Подставляя это выражение r в первое из уравнений (103″), для определения θ в функции от t мы получим уравнение

$$A\ddot{\theta} = -Cr_0R_1\left(\left[1 - \frac{R_1}{r_0}\cos\theta_0\right]\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{R}{r_0}\sin 2\theta\right), \qquad (108)$$

которое можно привести (гл. VII, п. 5) при помощи одной квадратуры к обычному типу

$$\dot{\theta}^2 = \Phi(\theta),$$

интегрируемому посредством одной квадратуры (гиперэллиптической).

Мы не будем здесь останавливаться на фактическом вычислении. Вместо этого заметим, что если начальная гироскопическая скорость r_0 значительна, точнее, достаточно велика для того, чтобы отношение R_{10}/r_0 было ничтожным по сравнению с единицей, то уравнения (107), (108) можно будет заменить уравнениями

$$r = r_0, \quad A\ddot{\theta} = -Cr_0R_1\sin\theta,$$

второе из которых совпадает с уравнением движения маятника. Таким образом, мы видим, что, в любом движении с достаточно быстрым гироскопическим вращением, если на гироскоп наложены указанные связи, то он вращается приблизительно с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии, а ось колеблется приблизительно по закону маятника, в плоскости π (предполагаемой непараллельной земному экватору) около проекции оси мира.

Важно добавить, что на практике, вследствие неизбежного действия трения, колебательное движение оси при каких угодно начальных условиях затухает значительно быстрее, чем собственное вращение гироскопа, которое предполагается весьма быстрым, так что ось его после небольшого числа колебаний располагается в положении равновесия. Этим обстоятельством и замечаниями, сделанными выше об этом положении равновесия в случае, когда плоскость π горизонтальна или вертикальна, вполне оправдывается название *гироскопической буссоли*, которое обычно дают рассмотренному здесь прибору.

§ 9. Случай С. В. Ковалевской и другие исследования преимущественно аналитического характера

58. Случай Ковалевской. В п. 24 уже говорилось, что интегрирование уравнений (34′), (35′) движения тяжелого твердого тела, закрепленного в одной своей точке, приводится к квадратурам всякий раз, когда удается определить еще один интеграл, кроме классических интегралов живых сил и момента количеств движения.

С. В. Ковалевская, поставив себе целью определить все случаи, в которых решения p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 системы (34′), (35′),

рассматриваемые не только на действительной оси, но и на всей плоскости комплексного переменного t, представляют собой однозначные и мероморфные функции, пришла к заключению, что это обстоятельство имеет место, кроме случаев Эйлера (§ 3) и Лагранжа (§ 6), только в том случае, когда выполняются два следующих условия:

а) главные моменты инерции относительно неподвижной точки O удовлетворяют соотношениям

$$A = B = 2C,$$

вследствие чего, в частности, твердое тело имеет гироскопическую структуру относительно точки O;

б) центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции относительно точки O, а не на оси симметрии, как это имеет место в случае Лагранжа *).

Допустив оба этих структурных предположения, мы ограничимся здесь составлением уравнений движения и получением из них первого интеграла, который и даст возможность выполнить интегрирование в квадратурах.

Выбрав за неподвижную ось z в теле ось симметрии эллипсоида инерции, мы можем предположить, не нарушая общности рассуждений, что положительная полуось x проходит через центр тяжести, так как и здесь безразлична ориентация неподвижных относительно тела осей Oxy (главных осей инерции) в экваториальной плоскости. В силу этого имеем

$$x_0 > 0, \quad y_0 = z_0 = 0,$$

благодаря чему уравнения (34′) приводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned} 2\dot{p} - qr &= 0, \\ 2\dot{q} + pr &= -\lambda^2\gamma_3, \\ \dot{r} \qquad &= \lambda^2\gamma_2, \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

*) Ковалевская Софья Васильевна родилась в Москве в 1850 г., умерла в Стокгольме в 1891 г. Математические способности С. В. Ковалевской обнаружились уже во время занятий ее алгеброй и геометрией под руководством домашнего учителя Малевича; впоследствии она брала уроки математики в Петербурге, слушала лекции в Гейдельберге и, наконец, работала под руководством Вейерштрасса в Берлине.

