УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что если при движении твердого тела вокруг закрепленной точки O результирующий момент внешних сил остается все время перпендикулярным к угловой скорости, то живая сила постоянна.

Это, в частности, оправдывается, если отсутствуют активные силы, и твердое тело вынуждено благодаря связям соприкасаться с неподвижной поверхностью без трения.

2. Доказать, что в твердом теле, закрепленном в одной из своих точек O, геометрическое место линий действия момента K, приложенного в точке O, представляет собой конус второго порядка, уравнение которого относительно главных осей инерции по отношению к точке O при принятых в тексте обозначениях имеет вид

$$\left(1-\frac{K^2}{2EA}\right)x^2+\left(1-\frac{K^2}{2EB}\right)y^2+\left(1-\frac{K^2}{2EC}\right)z^2=0,$$

а уравнение

$$\frac{x^2}{1-\frac{K^2}{2EA}}+\frac{y^2}{1-\frac{K^2}{2EB}}+\frac{z^2}{1-\frac{K^2}{2EC}}=0$$

есть уравнение конуса, образующие которого перпендикулярны к векторам ω и K одновременно.

3. Для твердого тела, находящегося в движении по Пуансо вокруг одной из своих точек O и отнесенного к своим главным осям инерции относительно точки O, эллипсоиды, уравнения которых имеют вид

$$A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2=D,$$

где D обозначает существенно положительную постоянную $K^2/2E$, называются *кинетическими эллипсоидами*.

Доказать, что при движении твердого тела по инерции площадь диаметрального сечения этого эллипсоида, параллельная неподвижной плоскости τ, с которой согласно представлению Пуансо соприкасается эллипсоид инерции, остается постоянной.

4. Из п. 14 следует, что при движении по инерции тела с гироскопической структурой относительно неподвижной точки оба конуса Пуансо будут конусами вращения. Доказать, что если эллипсоид инерции будет сплюснутым, то половина угла при вершине у неподвижного конуса не может превосходить $19°28'$.

5. Параметрические уравнения полодии. При движении Пуансо мы назвали *полюсом* точку Q пересечения линии действия угловой скорости ω, приложенной в закрепленной точке O, с эллипсоидом инерции относительно этой точки

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1.$$

Из пропорциональности между проекциями p, q, r вектора ω и координатами x, y, z точки Q и из интеграла живых сил

$$2T=Ap^2+Bq^2+Cr^2=2E$$

непосредственно следует

$$x=\frac{p}{\sqrt{2E}},\quad y=\frac{q}{\sqrt{2E}},\quad z=\frac{r}{\sqrt{2E}}.$$

Но так как в силу неизменности результирующего момента количеств движения мы имеем

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const} = K^2,$$

то полюс Q принадлежит, кроме эллипсоида инерции, еще и кинетическому эллипсоиду (упражнение 3)

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = D,$$

где $D = K^2/2E$, так что полодия, геометрическое место полюсов Q в теле, есть алгебраическая кривая четвертого порядка, получающаяся при пересечении двух только что указанных эллипсоидов.

Чтобы найти ее параметрические уравнения, мы предположим, как это можно сделать, не нарушая общности, что $A \geqslant B \geqslant C$, и начнем с замечания, что если речь идет о действительном движении и, следовательно, если полодия действительна, то постоянная D необходимо будет заключена между A и C. Чтобы убедиться в этом, вспомним, что D есть величина, обратная квадрату расстояния точки O от неподвижной плоскости τ, касательной к эллипсоиду инерции в полюсе Q (п. 11), и потому, наверное, будет, заключена между величинами, обратными квадратам наименьшей и наибольшей полуосей этого эллипсоида, т. е. между A и C.

К пучку поверхностей второго порядка, определяемому эллипсоидом инерции и кинетическим эллипсоидом, принадлежит (единственный) конус, уравнение которого есть

$$A(A-D)x^2 + B(B-D)y^2 + C(C-D)z^2 = 0; \tag{1}$$

этот конус в силу ограничения $A \geqslant D \geqslant C$ и того, что он является геометрическим местом осей вращения твердого тела, действителен.

