' соответственно твердого тела и осей $Ox'y'z$ в их движении относительно осей, имеющих неизменные направления в пространстве. Обозначим проекции векторов ω и ω' на оси $Ox'y'z$ соответственно через p, q, r, p', q', r' и заметим прежде всего, что разность $\omega - \omega'$ есть угловая скорость твердого тела относительно стереонодальных осей. Поэтому, вспоминая только что сделанное замечание о вращении этих последних осей относительно осей, неподвижных в теле, и обозначая через k единичный вектор (неподвижный в теле) оси z , будем иметь

$$\omega' = \omega - \dot{\varphi}k. \quad (83)$$

Отсюда следует, что достаточно дать явную форму одному из двух векторов ω или ω' . Так как стереонодальные оси являются в некотором роде более близкими к осям с неизменными направлениями, чем оси, неподвижные в теле, то можно предполагать, что выражения проекций p', q', r' вектора ω' будут более простыми, чем аналогичные проекции p, q, r вектора ω . Действительно, стереонодальные оси по отношению к осям с неизменными направлениями имеют общими с осями,

неподвижными в теле, угол нутации θ и угол прецессии ψ , тогда как угол собственного вращения φ равен нулю, так что на основании уравнений (22) из п. 10, упоминавшихся в п. 22 (ср. т. I, гл. III, п. 32), направляющие косинусы оси ζ относительно осей $Ox'y'z$ будут определяться равенствами

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \sin \theta, \quad \gamma_3 = \cos \theta, \quad (84)$$

и формулы (6) (т. I, гл. III, п. 34), упоминавшиеся в п. 1, примут вид

$$p' = \dot{\theta}, \quad q' = \dot{\psi} \sin \theta, \quad r' = \dot{\psi} \cos \theta. \quad (85)$$

Отсюда и из равенства (83), которое в проекциях на оси $Ox'y'z$ дает

$$p' = p, \quad q' = q, \quad r' = r - \dot{\varphi}, \quad (86)$$

получается соотношения

$$p = \dot{\theta}, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \quad (87)$$

В большинстве случаев, как мы это уже видели в предыдущих параграфах, неудобно с самого начала исключать из основных уравнений вспомогательные неизвестные, выражая все через основные неизвестные θ , φ , ψ . Вообще говоря, выгоднее оставлять в уравнениях до тех пор, пока это можно, те величины, которые наиболее наглядно характеризуют явление; в данном случае это относится к угловой скорости ω твердого тела. Мы будем придерживаться этого правила во всех дальнейших рассуждениях, относящихся к твердому телу, которое имеет гирокопическую структуру относительно какой-нибудь его точки O , остающейся неподвижной (или совпадающей с центром тяжести).

Отнесем твердое тело к стереонодальной системе осей $Ox'y'z$, соответствующей заданной системе с неизменными направлениями $O\zeta\eta\zeta$ и заданной системе осей $Oxuz$, неподвижных в теле, где, как обычно, O есть неподвижная точка, а z — гирокопическая ось. Хотя оси Ox' , Oy' и вращаются внутри тела, однако стереонодальная система осей всегда будет состоять из главных осей инерции; поэтому, как это уже отмечалось в предыдущем пункте, мы будем иметь

$$K_{x'} = Ap, \quad K_{y'} = Aq, \quad K_z = Cr, \quad (82)$$

или, в более сжатой форме,

$$K = Ae + Crk.$$

Проектируя основное уравнение (81) на оси $Ox'y'z$ и имея в виду при проектировании векторного произведения $\omega' \times K$ формулы (82)

и (86), мы получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} A\dot{p} - (A - C)qr + A\dot{\phi}q &= M_{x'}, \\ A\dot{q} + (A - C)pr - A\dot{\phi}p &= M_{y'}, \\ Cr &= M_z. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Эти уравнения и уравнения, которые выводятся из них путем подстановки вместо p , q , r их выражений (87), мы будем называть *стереонодальными уравнениями* движения тела с гирокопической структурой.