В 1874 г. С. В. Ковалевская защитила диссертацию в Гёттингене и получила степень доктора философии; в 1884 г. она заняла кафедру математики в Стокгольмском университете, а в 1889 г. была избрана членом-корреспондентом Петербургской Академии наук.

Работы С. В. Ковалевской относятся к общим вопросам интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными и к прикладной математике.

Особенной известностью пользуется открытый ею третий случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки; за эту работу она получила первую премию Парижской академии наук в 1888 г. (*Прим. ред.*)

где для краткости через λ^2 обозначена постоянная (положительная) Px_0/C, имеющая размерность квадрата угловой скорости; кинематические уравнения Пуассона сохраняют при этом свой вид:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 r - \gamma_3 q,\\ \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 p - \gamma_1 r,\\ \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 q - \gamma_2 p.\end{aligned}\right\} \tag{35'}$$

Прибавляя к первому уравнению (109) второе, умноженное на $i = \sqrt{-1}$, мы получим уравнение

$$2(\dot{p} + i\dot{q}) = -ir(p + iq) - i\lambda^2\gamma_3,$$

которое по умножении на $p + iq$ можно написать в виде

$$\frac{d}{dt}(p + iq)^2 = -ir(p + iq)^2 - i\lambda^2\gamma_3(p + iq).$$

Но из первых двух уравнений (35′) непосредственно имеем

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1 + i\gamma_2) = -ir(\gamma_1 + i\gamma_2) - i\gamma_3(p + iq),$$

так что, вычитая из предыдущего уравнения это последнее, после умножения обеих его частей на λ^2, мы придем к уравнению

$$\frac{d}{dt}\{(p + iq)^2 - \lambda^2(\gamma_1 + i\gamma_2)\} = -ir\{(p + iq)^2 - \lambda^2(\gamma_1 + i\gamma_2)\}$$

или же

$$\dot{\Theta} = -ir\Theta, \tag{110}$$

где положено

$$\Theta = (p + iq)^2 - \lambda^2(\gamma_1 + i\gamma_2). \tag{111}$$

Если же через $\bar{\Theta}$ обозначим комплексную величину, сопряженную с Θ, которая (так как мы имеем в виду действительные решения наших дифференциальных уравнений) получится путем замены i через $-i$ в уравнении (111), то к уравнению (110) можно присоединить уравнение

$$\dot{\bar{\Theta}} = ir\bar{\Theta}; \tag{110'}$$

поэтому, умножая уравнение (110) на $\bar{\Theta}$, уравнение (110′) на Θ и складывая почленно, получим

$$\frac{d}{dt}(\Theta\bar{\Theta}) = 0;$$

отсюда получается алгебраический интеграл четвертой степени, открытый Ковалевской,

$$\Theta\bar{\Theta} = \{(p+iq)^2 - \lambda^2(\gamma_1 + i\gamma_2)\}\{(p-iq)^2 - \lambda^2(\gamma_1 - i\gamma_2)\} = \text{const}.$$

Благодаря ему интегрирование уравнений (109) и (35′) сводится к гиперэллиптическим квадратурам. Мы не будем здесь останавливаться на доказательстве этого и не будем излагать последних исследований, предметом которых стал этот замечательный случай интегрируемости у различных авторов. Напомним только, что для уравнений (109) и (35′) изучены стационарные решения и их устойчивость[1]) *).