Полодию можно, очевидно, рассматривать как кривую, получающуюся при пересечении эллипсоида инерции и конуса (1). Далее, при $D = B$ этот конус распадается на две действительные плоскости (проходящие через среднюю ось и одинаково наклоненные как к большей, так и к меньшей оси), так что полодия в этом случае состоит из двух эллипсов. При $D = A$ полодия сводится к вершинам, совпадающим с концами наименьшей оси, при $D = C$ — к вершинам, совпадающим с концами наибольшей оси. Отсюда в силу непрерывности следует, что, когда D близко к A, полодия будет образована двумя замкнутыми кривыми вокруг вершин, относящихся к наименьшей оси, когда же D близко к C, мы будем иметь две замкнутые кривые вокруг вершин, соответствующих наибольшей оси. При непрерывном изменении одна из этих форм полодий переходит в другую через два эллипса.

Так как полодия лежит целиком на эллипсоиде инерции, то расстояние u любой ее точки Q от центра O остается, наверное, заключенным между двумя вполне определенными конечными пределами, необходимо заключенными между $1/\sqrt{A}$ и $1/\sqrt{C}$. Для определения расстояния мы обратимся к параметрическому определению полодии, которое получится, если мы разрешим относительно x^2, y^2, z^2 систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= u^2, \\ Ax^2 + By^2 + Cz^2 &= 1, \\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 &= D. \end{aligned}$$

В результате мы придем к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{BCu^2 - (B+C-D)}{(A-C)(A-B)}, \\ y^2 &= \frac{CAu^2 - (C+A-D)}{(B-A)(B-C)}, \\ z^2 &= \frac{ABu^2 - (A+B-D)}{(C-B)(C-A)}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Выражая то обстоятельство, что x^2, y^2, z^2 должны быть положительными, мы получим для u ограничения

$$u^2 \geq \frac{B+C-D}{BC}, \tag{3}$$

$$u^2 \leq \frac{C+A-D}{CA}, \tag{4}$$

$$u^2 \geq \frac{A+B-D}{AB}. \tag{5}$$

Из этих неравенств выводится, что два предела u_1, u_2 $(u_1 \leq u_2)$, между которыми должен изменяться параметр u в уравнениях (2), для всех точек полодии должны быть уточнены следующим образом: прежде всего имеем во всех случаях

$$u_2^2 = \frac{C+A-D}{CA},$$

что же касается u_1^2, то эта величина определится правой частью соотношения (3) или (5), смотря по тому, будет ли $D < B$ или $D > B$ (при $D = B$ оба значения совпадают).

6. Из определения герполодии, как геометрического места точек Q на плоскости τ, вывести на основании рассуждений предыдущего упражнения, что эта кривая остается всегда заключенной внутри кругового кольца с центром, являющимся основанием O_1 перпендикуляра из O на τ, и с радиусами ρ_1, ρ_2, определяемыми равенствами

$$\rho_i^2 = u_i^2 - \frac{1}{D}. \qquad (i = 1, 2).$$

7. Дифференциальное уравнение герполодии. Отнесем герполодию в ее плоскости τ к полярным координатам ρ, α, имеющим в качестве полюса ортогональную проекцию O_1 точки O на τ, и условимся отсчитывать угол α от некоторого ориентированного произвольного неподвижного направления в плоскости τ против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора K (нормального к τ).

Формулы упражнения 5 позволяют выразить прежде всего производные по времени от ρ^2 и α в функциях от самого ρ^2.

Начнем с $\rho^2 = \overrightarrow{O_1Q}^2$. Дифференцируя, получим

$$\frac{d\rho^2}{dt} = 2\,\overrightarrow{O_1Q} \cdot \frac{dQ}{dt}.$$

Но, с одной стороны, имеем (упражнение 5)

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\omega}{\sqrt{2E}};$$

заменяя производную $d\omega/dt$ вектора ω, отнесенного к неподвижным осям в пространстве, производной $\dot{\omega}$, отнесенной к неподвижным осям в теле (т. I, гл. IV, п. 11), получим

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\dot{\omega}}{\sqrt{2E}}.$$

С другой стороны, имеем (упражнение 5)

$$\overrightarrow{O_1Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OO_1} = \frac{\omega}{\sqrt{2E}} - \frac{K}{K\sqrt{D}};$$

в силу тождества

$$\frac{dT}{dt} = K \cdot \dot{\omega};$$

отсюда для движения Пуансо, в котором T сохраняет постоянную величину E, следует $K \cdot \dot{\omega} = 0$.