В случае тяжелого гирокопа, если мы выберем в качестве оси ζ вертикаль, направленную вниз, и через \mathbf{x} обозначим ее единичный вектор, то момент

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{POG} \times \mathbf{x} \quad (89)$$

единственной активной силы, т. е. веса, на основании уравнений (84) будет иметь проекциями

$$M_{x'} = -Pz_0 \sin \theta, \quad M_{y'} = M^z = 0,$$

где z_0 есть третья стереонодальная координата (постоянная) центра тяжести, так что первое из уравнений (88) на основании соотношений (87) примет вид

$$A\dot{\theta} + (Cr - A\dot{\psi} \cos \theta) \dot{\psi} \sin \theta + Pz_0 \sin \theta = 0. \quad (90)$$

48. Мгновенное возмущение регулярной прецессии тяжелого гирокопа. Действие добавочной пары, момент которой направлен по линии узлов. Чтобы дать непосредственное приложение стереонодальных уравнений, вернемся к рассуждениям п. 40. Рассмотрим тяжелый гирокоп, например волчок, совершающий регулярную прецессию, и представим себе, что в данный момент t_0 это движение возмущается добавлением пары, действующей в плоскости, перпендикулярной к линии узлов, с моментом N (положительным или отрицательным). Это вызовет движение волчка общего типа, т. е. движение с нутацией (п. 31); мы рассмотрим здесь движение за малый промежуток времени, непосредственно следующий за моментом t_0 .

Из стереонодальных уравнений тяжелого гирокопа изменится только первое, т. е. уравнение (90); оно примет вид

$$A\ddot{\theta} + (Cr - A\dot{\psi} \cos \theta) \dot{\psi} \sin \theta + Pz_0 \sin \theta - N = 0. \quad (90')$$

Так как в момент t_0 , когда внезапно начинает действовать добавочная пара, различные характеристические элементы движения имеют значения, соответствующие регулярной прецессии, в которой $\theta = \text{const}$, то для них в силу уравнения (90) имеет место условие

$$(Cr - A\dot{\psi} \cos \theta) \dot{\psi} \sin \theta + Pz_0 \sin \theta = 0,$$

которое, если положить в нем $\dot{\psi} = v$, $r = \mu + v \cos \theta$ и сократить на $\sin \theta$, будет тождественно с уравнением (74'), характерным для прецессий (п. 37); поэтому на основании уравнения (90') начальное значение $\ddot{\theta}$, начиная с момента t_0 , определяется равенством

$$\ddot{\theta} = \frac{N}{A}.$$

Таким образом, мы видим, что угловое ускорение $\ddot{\theta}$ сначала принимает знак момента N ; это находится в согласии с обычным представлением, что гирокопическая ось как бы подчиняется добавочному импульсу, поскольку она стремится подняться вверх, если N положительно, и опуститься вниз, если N отрицательно.

Для пояснения этого заключения предположим, что добавочная пара осуществляется посредством увеличения или уменьшения веса. Вслед за увеличением веса, что соответствует отрицательному значению N , в последующем движении с нутацией произойдет опускание оси, тогда как уменьшение веса, соответствующее положительному значению N , вызовет сначала поднятие оси.

49. Геометрические сведения о сферических кривых. Чтобы прийти ко второй форме уравнений движения тела с гирокопической структурой, упоминавшейся в п. 46, необходимо обратиться к рассмотрению траектории, описываемой вершиной (см. п. 31). Речь идет о кривой, описываемой на сфере, имеющей центр в закрепленной точке и радиус, равный 1. Для того чтобы облегчить вывод уравнений, которые мы имеем в виду, установим предварительно некоторые геометрические формулы, относящиеся к сферическим кривым. Чтобы остаться в тех же условиях, в которых нам придется их применять, мы предположим, что радиус сферы равен 1. Заметим, что последнее предположение не нарушает общности того, о чем мы будем говорить.

Рассматривая поэтому любую кривую C , проведенную на сфере с центром в O и радиусом, равным 1, обозначим через s криволинейную абсциссу текущей точки V кривой C и положим

$$\mathbf{k} = \overrightarrow{OV}, \quad t = \frac{d\mathbf{k}}{ds}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{k} \times t; \quad (91)$$

в силу этого \mathbf{k} представляет собой единичный вектор, нормальный в точке V к сфере и направленный наружу, t есть единичный вектор, касательный к кривой C в точке V и направленный в сторону возрастающих дуг s , и \mathbf{v} тот единичный вектор, нормальный к C в точке V , который лежит в касательной плоскости к сфере и направлен влево относительно наблюдателя, стоящего на внешней стороне сферы и смотрящего на кривую C в направлении возрастающих s .

Указанная здесь тройка единичных векторов является ортогональной и правой, так что, в частности, имеем

$$\mathbf{v} \times \mathbf{k} = t. \quad (92)$$

Вектор dt/ds , который, как мы знаем (т. I, гл. I, п. 74), дает направление главной нормали, перпендикулярен к t , так что можно написать

$$\frac{dt}{ds} = \gamma \mathbf{v} + \gamma_1 \mathbf{k}, \quad (93)$$

где составляющие γ , \mathbf{v} , $\gamma_1 \mathbf{k}$ имеют известное геометрическое значение, которое мы уточним в ближайшем пункте; но для имеющихся в виду приложений нам достаточно будет обратить внимание лишь на то, что γ есть функция от s , характеризующая в некотором роде ход сферической кривой.