59. Алгебраические первые интегралы. Случай Гесса. В случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской последний из первых интегралов, приводящий к интегрированию посредством квадратур уравнений движения тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой (п. 24), является, как и интегралы живых сил и моментов, алгебраическим относительно неизвестных функций. Поэтому естественно, что предпринимались общие исследования вопроса о том, допускают ли и в каких случаях динамические уравнения тяжелого твердого тела, закрепленного в одной точке, помимо двух классических интегралов, какой-нибудь новый алгебраический интеграл, относительно переменных p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3. Однако глубокое исследование Гюссона[2]), выполненное в более изящной форме Бургатти[3]), привело к заключению, что, *помимо рассмотренных ранее случаев Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, не существует других алгебраических интегралов, кроме интегралов живых сил и моментов.*

Тем не менее делались попытки исследовать случай, когда посредством квадратур удается определить для системы (34′), (35′) не общий интеграл, а хотя бы семейство ∞^4 решений, что, как было сказано в п. 22, означает ∞^5 решений задачи о движении **).

---

[1]) Levi-Civita, Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kowalevsky, *Rend. Acc. Lincei*, s. 5ª, т. X, 1091_1, стр. 338—346, 429—434, 461—466.

*) О случае С. В. Ковалевской см.: С. В. Ковалевская, Полное собрание математических работ, 1949; Н. Е. Жуковский, Геометрическая интерпретация рассмотренного С. В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, полное собрание сочинений, т. I, 1937, в этой же статье можно найти указания на другие работы, посвященные изучению случая С. В. Ковалевской; сборник работ „В память С. В. Ковалевской", 1934; Суслов Г. К., Теоретическая механика, 1946, стр. 563—576. (*Прим. ред.*)

[2]) Husson, Recherche des intégrales algébriques, и пр., Thése, Paris, Gauthier — Villars, 1905.

[3]) Burgatti, Dimostrazione della non esistenza d'integrali algebrici и пр., *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, т. XXIX, 1910, стр. 369—377.

**) Иными словами, определить частное решение, зависящее не от пяти, а от четырех произвольных постоянных, распоряжаясь пятой из них так, чтобы получить новый алгебраический интеграл. (*Прим. ред.*)

Первый и, может быть, наиболее интересный из этих случаев *частной интегрируемости* был открыт Гессом[1]).

Заметим, что на основании той же теоремы Лиувилля, на которую мы ссылались в п. 24 и которую мы докажем в гл. X (§ 7), достаточно знать одно соотношение

$$f(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 0, \tag{112}$$

которое остается в силе в течение всего движения всякий раз, как оно будет удовлетворено вначале, для того чтобы можно было определить посредством квадратур все ∞^5 удовлетворяющих ему движений. Уравнение (112) уже нельзя назвать первым интегралом, поскольку оно удовлетворяется только частью решений (теми, которые ему удовлетворяют вначале), и поэтому чаще называется *инвариантным уравнением* (по отношению к движению) или, как еще говорят, первым частным интегралом.

К случаю Гесса мы придем, если будем отыскивать, при каких условиях может получиться, что момент количеств движения $\boldsymbol{K}$ остается в течение всего движения перпендикулярным к центральной оси OG, или, другими словами, что при подходящих структурных предположениях уравнения движения могут допустить частный интеграл

$$\boldsymbol{K} \cdot \overrightarrow{OG} = Ax_0p + By_0q + Cz_0r = 0. \tag{113}$$

Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы производная по времени от $\boldsymbol{K} \cdot \overrightarrow{OG}$ обращалась в нуль, когда исчезает само $\boldsymbol{K} \cdot \overrightarrow{OG}$.

Далее, так как речь идет о скаляре, то производную можно взять по отношению к любым осям; дифференцируя по отношению к осям, неподвижным в теле, и принимая во внимание уравнение моментов количеств движения (п. 22)

$$\dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} = P \cdot \overrightarrow{OG} \times \boldsymbol{\varkappa}, \tag{34}$$

а также само уравнение (113), мы получим тождество

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{K} \cdot \overrightarrow{OG}] = (\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \overrightarrow{OG},$$

так что все сводится к выяснению того, когда произведение $(\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \overrightarrow{OG}$, содержащее переменные p, q, r во второй степени,

---

[1]) См., например, Hess, Ueber die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung, и пр., *Math. Annalen*, т. 37, 1890, стр. 153—181. Относительно преобразования уравнений, вводящего вместо проекций векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ некоторые их инвариантные комбинации, и о более углубленном разборе случая Гесса см. Note di O. Lazzarino, *Rend. Acc. Lincei*, c. 5ª, т. XXVIII, 1919_1, стр. 325—331, 341—346 и 1919_2, стр. 9—14, 259—263, 329—333, 422—426, 489—493.