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{d\rho^2}{dt} = \frac{1}{E} \omega \cdot \dot{\omega},$$

которое после развертывания скалярного произведения на основании уравнений Эйлера [(5′) из п. 8] и подстановки вместо p, q, r выражений $x\sqrt{2E}$, $y\sqrt{2E}$, $z\sqrt{2E}$ перейдет в следующее:

$$\frac{d\rho^2}{dt} = 2\sqrt{2E}\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right) xyz.$$

Теперь достаточно принять во внимание равенства (2) и $u^2 = \rho^2 + 1/D$, чтобы этому дифференциальному уравнению придать вид

$$\frac{d\rho^2}{dt} = \sqrt{f(\rho^2)}, \tag{6}$$

где $f(\rho^2)$ означает многочлен третьей степени относительно ρ^2.

Переходя теперь к α, мы выразим аналогично через ρ^2 производную от α по t или, что будет более удобно, удвоенную секторную скорость $\rho^2 d\alpha/dt$ полюса Q в плоскости τ относительно точки O_1. Речь идет о скалярной величине, которая получится от проектирования вектора

$$\overrightarrow{O_1Q} \times \frac{dQ}{dt}$$

на ориентированное направление K (нормальное к τ) так что можно будет написать

$$\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dQ}{dt} \times K \cdot \overrightarrow{O_1Q}.$$

Достаточно принять теперь во внимание выведенные выше выражения для dQ/dt и $\overrightarrow{O_1Q}$, чтобы получить

$$\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2EK} \dot{\omega} \times K \cdot \omega.$$

После этого, развертывая определитель, соответствующий смешанному произведению в правой части, по составляющим вектора K и принимая во внимание первые интегралы движения (20) и (21′) из п. 9, мы придем к уравнению

$$\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2EK}\left(Ap^2 \frac{2EA - K^2}{BC} + Bq^2 \frac{2EB - K^2}{CA} + Cr^2 \frac{2EC - K^2}{AB}\right),$$

которое, после подстановки вместо p^2, q^2, r^2 их выражений через $\rho^2 = u^2 - 1/D$ (упражнение 5), сведется к следующему:

$$\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2E}{K}(\rho^2 + h), \tag{7}$$

где

$$h = \frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD}.$$

Из уравнений (6), (7) следует, что дифференциальным уравнением герполодии, если положим $\rho^2 = \zeta$, будет

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} = \frac{2E}{K} \quad \frac{\zeta + h}{\zeta \sqrt{f(\zeta)}}.$$

Оно приводит в общем случае к одной эллиптической квадратуре. Показать, что в частном случае $D = B$ квадратура может быть выполнена в элементарных трансцендентных функциях.

8. Второе представление Пуансо для движения твердого тела с одной закрепленной точкой. Показать сначала (гл. IV, п. 18), что проекция угловой скорости ω на направление нормали к плоскости τ (т. е. на направление вектора K) будет постоянной, и если ориентируем это направление в ту же сторону, что и вектор K, то она будет равна $2E/K$. Следовательно, составляющую ω_1 вектора ω в плоскости τ можно представить в виде

$$\omega_1 = \omega - \frac{K}{D}, \tag{8}$$

где, как и в упражнении 3, положено $D = K^2/2E$. Заметив это, рассмотреть вместо неподвижной плоскости τ ту плоскость τ_1, проходящую через O и параллельную τ, которая вращается с угловой скоростью $(2E/K^2)K$ вокруг неподвижной линии действия вектора K (перпендикулярного к ней). Угловая скорость твердого тела относительно этой плоскости τ_1 на основании теоремы сложения вращений будет, очевидно, представлена вектором ω_1, который в силу построения лежит в τ_1, так что в относительном движении твердого тела, по отношению к τ_1, неподвижный конус Λ Пуансо сводится к самой плоскости τ_1, и движение можно осуществить путем качения без скольжения по плоскости τ_1 конуса, неподвижного в теле, геометрического места линий действия вектора ω_1 (приложенного в O). Доказать, что этот конус будет конусом второго порядка. Для этой цели заметим, что если мы обозначим через x_1, y_1, z_1 проекции вектора ω_1, то на основании геометрического равенства (8) будем иметь

$$x_1 = \left(1 - \frac{A}{D}\right)p, \qquad y_1 = \left(1 - \frac{B}{D}\right)q, \qquad z_1 = \left(1 - \frac{C}{D}\right)r;$$

так как p, q, r, так же как и проекции x, y, z вектора $\overrightarrow{OQ}$, удовлетворяют некоторому однородному квадратному уравнению (упражнение 5), то то же будет иметь место и для x_1, y_1, z_1.