Для этой цели заметим, что, дифференцируя третью из уравнений (91) и принимая во внимание второе из них, а также уравнения (93) и (92), найдем

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = -\gamma t. \quad (94)$$

50. Чтобы уточнить геометрическое значение только что упомянутых скалярных величин γ и γ_1 , заметим, что в силу первой формулы Френе (т. I, гл. I, п. 80) уравнение (93) можно записать в виде

$$c\mathbf{n} = \gamma \mathbf{v} + \gamma_1 \mathbf{k}, \quad (93')$$

где \mathbf{n} обозначает единичный вектор главной нормали (направленной к центру кривизны) и c (первую) кривизну кривой C .

Таким образом, мы видим, что величины γ , γ_1 получатся путем проектирования на направления векторов \mathbf{v} и \mathbf{k} кривизны кривой C в точке V , отложенной в направлении вектора \mathbf{n} , так что, полагая $\widehat{\mathbf{k}}\mathbf{n} = \psi$ и, следовательно, $\widehat{\mathbf{v}}\mathbf{n} = \psi + \pi/2$, получим

$$\gamma = -c \sin \psi, \quad \gamma_1 = c \cos \psi. \quad (95)$$

Далее, из анализа известно, что γ есть геодезическая кривизна такой сферической кривой, а γ_1 на основании формулы Мене можно истолковать как кривизну сечения сферы с плоскостью $\mathbf{k}t$. Так как это сечение представляет собой большой круг, то необходимо

$$\gamma_1 = \pm 1;$$

достаточно вспомнить, что центр кривизны кривой C лежит по отношению к касательной плоскости к сфере с той же самой стороны от центра сферы, так что угол $\widehat{\mathbf{k}}\mathbf{n} = \varphi$ не может уже быть острым, чтобы заключить, что

$$\gamma_1 = c \cos \psi = -1.$$

Поэтому на основании первого из уравнений (95) будем иметь

$$\gamma = \operatorname{tg} \psi, \quad (96)$$

и уравнение (93) можно будет написать в виде

$$\frac{dt}{ds} = \operatorname{tg} \psi \cdot v - k. \quad (93')$$

Следует добавить (хотя это и не является необходимым для дальнейшего) следующие замечания.

Разлагая единичный вектор бинормали b по направлениям компланарных с ним векторов v и k и принимая во внимание, что $\hat{v}b = \psi + \pi$, $\hat{k}b = \psi + \pi/2$, найдем

$$b = -\cos \psi \cdot v - \sin \psi \cdot k;$$

поэтому, дифференцируя по s и принимая во внимание определение вектора t и (94), (96), мы придем к уравнению

$$\frac{db}{ds} = (\sin \psi v - \cos \psi k) \frac{d\psi}{ds} = -n \frac{d\psi}{ds},$$

которое при сравнении с третьей формулой Френе (т. I, гл. I, п. 80) дает

$$\tau = -\frac{d\psi}{ds},$$

где через τ , как обычно, обозначено кручение сферической кривой.

51. Натуральные уравнения. Возвратимся теперь к твердому телу S гироскопической структуры относительно одной из его точек O , принимаемой за неподвижную (или совпадающую с центром тяжести). Мы используем при этом еще раз то положение (ср. п. 5), что для полного исследования любого движения тела S (около точки O) достаточно определить закон, по которому изменяются с временем, с одной стороны, направление гироскопической оси относительно точки O и, с другой, — гироскопическая угловая скорость r .

Изменение положения гироскопической оси относительно O будет определено, если будет указана кривая C , описываемая вершиной V гироскопа на сфере с центром в O и радиусом, равным 1 (п. 49).

Применим теперь непосредственно к траектории вершины замечания и формулы упомянутого пункта, так что, в частности, k будет обозначать, как обычно, единичный вектор гироскопической оси, направленный от O к G .

Умножая на скорость s точки V обе части второго из уравнений (91) и уравнение (94), получим

$$\frac{dk}{dt} = \dot{s}t, \quad \frac{dv}{dt} = -\gamma \dot{s}t. \quad (97)$$

Легко найти соотношение между скоростью s вершины и экваториальной составляющей e угловой скорости ω . Действительно, обозначая, как обычно, через r гироскопическую угловую скорость и через α и β составляющие вектора ω по ориентированным (экваториальным) взаимно перпендикулярным направлениям t и v , будем иметь

$$\omega = \alpha t + \beta v + rk;$$

достаточно умножить векторно обе части этого равенства на k и принять во внимание формулу Пуассона

$$\frac{dk}{dt} = \omega \times k$$

и первое из равенств (97), чтобы получить тождество

$$st = \beta t - \alpha v,$$

из которого следует

$$\beta = s, \quad \alpha = 0.$$

Поэтому для угловой скорости мы имеем выражение

$$\omega = sv + rk, \quad (98)$$

где вместе с осевой составляющей rk выявлена и экваториальная составляющая $e = sv$.