делится на произведение $\boldsymbol{K}\cdot\overrightarrow{OG}$, линейное по отношению к тем же переменным. Заметим, кстати, что так как $(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\overrightarrow{OG}$, по крайней мере с точностью до множителя $\boldsymbol{\omega}$, является не чем иным, как левой частью уравнения конуса Штауде (п. 25), последнее обстоятельство равносильно тому, что этот конус распадается на две плоскости, одна из которых является плоскостью, перпендикулярной к моменту $\boldsymbol{K}$,

$$Ap\gamma_1+Bq\gamma_2+Cr\gamma_3=0.$$

Если обозначим через $up+vq+wr$ неизвестную линейную форму, то придем к условному тождеству

$$(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\overrightarrow{OG}=(up+vq+wr)\,\boldsymbol{K}\cdot\overrightarrow{OG},$$

равносильному системе

$$Ax_0u=0,\quad By_0v=0,\quad Cz_0w=0; \tag{114}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0(B-C)&=vCz_0+wBy_0,\\ y_0(C-A)&=wAx_0+uCz_0,\\ z_0(A-B)&=uBy_0+vAx_0. \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

Из уравнений (114) следует, что нулями должны быть или все три величины x_0, y_0, z_0, или все три искомые величины u, v, w, или же два числа одной из этих двух троек и одно, не соответствующее им, другой.

Оба случая, $x_0=y_0=z_0=0$ и $u=v=w=0$, надо сразу же исключить, так как первый приводит к движению по Пуансо (случай Эйлера) тяжелого твердого тела, закрепленного в его центре тяжести, а второй вследствие соотношений (115) — к твердому телу, имеющему эллипсоидом инерции относительно неподвижной точки сферу, т. е. к частному случаю тяжелого гироскопа.

Но каждое из предположений

$$y_0=z_0=u=0,\quad z_0=x_0=v=0,\quad x_0=y_0=w=0$$

приводит в силу соотношений (115) к одному из только что исключенных случаев.

Поэтому остается рассмотреть только три возможности

$$x_0=v=w=0,\quad y_0=w=u=0,\quad z_0=u=v=0, \tag{116}$$

в каждой из которых одно из соотношений (115) будет тождественно удовлетворяться, а другие две путем исключения u, v или w соответственно дадут

$$\left.\begin{aligned} (A-B)\,Cz_0^2&=(C-A)\,By_0^2,\\ (B-C)\,Ax_0^2&=(A-B)\,Cz_0^2,\\ (C-A)\,By_0^2&=(B-C)\,Ax_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

Если исключим гироскопические случаи и для определенности предположим

$$A > B > C,$$

то увидим, что первое и третье из предположений (116) должны быть отброшены, поскольку соответствующие соотношения (117) приводят к мнимым значениям для y_0/z_0 или, соответственно, x_0/y_0; таким образом, единственный новый случай, к которому приводит наличие инвариантного уравнения (113), соответствует второму из предположений (117) и поэтому определяется двумя структурными условиями

$$y_0 = 0, \quad (B - C) A x_0^2 = (A - B) C z_0^2. \tag{118}$$

Следовательно, речь идет о твердом теле, эллипсоид инерции которого относительно закрепленной точки будет трехосным, но имеющим центр тяжести на главной плоскости, проходящей через наибольшую и наименьшую из осей ($y_0 = 0$), при дальнейшем условии, что ось, проходящая через центр тяжести, направлена в этой плоскости так, чтобы было удовлетворено второе из условий (118)[1].

Это и есть случай частной интегрируемости Гесса *).