Дарбу[1]), используя это второе представление Пуансо, предложил прибор, на котором можно проследить не только последовательность положений, занимаемых телом, но также и закон движения.

9. Проверить путем рассуждений, аналогичных приведенным в п. 29, что тяжелый твердый стержень, закрепленный в одной точке, динамически эквивалентен (гл. V, п. 38) сферическому маятнику.

10. Динамическая эквивалентность тяжелого гироскопа сферическому гироскопу (т. е. гироскопу, имеющему эллипсоидом инерции относительно неподвижной точки сферу). Первые интегралы (42), (44), (45) из п. 27 при обозначениях

$$r' = \frac{C}{A}r, \quad E' = E + \frac{1}{2}\frac{C-A}{A}Cr^2$$

[1]) Заметка Despeyrous, Cours de Mécanique; т. 2, Paris, 1884—1886.

можно написать в виде

$$r' = \text{const},$$

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2 + r'\gamma_3) = K_\zeta^0,$$

$$\frac{1}{2}A(p^2 + q^2 + r'^2) - Pz_0\gamma_3 = E';$$

в этой форме они определяют движение тяжелого сферического гироскопа, имеющего с данным общие структурные параметры A, P, z_0 и значения аргументов p, q, γ_1, γ_2, γ_3, а постоянная r должна быть заменена через

$$r' = \frac{C}{A}r.$$

Это доказывает, что любой тяжелый гироскоп, у которого A и C представляют собой экваториальный и осевой моменты инерции, движется как сферический гироскоп с моментом инерции A, но имеет другую угловую скорость собственного вращения. Так как

$$r = \frac{A}{C}r' = r' + \frac{A-C}{C}r',$$

то мы видим, что угловая скорость r' сферического гироскопа должна быть увеличена на $(A-C)r'/C$ для того, чтобы она сделалась равной угловой скорости.

11. Равномерное вращение тяжелого твердого тела, закрепленного в одной точке, в частных случаях, не рассмотренных в пп. 25, 26 (ср. 125). Конус Штауде является неопределенным, т. е. его уравнение (39′) или (39″) сводится к тождеству, в трех следующих случаях (и только в них):

а) закрепленная точка совпадает с центром тяжести ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$);

б) эллипсоид инерции есть сфера ($A = B = C$);

в) эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, а центр тяжести принадлежит оси симметрии ($A = B$, $x_0 = y_0 = 0$), если за ось z принимается ось симметрии (случай Лагранжа; ср. п. 37).

Случай а) входит в случай Эйлера — Пуансо и рассмотрен в п. 12.

В случае б), естественно, остаются в силе рассуждения п. 25, которые приводят к необходимым условиям: ось вращения направлена вертикально в пространстве и принадлежит (в теле) конусу Штауде (это последнее условие должно быть, по предположению, автоматически удовлетворено).

Доказательство же достаточности (п. 26), предполагающее неравенство трех моментов инерции, будет не пригодно.

Дополнить исследование, взяв, например, уравнение (34) из п. 22 и выведя из него, что ось вращения должна содержать центр тяжести.

Случай в) Лагранжа рассмотрен в п. 35.

Заметив все это, предположить, что уравнение конуса Штауде не приводится к тождеству, и рассмотреть дискриминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & (A-B)z_0 & (C-A)y_0 \\ (A-B)z_0 & 0 & (B-C)x_0 \\ (C-A)y_0 & (B-C)x_0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(B-C)(C-A)(A-B)x_0y_0z_0.$$

Доказать, что соответствующий конус второго порядка может выродиться в две различные плоскости (но никогда в одну двойную) и что это может произойти тогда и только тогда, когда эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения или же когда центр тяжести принадлежит одной из

главных плоскостей инерции; при этом, конечно, не должны встречаться дальнейшие особенности (полная неопределенность), как в исключенных случаях (а), (б) или (в). Частным примером распадения является пример Гесса (п. 59).