Отсюда для момента K количества движения (гл. IV, п. 17) получится формула

$$K = Asv + Crk,$$

из которой, дифференцируя по времени (по отношению к осям $Oxyz$) и пользуясь уравнениями (97), получим

$$\frac{dK}{dt} = (-A\gamma s + Cr) \dot{s}t + A\ddot{s}v + C\dot{r}k.$$

Рассмотрим теперь три оси x' , y' , z с началом в O , имеющие ориентированные направления трех единичных векторов: t (касательной к траектории вершины в направлении возрастающих s), v (перпендикуляра к t и к оси гироскопа OG , направленного влево для наблюдателя, который расположен по OG и смотрит в направлении t), k (гироскопической оси OG). Проектируя на них уравнение моментов количества движения относительно точки O , мы получим скалярные уравнения

$$\left. \begin{aligned} (-A\gamma s + Cr) \dot{s} &= M_t, \\ A\ddot{s} &= M_v, \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

$$C\dot{r} = M_z, \quad (100)$$

которые обычно называют *натуральными уравнениями движения гироскопа*¹⁾.

Заметим, что введенная здесь система осей $Ox'y'z'$ совпадает с той, которая была указана в п. 46; в этой системе ось z совпадает с гироскопической осью и поэтому неподвижна в теле, тогда как две другие оси, оставаясь взаимно перпендикулярными, движутся в экваториальной плоскости по закону, однозначно определяемому движением гироскопа.

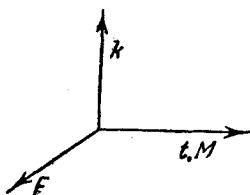
52. В качестве первого и непосредственного следствия из натуральных уравнений мы можем доказать, что если к гироскопу, находящемуся в быстром вращении вокруг своей оси, приложить какую-нибудь силу F в какой-нибудь точке A этой оси, то достаточно, чтобы движение вершины было строго равномерным, для того чтобы смещение точки V происходило в направлении, перпендикулярном к активной силе F . Мы уже знаем (п. 4), что, по крайней мере приблизенно, такое свойство существует для всякого гироскопа, находящегося в быстром вращении вокруг собственной оси.

При указанном выше условии, что сила F пересекает гироскопическую ось, имеем $M_z = 0$, а из предположения, что движение вершины равномерное ($\ddot{s} = 0$), следует в силу второго натурального уравнения (99), что и $M_v = 0$; поэтому момент M имеет направление единичного вектора t , т. е. скорости v , следовательно, элементарного перемещения вершины; а так как при $OA = l$ имеем $M = lk \times F$, то мы и приходим к заключению, что это перемещение точки V , параллельное M , перпендикулярно к F , а также и к k . Можно также определить и сторону этого элементарного перемещения. Прежде всего, так как $M_z = 0$, то из уравнения (100) видим, что $r = \text{const}$ (как это, в частности, имеет место для тяжелого гироскопа). Далее, если гироскопическая скорость достаточно велика (по сравнению со скоростью s вершины, или, точнее, по сравнению с $\dot{\gamma}s$), то из двух членов левой части первого натурального уравнения (99) преобладающее значение будет иметь второй, имеющий тот же знак, что и s . Если касательную к траектории вершины направим в ту сторону, куда перемещается точка V в данный момент, то, по крайней мере за рассматриваемый элемент времени, $\dot{s} > 0$ и поэтому проекция M_t момента M будет положительной. Этот момент имеет, следовательно, одинаковые с t и со скоростью точки V не только направление, но также и сторону. А тогда на основании выражения $M = lk \times F$ заключаем, что когда точка A приложения силы F находится на гироскопической оси с той же стороны от точки O , что и G ($l > 0$), то скорость

¹⁾ Г. Ламб, Теоретическая механика, т. III, перевод с английского, 1936, § 55; W. F. Osgood, On the gyroscope, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, т. XXIII, стр. 240—264.

точки V в любой момент будет направлена перпендикулярно к плоскости векторов F и k влево по отношению к наблюдателю, расположенному вдоль k и обращенному лицом в ту сторону, куда действует F (фиг. 23).