60. Случай Чаплыгина[2]). Рассмотрим другой случай частной интегрируемости, который с точки зрения структуры твердого тела близок к случаю Ковалевской, поскольку он характеризуется соотношением

$$A = B = 4C$$

и добавочным условием, что центр тяжести лежит на экваториальной плоскости эллипсоида инерции ($z_0 = 0$).

Здесь к определению в квадратурах ∞^4 решений системы (34′), (35′) и, следовательно, ∞^5 движений тяжелого твердого тела, закрепленного в одной своей точке, мы придем уже не путем добавления к интегралам живых сил и моментов нового частного интеграла, а, придавая частное значение произвольной постоянной в одном из этих двух классических первых интегралов, а именно в интеграле моментов количеств движения, найдем, что посредством полученных

---

[1]) Это уравнение выражает, что ось OG, проходящая через центр тяжести, должна быть нормальной к той или другой из двух действительных плоскостей круговых сечений так называемого *взаимного эллипсоида инерции*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1.$$

См. Жуковский, *Jahresb. der Deutschen Math. Ver.*, т. 3, 1894, стр. 62; Sommerfeld, *Gött. Nachr.*, 1898, стр. 83; Klein—Sommerfeld, Theorie des Kreisels, стр. 380.

*) Геометрическая интерпретация случая Гесса предложена Н. Е. Жуковским в статье „Локсодромический маятник Гесса", 1892. См. полное собрание сочинений, т. I, 1937. (*Прим. ред.*)

[2]) См., например, две заметки Колосова и Марколонго в *Rendi. del Circ Mat. di Palermo*, т. XVI, 1902, стр. 346—357.

таким образом решений, удовлетворяющих инвариантному уравнению, получается новый первый интеграл.

Если и здесь проведем неподвижную в теле положительную полуось Ox через центр тяжести, то динамические уравнения (34′) примут вид

$$\left.\begin{aligned} 4\dot{p} - 3qr &= 0, \\ 4\dot{q} + 3pr &= -\lambda^2\gamma_3, \\ \dot{r} \qquad &= \lambda^2\gamma_2, \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

где через λ^2, как и в п. 58, обозначена положительная постоянная Px_0/C.

Естественно, что и в данном случае остается в силе интеграл моментов количеств движения относительно вертикали, который в этом случае определяется равенством

$$K_\zeta = C\{4(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3\}.$$

Чаплыгин заметил, что для ∞^4 решений системы (34′), (35′), для которых постоянная K_ζ моментов равна нулю, существует алгебраический интеграл третьей степени

$$\varphi \equiv r(p^2 + q^2) + \lambda^2 p\gamma_3 = \text{const}.$$

Не исследуя, как Чаплыгин пришел к этому заключению, мы ограничимся его поверкой; для этого достаточно заметить, что в силу уравнений (119) и третьего из уравнений (35′) имеем тождество

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv \frac{1}{4}\lambda^2 q\{4(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3\}$$

или же на основании выражения для K_ζ

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv \frac{\lambda^2 q}{4C} K_\zeta;$$

это соотношение, если принять во внимание предположение $K_\zeta = 0$, и доказывает утверждение *).

*) В дополнение к рассмотренным случаям можно указать еще случай интегрируемости, разобранный Стекловым В. А. (В. А. Стеклов, Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. X, 1899.)

Стеклов Владимир Андреевич родился в 1863 г. в Нижнем Новгороде; умер в 1926 г. в Ленинграде.

После окончания Харьковского университета (1887 г.) был оставлен при нем и назначен ассистентом при кафедре механики (1889 г.).

В 1894 г. защитил магистерскую диссертацию на тему „О движении твердого тела в жидкости", в 1902 г. — докторскую диссертацию на тему „Общие методы решения задач математической физики".

С 1906 г. занимал кафедру в Петербургском университете, а в 1912 г. избран действительным членом Академии наук. В работах Стеклова В. А. рассматриваются различные вопросы движения твердого тела, гидродинамики, теории упругости, но его главные труды посвящены математической физике — обоснованию метода фундаментальных функций. (*Прим. ред.*)