12. Теорема Якоби о разложении движения тяжелого гироскопа на два движения по Пуансо. Этот вопрос рассматривался различными авторами. Среди доказательств наиболее простым является доказательство, данное Падова (Padova, *Atti del R. Ist. Veneto*, Ser. VII, т. III, 1892, стр. 847—855). В заметке Падова находятся также и библиографические указания. Изучающий мог бы сделать более легкими формальные выкладки, пользуясь векторным исчислением.

Более изящным и быстрее ведущим к цели является геометрически кинематический способ, данный Сен-Жерменом. Ср., например, A. Gray A treatise on gyrostatics and rotational motion (London, Macmillan, 1918), стр. 464 *).

13. Распространить движение твердого тела около закрепленной точки на случай вязкого сопротивления, происходящего от окружающего воздуха; ср. гл. V, упражнение 24, или также E. Padova, Sul moto di rotazione di un corpo rigido, *Atti Accad. di Torino*, т. XXI, 1885—1886, стр. 38—47.

14. Движение гироскопа около точки его оси под действием консервативной силы, являющейся производной от потенциала, зависящего только от θ. В этом предположении (гл. IV, п. 5) результирующий момент относительно неподвижной точки активных сил будет направлен по линии узлов и будет поэтому перпендикулярен к неподвижной оси $O\zeta$. Следовательно, для задач этого типа, как и в случае тяжелого гироскопа ($U = mg\cos\theta$), имеют место интеграл $r = \text{const}$ и интегралы живых сил и момента количеств движения относительно вертикали. Поэтому такие задачи могут приводиться к квадратурам при помощи способов, рассмотренных в пп. 28, 33: в частности, угол нутации θ будет определяться одним уравнением обычного типа $\dot{s}^2 = \Phi(s)$ при $s = \cos\theta$.

Доказать, что при

$$U = \frac{\lambda}{\operatorname{tg}^2\theta} \qquad (\lambda = \text{const})$$

угол θ можно выразить в функции от времени при помощи элементарных трансцендентных.

15. Среди задач, указанных в предыдущем упражнении, заслуживают особого упоминания в силу их астрономического интереса те, в которых потенциал U будет вида $\lambda\cos^2\theta$ или, что по существу одно и то же, $\lambda\sin^2\theta$ при $\lambda = \text{const}$. Мы будем иметь случай вернуться к ним в §§ 8, 10 гл. X.

Здесь же отметим только, что речь идет о задачах, приводящихся к эллиптическим функциям. Ср. E. Padova, *Rend. Lincei*, *s.* IX, т. II, 1886, стр. 135—140, 168—174, где также изложена механическая иллюстрация вопроса.

16. Задача Бруна[1]). Речь идет о движении твердого тела вокруг одной его неподвижной точки O в предположении, что каждый материальный элемент dm тела притягивается пропорционально расстоянию

*) Этот случай рассмотрен в книге: Суслов Г. К., Теоретическая механика, 1946, стр. 557—563. (*Прим. ред.*)

[1]) De Brun, *Arkiv för Math.*, Stoccolma, т. VI, № 9, 1910.

неподвижной плоскостью, проходящей через O (а также, конечно, пропорционально массе).

Если мы примем эту неподвижную плоскость за плоскость $\zeta = 0$, то сила притяжения, действующая на элемент dm, будет иметь в качестве проекций на неподвижные оси 0, 0, $-\lambda\zeta\, dm$, где λ обозначает положительную постоянную, а проекции ее на главные оси инерции тела относительно точки O будут

$$-\lambda\zeta\gamma_1\, dm, \quad -\lambda\zeta\gamma_2\, dm, \quad -\lambda\zeta\gamma_3\, dm,$$

где γ_1, γ_2, γ_3 означают, как обычно, направляющие косинусы неподвижной оси ζ относительно осей, неподвижных в теле, и, конечно, $\zeta = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z$. Такая элементарная сила является производной от потенциала

$$-\frac{1}{2}\lambda\zeta^2\, dm,$$

так что, интегрируя и принимая во внимание, что оси $Oxyz$ являются главными осями инерции, мы найдем для потенциала выражение

$$U = -\frac{1}{2}\lambda(s_1\gamma_1^2 + s_2\gamma_2^2 + s_3\gamma_3^2),$$

где s_1, s_2, s_3 представляют собой главные моменты инерции относительно главных плоскостей

$$s_1 = \int x^2\, dm, \quad s_2 = \int y^2\, dm, \quad s_3 = \int z^2\, dm;$$

достаточно вспомнить, что если мы обозначим через I полярный момент инерции тела относительно точки O, то будем иметь

$$A = s_2 + s_3, \quad B = s_3 + s_1, \quad C = s_1 + s_2,$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{2}(A + B + C) = I;$$