53. Чтобы дать второе приложение натуральных уравнений, тоже очень простое, представим себе, что активная сила F представляет собой реакцию, испытываемую щеточкой, укрепленной на гироскопической оси в одной из ее точек A со стороны G и вынужденной скользить по внутренней стороне шероховатой сферы с центром в точке O .



Фиг. 23.

Если через N обозначим величину нормальной реакции, которую мы будем предполагать постоянной, и через f — коэффициент трения, то fN будет абсолютной величиной касательной составляющей реакции (трение), поэтому в силу законов динамического трения (поскольку в рассматриваемом интервале предполагается $f > 0$), проектируя силу F

на ориентированные направления трех единичных векторов t , v , k , связанных с траекторией вершины, будем иметь

$$F_1 = -fN, \quad F_v = 0, \quad F_k = -N;$$

если положим еще $OA = l > 0$, то момент M будет определяться равенством —

$$M = lk \times (-fNt - Nk) = IfNv.$$

Поэтому в натуральных уравнениях мы должны положить

$$M_t = M_v = 0, \quad M_k = -IfN,$$

в силу чего из уравнения (100) также и в этом случае находим $r = \text{const} = r_0$, а второе из уравнений (99) дает

$$A\ddot{s} = -IfN. \quad (101)$$

Так как правая часть есть отрицательная постоянная величина, то движение будет равнозамедленным и скорость обратится в нуль по истечении конечного промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$. Начиная с этого момента t_1 , вершина V остается неподвижной в достигнутом таким образом положении V_1 , и движение гироскопа сводится к permanentному вращению (с угловой скоростью r_0) вокруг гироскопической оси, неподвижной в пространстве в положении OV_1 .

Поэтому остается определить движение V за промежуток времени от $t = 0$ до $t = t_1$, для чего достаточно применить элементарные формулы прямолинейного движения тяжелой точки (т. I, гл. II, пп. 29, 30). Если желательно избежать всяких ссылок, то достаточно заметить, что

за рассматриваемый промежуток времени, вследствие того что $\dot{s} > 0$, дуга s постоянно возрастает вместе с t , так что мы можем принять ее за независимое переменное вместо t . Принимая во внимание обычное тождество

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{ds} \dot{s} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds}$$

и обозначая для кратности через h положительную постоянную $2IfN/A$, можно будет написать уравнение (101) в виде

$$\frac{dv^2}{ds} = -h;$$

из этого уравнения получаем

$$v^2 = v_0^2 - hs, \quad (102)$$

где v_0 обозначает начальную скорость. Поэтому вершина, прежде чем остановиться, пробегает дугу длиной

$$s_1 = \frac{v_0^2}{h}.$$

Время t_1 , необходимое для этого, получится непосредственно из уравнения

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

которое, пользуясь соотношением (102) и разделяя переменные, можно написать в виде

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - hs}},$$

откуда, интегрируя от 0 до s_1 , получим

$$t_1 = \frac{2v_0}{h}.$$

Наконец, для определения траектории, пробегаемой вершиной V , надо проинтегрировать первое из уравнений (99), которое здесь принимает вид

$$\gamma = \frac{Cv_0}{Av}$$

и, так как γ есть геодезическая кривизна неизвестной траектории, представляет собой натуральное уравнение.

Уместно отметить, что мы, таким образом, имеем пример движения вершины гирокопа, происходящего, собственно, в направлении прямо приложенной силы (хотя и в противоположную сторону). Это, естественно, не может нас удивить, если мы обратим внимание на то, что условия здесь далеки от того, чтобы движение вершины было строго

или, по меньшей мере, приблизительно равномерное, как это требуется для того, чтобы перемещение было перпендикулярным к силе; наоборот, мы имеем здесь дело с замедленным движением.

54. Гироскоп с осью, вынужденной двигаться по неподвижной плоскости. В качестве третьего и наиболее замечательного приложения натуральных уравнений мы рассмотрим здесь механические причины явления, на котором основано действие так называемой гироскопической буссоли. Для этой цели обратимся предварительно к более простой задаче.

Представим себе гироскоп, ось которого Oz (гироскопическая ось, проходящая через центр тяжести) в силу связей не может выходить из заданной неподвижной плоскости π , проходящей через O . Если мы вспомним прибор, описанный в п. 3, то легко поймем, как (по крайней мере относительно Земли) можно осуществить такую связь. Достаточно закрепить диаметр $B\bar{B}'$ кольца (в котором укреплены подшипники оси AA' гироскопа) вдоль нормали к плоскости π таким образом, чтобы его средняя точка совпала с той точкой плоскости π , в которой мы хотим закрепить гироскоп. В этих условиях траектория вершины сведется к окружности с центром в O и радиусом 1 в плоскости π , так что ее геодезическая кривизна γ будет равна нулю, единичный вектор t будет постоянно лежать в этой плоскости (в направлении, перпендикулярном к k), а единичный вектор u останется неподвижным (в направлении, перпендикулярном к π). Если, далее, допустим, что связь является связью без трения, то реакции (внешние), которые приложены к оси гироскопа, должны быть все нормальными к π , а потому их результирующий момент относительно точки O будет необходимо перпендикулярным, как к k , так и к u . Мы видим, таким образом, что эти реакции ничего не добавляют к двум последним натуральным уравнениям (п. 51)

$$\ddot{As} = M_u, \quad C\dot{r} = M_z. \quad (103)$$

Эти уравнения, так как моменты M_u , M_z относятся исключительно к активным силам (внешним) и являются поэтому так же, как и эти силы, известными, будут достаточны для определения движения системы (имеющей, очевидно, только две степени свободы).

Интегрируя уравнения (103), мы определим движение. Не рассмотренное еще нами натуральное уравнение, которое здесь при $\gamma = 0$ принимает вид

$$Cr\dot{s} = M_t,$$

позволяет найти по данным задачи и после того, как движение будет определено, проекцию на направление t результирующего момента реакций, который входит как слагаемое в правую часть. Из механической постановки задачи более уже ничего нельзя получить относительно неизвестных реакций, кроме этой суммарной величины.

55. Случай плоскости, неподвижной относительно Земли. Рассуждения предыдущего пункта, строго говоря, имеют силу только при том существенном предположении, что плоскость π неподвижна относительно инерциальной системы отсчета. Но в тех пределах приближения, в которых допустимо пренебречь движением Земли, они будут приложимы так же и к случаю, когда π будет плоскостью, неизменно связанной с Землей. Приняв это допущение, предположим еще, что активные силы сводятся к весу гироскопа (единственная сила величины mg , приложенная в центре тяжести G).

Приняв за ось $O\xi$ ортогональную проекцию нисходящей вертикали точки O на плоскость π (линия наибольшего наклона) или произвольную прямую в плоскости π , если эта плоскость горизонтальна, обозначим через α угол наклона плоскости π к горизонту (или через $\pi/2 - \alpha$ угол между осью $O\xi$ и нисходящей вертикалью) и через θ угол между вектором k и осью $O\xi$ (отсчитываемый в направлении от k к t). Тогда для проекции силы тяжести на направление t будем иметь выражение

$$mg \sin \alpha \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -mg \sin \alpha \sin \theta,$$

так что, положив $OG = l$, получим

$$M_y = -mgl \sin \alpha \sin \theta, \quad M_z = 0.$$

На основании этих значений моментов активных сил относительно осей второе из уравнений движения (103) дает $r = \text{const} = r_0$, а первое, так как здесь, очевидно, имеем $\dot{s} = 0$, сводится к уравнению

$$A\ddot{\theta} + mgl \sin \alpha \sin \theta = 0. \quad (104)$$

Так как, обозначая временно через l_1 положительную постоянную

$$\frac{A}{ml \sin \alpha},$$

предыдущее уравнение можно написать в виде

$$l_1 \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0,$$

то мы видим, что, вообще говоря, ось гироскопа при указанных выше условиях будет сколь угодно долго колебаться около линии наибольшего наклона $O\xi$ по закону маятника; если, в частности, имеем $l = 0$ (т. е. если гироскоп подвешен в центре тяжести) или же $\alpha = 0$ (т. е. плоскость π горизонтальна), то правая часть уравнения (104) обращается в нуль и ось гироскопа равномерно вращается в плоскости вокруг O . При этом гироскоп во всех случаях сохраняет сколь угодно долго постоянную угловую скорость r_0 вращения вокруг своей оси.

56. Гироскопическая буссоль. Предположим, как и в предыдущем пункте, что плоскость π неизменно связана с Землей, и добавим еще дальнейшее условие, что центр подвеса O совпадает с центром тяжести

гироскопа. Но в отличие от того, что говорилось в предыдущем пункте, мы примем здесь во внимание влияние движения Земли, которое будем рассматривать, как в § 4 гл. II, т. е. предположим, что центр тяжести движется равномерно и прямолинейно, а угловая скорость сохраняет постоянные величину и направление.

Уравнение (103) можно применить и в этом случае, лишь бы в выражения M_y и M_z было включено слагаемое, происходящее от центробежных сил (т. е. сил, соответствующих переносным ускорениям) и сложных центробежных сил (т. е. сил, происходящих от дополнительных поворотных ускорений).