можно написать, по меньшей мере с точностью до несущественной аддитивной постоянной,

$$U = \frac{1}{2}\lambda(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2).$$

Посредством столь же легкого интегрирования получим выражения для проекций результирующего момента активных сил

$$M_x = \lambda\gamma_2\gamma_3(B - C), \quad M_y = \lambda\gamma_3\gamma_1(C - A), \quad M_z = \lambda\gamma_1\gamma_2(A - B).$$

Теперь очевидно, что задача о движении тела при этих условиях, как и в случае тяжелого тела, допускает интеграл живых сил

$$T - U = E,$$

а также и интеграл моментов количеств движения

$$K_\zeta = \text{const},$$

так как элементарная сила параллельна оси ζ и, следовательно, момент ее относительно этой оси равен нулю.

Проверить на основании уравнений (5) Эйлера (п. 1) и уравнений (35′) Пуансо (п. 22), что существует также интеграл

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + \lambda(BC\gamma_1^2 + CA\gamma_2^2 + AB\gamma_3^2) = \text{const},$$

после чего будет обеспечена интегрируемость задачи в квадратурах (ср. п. 24).

17. Барогироскоп. Барогироскоп представляет собой аппарат, способный обнаруживать вращение Земли. Как и в случае гироскопической буссоли, речь идет о гироскопе, закрепленном в одной из точек его оси таким образом, что эта ось вынуждена оставаться в некоторой плоскости π, неизменно связанной с Землей; но в то время как в гироскопической буссоли, которая была схематически изучена в пп. 54—57, закрепленная точка O должна была совпадать с центром тяжести O, в барогироскопе центр тяжести G надо предполагать отличным от O, но близким к ней. Это может быть осуществлено посредством очень простого приспособления (например, посредством малого перемещения добавочной массы), тогда как экспериментально гораздо труднее получить строгое совпадение точки O с центром тяжести G, как это требуется для гироскопической буссоли.

Для функционирования барогироскопа типичным случаем будет тот, когда плоскость π вертикальна; мы здесь рассмотрим даже более частный случай, предполагая, что плоскость π является плоскостью меридиана, проходящего через точку O.

Если при этих условиях мы сообщим барогироскопу быстрое вращение около собственной оси и предоставим его самому себе, направив ось вертикально и поместив центр тяжести G ниже закрепленной точки O, то он не сохранит этого своего положения, которое было бы положением устойчивого равновесия при отсутствии гироскопического вращения, а примет другое положение кажущегося устойчивого равновесия, при котором ось будет отклонена от вертикали. Это отклонение (в направлении, зависящем от стороны вращения) будет тем более ощутительным, чем больше будет гироскопическая угловая скорость r и чем меньше расстояние $l = OG$. Причину этого явления мы легко найдем, если примем во внимание вращение Земли.

Для этой цели мы возьмем снова обозначения и соглашения, которыми мы пользовались в пп. 54—57, и начнем с замечания, что барогироскоп движется под совместным действием веса и сложных центробежных сил в смысле, уточненном в п. 56. Единственная разница с гироскопической буссолью заключается в том, что момент относительно точки O веса не равен больше нулю, а имеет в направлении векторов $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{k}$ (так как здесь взято $\alpha = \pi/2$) составляющие $-mgl\sin\theta$ и 0. Если введем, как в п. 55, аргумент $\theta = s$, который здесь представляет собой угол отклонения гироскопической оси от вертикали, то получим уравнения движения в виде (ср. (103′) текста)

$$A\ddot{\theta} = CrR_t - mgl\sin\theta, \quad C\dot{r} = -C\dot{\theta}R_t. \tag{9}$$

Эти уравнения, как и уравнения (103′), допускают интеграл живых сил, принимающий здесь, при наличии силы тяжести, вид

$$\frac{1}{2}(A\dot{\theta}^2 + Cr^2) - mgl\cos\theta = E.$$

Для полной постановки задачи необходимо определить проекцию R_t угловой скорости $\boldsymbol{R}$ Земли. Обозначив через $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ единичные векторы нисходящей вертикали в точке O и, соответственно, оси мира, направленной с севера на юг, условимся за положительное направление вращения в плоскости меридиана от $\boldsymbol{u}$ к $\boldsymbol{w}$ считать то, которому соответствует угол, меньший π. Вследствие этого из равенств

$$\widehat{\boldsymbol{uk}} = \theta, \quad \widehat{\boldsymbol{kt}} = \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{\boldsymbol{uw}} = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