Но слагаемое, происходящее от центробежных сил, уже учтено в силе тяжести, которая в силу своего определения является результирующей земного притяжения и центробежной силы (т. I, гл. XVI, п. 33); с другой стороны, ее момент равен нулю, потому что речь идет о моменте силы, приложенной в точке O . Что же касается сложных центробежных сил, то они определяются для каждой отдельной материальной точки P_i массы m_i гироскопа выражениями

$$-2m_i \mathbf{a}_{c/i} = -2m_i \mathbf{R} \times \mathbf{v}_i,$$

где \mathbf{R} обозначает угловую скорость Земли и \mathbf{v}_i — скорость $\omega \times \vec{OP}_i$ точки. Вспоминая тогда выражение

$$\omega = \dot{s}\mathbf{v} + r\mathbf{k}, \quad (98)$$

найденное в п. 51 для угловой скорости гироскопа, и обозначая через x_i, y_i, z_i координаты точки P_i относительно системы $Ox'y'z$, мы легко найдем

$$-2m_i \mathbf{a}_{c/i} = X_i \mathbf{t} + Y_i \mathbf{u} + Z_i \mathbf{k},$$

где для краткости положено

$$\left. \begin{aligned} X_i &= 2m_i (\dot{s}R_y + rR_z)x_i, \\ Y_i &= 2m_i (-\dot{s}R_tx_i + [ry_i - sz_i] R_z), \\ Z_i &= 2m_i (-rR_tx_i - [ry_i - sz_i] R_y). \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Проекции M_y, M_z результирующего момента внешних сил, которые, как было сказано, относятся исключительно к только что определенным сложным центробежным силам, можно вычислить на основании формул

$$M_y = \sum_i (z_i X_i - x_i Z_i), \quad M_z = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i),$$

где суммирование (заменяемое, если необходимо, интегрированием) распространяется на все точки или материальные элементы гироскопа. Если примем во внимание, что, с одной стороны, в силу гироскопической структуры тела, ориентировку единичных векторов $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{k}$

в любой момент определяют три главные оси инерции, так что исчезают три произведения инерции, а с другой стороны, имеем (гл. IV, п. 17)

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 = \frac{1}{2} C, \quad \sum_i m_i z_i^2 = A - \frac{1}{2} C,$$

то на основании уравнений (105) найдем

$$M_y = CrR_t, \quad M_z = -CsR_t,$$

и натуальные уравнения (103) принимают вид

$$\ddot{As} = CrR_t, \quad \dot{Cr} = -CsR_t. \quad (103')$$

Складывая почленно эти два уравнения после умножения их соответственно на \dot{s} и r , мы увидим, что они допускают первый интеграл

$$\frac{1}{2} (A\dot{s}^2 + Cr^2) = \text{const}. \quad (106)$$

Мы имеем здесь, очевидно, интеграл живых сил, наличие которого всегда можно было предвидеть. Действительно, обращаясь к неподвижным осям, мы видим, что в настоящей задаче связи (закрепление центра тяжести и возможность движения гироскопической оси только в плоскости π) по предположению являются идеальными и не зависят от времени; поэтому все будет происходить так, как если бы активные силы сводились для каждой точки P_i к сложным центробежным силам. Всякая такая сила будет перпендикулярна к скорости v точки приложения; поэтому во всякий элемент времени dt ее элементарная работа будет равна нулю. Следовательно, нулю же будет равна и элементарная работа dL активных сил; уравнение живых сил будет поэтому иметь вид $dT = 0$, что непосредственно следует из уравнения (106).

57. Что касается интегрирования уравнений (103'), то заметим прежде всего, что одно простое, но очень важное из его частных решений можно получить, предполагая, что гироскопическая ось, т. е. единичный вектор k , постоянно направлена по проекции (ориентированной) на плоскость π вектора R , который, как обычно говорят, направлен по *оси мира* (ось вращения Земли, направленная от южного полюса к северному). В таком случае, так как вершина остается неподвижной в плоскости π , мы постоянно будем иметь $\dot{s} = 0$; с другой стороны, R_t также будет тождественно равна нулю, потому что единичный вектор t , принадлежащий плоскости π и перпендикулярный к k , будет перпендикулярен и к R . Мы видим, таким образом, что первое из уравнений (103') будет тождественно удовлетворяться, а второе просто даст $r = \text{const} = r_0$; поэтому мы будем иметь

перманентное вращение с угловой скоростью r_0 вокруг гироскопической оси, расположенной вдоль ортогональной проекции оси мира на плоскость π .

Обратно, если для гироскопа, находящегося в быстром вращении вокруг своей оси ($r \neq 0$), требуется определить, как эта ось должна быть ориентирована в заданной плоскости π , неизменно связанной с Землей, для того чтобы, оставаясь свободной для вращения в плоскости π вокруг удерживаемого неподвижным центра тяжести гироскопа, она оставалась неподвижной, то из уравнений (106), (103') следует, что проекция R_t должна обращаться в нуль, т. е. что вектор k должен располагаться вдоль проекции оси мира на плоскость π .

Так, в частности, если плоскость π горизонтальна или вертикальна, то положение неподвижности, или, как обычно говорят, положение (относительного) равновесия гироскопической оси, приблизительно совпадает (если отвлечься от небольшого различия между положениями оси вращения Земли и магнитной оси) с осью магнитной стрелки *буссоли отклонения*, или, соответственно, *буссоли наклонения*.

Но из интегрирования уравнений (103'), выполнимого в квадратурах, легко также видеть, каково должно быть теоретически (т. е. при полном отсутствии трения) движение оси в общем случае, т. е. при каких угодно начальных условиях (конечно, совместимых со связями).

Для этой цели, как и в п. 55, выберем в плоскости π ориентированную прямую $O\xi$, которую мы здесь совместим с проекцией оси мира; если же R будет нормальна к плоскости π , то мы возьмем $O\xi$ произвольно. Обозначив через θ угол k с осью $O\xi$ (отсчитываемый в направлении от k к t), мы и здесь также можем отождествить s с θ и будем иметь

$$R_t = R_1 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -R_1 \sin \theta,$$

где R_1 обозначает положительную постоянную, т. е. проекцию угловой скорости Земли на плоскость π ; уравнения (103') принимают после этого окончательный вид

$$A\ddot{\theta} = -CR_1r \sin \theta, \quad \dot{r} = R_1\dot{\theta} \sin \theta. \quad (103'')$$

Отсюда прежде всего следует, что если плоскость π перпендикулярна к R , т. е. параллельна земному экватору, то имеем $r = \text{const}$, $\ddot{\theta} = 0$, т. е. гироскоп равномерно вращается вокруг своей оси, а эта ось в свою очередь равномерно вращается в плоскости π вокруг O .

Во всяком другом случае второе из уравнений (103'') все еще можно проинтегрировать, и если r_0 и θ_0 суть начальные значения r и θ , то получим

$$r = r_0 + R_1(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (107)$$

Подставляя это выражение r в первое из уравнений (103''), для определения θ в функции от t мы получим уравнение

$$A\ddot{\theta} = -Cr_0R_1\left(\left[1 - \frac{R_1}{r_0}\cos\theta_0\right]\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{R}{r_0}\sin 2\theta\right), \quad (108)$$

которое можно привести (гл. VII, п. 5) при помощи одной квадратуры к обычному типу

$$\dot{\theta}^2 = \Phi(\theta),$$

интегрируемому посредством одной квадратуры (гиперэллиптической).

Мы не будем здесь останавливаться на фактическом вычислении. Вместо этого заметим, что если начальная гирокопическая скорость r_0 значительна, точнее, достаточно велика для того, чтобы отношение R_{10}/r_0 было ничтожным по сравнению с единицей, то уравнения (107), (108) можно будет заменить уравнениями

$$r = r_0, \quad A\ddot{\theta} = -Cr_0R_1\sin\theta,$$

второе из которых совпадает с уравнением движения маятника. Таким образом, мы видим, что, в любом движении с достаточно быстрым гирокопическим вращением, если на гирокоп наложены указанные связи, то он вращается приблизительно с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии, а ось колеблется приблизительно по закону маятника, в плоскости π (предполагаемой непараллельной земному экватору) около проекции оси мира.

Важно добавить, что на практике, вследствие неизбежного действия трения, колебательное движение оси при каких угодно начальных условиях затухает значительно быстрее, чем собственное вращение гирокопа, которое предполагается весьма быстрым, так что ось его после небольшого числа колебаний располагается в положении равновесия. Этим обстоятельством и замечаниями, сделанными выше об этом положении равновесия в случае, когда плоскость π горизонтальна или вертикальна, вполне оправдывается название *гироскопической буссоли*, которое обычно дают рассмотренному здесь прибору.

§ 9. Случай С. В. Ковалевской и другие исследования преимущественно аналитического характера

58. Случай Ковалевской. В п. 24 уже говорилось, что интегрирование уравнений (34'), (35') движения тяжелого твердого тела, закрепленного в одной своей точке, приводится к квадратурам всякий раз, когда удается определить еще один интеграл, кроме классических интегралов живых сил и момента количеств движения.

С. В. Ковалевская, поставив себе целью определить все случаи, в которых решения p , q , r , Υ_1 , Υ_2 , Υ_3 системы (34'), (35'),