где λ есть широта точки O, следует, что $\widehat{\boldsymbol{wt}} = \theta + \lambda$ и потому

$$R_t = -R\cos(\theta + \lambda).$$

Подставляя это выражение R_t во второе из уравнений (9) и интегрируя, получим

$$r - R\sin(\theta + \lambda) = \text{const}; \tag{10}$$

достаточно было бы подставить полученное таким образом выражение для r в интеграл живых сил, чтобы иметь уравнение первого порядка обычного типа, интегрируемого в квадратурах, для θ, $\dot\theta^2 = \Phi(\theta)$ (ср. § 6 гл. I). Мы предоставляем читателю убедиться на этом уравнении в динамической эквивалентности настоящей задачи с задачей о движении простого маятника.

Здесь же, имея в виду поставленную вначале цель, заметим, что, так как угловая скорость R Земли весьма мала по сравнению с начальным значением r_0 гироскопической угловой скорости, таким же будет в силу равенства (10) и разность между любым значением r и его начальным значением. Поэтому приближенно в первом уравнении (9) можно подставить r_0 вместо r, после чего, принимая также во внимание выражение для R_t, мы придем к уравнению

$$A\ddot\theta = -Cr_0R\cos(\theta + \lambda) - mgl\sin\theta;$$

отсюда ясно, что задача имеет меростатическое решение $\theta = \text{const}$, в котором значение Θ угла θ определяется равенством

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda - \dfrac{mgl}{Cr_0R}}.$$

Угловая скорость R (соответствующая одному обороту в 24 часа) настолько мала, что при больших значениях r_0 (например, 100 оборотов в секунду) произведение r_0R можно принять еще достаточно малым по сравнению с mgl/C для того, чтобы знаменатель выражения для $\operatorname{tg}\Theta$ имел знак второго члена. Мы видим, таким образом, что Θ имеет знак, обратный знаку r_0, т. е. отклонение гироскопической оси (направленной вниз) происходит к северу или к югу, в зависимости от того, будет ли гироскопическое вращение правым или левым. Отклонение будет тем ощутительней, чем больше будет при прочих равных условиях r_0 и чем меньше l.

18. Возьмем снова задачу предыдущего упражнения в предположении, что плоскость π благодаря связям остается вертикальной, но отличной от плоскости меридиана. Доказать, что:

1) какова бы ни была ориентировка вертикальной плоскости π, в ней для барогироскопа найдется положение кажущегося устойчивого равновесия (меростатическое решение $\theta = \text{const}$ уравнений движения);

2) соответствующее значение Θ отклонения оси от вертикали, зависящее от ориентировки плоскости π, будет наибольшим, когда π совпадает с плоскостью меридиана (предыдущее упражнение).

Способ остается тот же, что и в предыдущем упражнении, поэтому все сводится к определению R_t. Для этой цели, сохраняя обозначения предыдущего упражнения, обозначим через $O\xi$ нисходящую вертикаль в точке O (с единичным вектором $\boldsymbol{u}$) и через $O\eta$ — прямую в плоскости $\boldsymbol{uw}$ меридиана, перпендикулярную к $O\xi$ и ориентированную таким образом, чтобы было $\widehat{\xi O\eta} = \pi/2$, при условии, что сохраняется положительное направление вращений в этой плоскости, принятое в предыдущем упражнении. Обозначив через γ угол, заключенный между 0 и π, на который надо повернуть в сторону, соответствующую правому вращению вокруг $O\xi$, плоскость меридиана, чтобы привести ее в совпадение с плоскостью π, мы обозначим через $O\xi\eta_1\zeta_1$ систему

осей, которая получится в результате такого вращения из системы $O\xi\eta\zeta$, так что плоскость $O\xi\eta_1$ совпадет с π. Тогда будем иметь

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1 \cos\chi - \lambda_1 \sin\chi, \quad \zeta = \eta_1 \sin\chi + \zeta_1 \cos\chi.$$

Далее в плоскости $O\xi\eta_1$, содержащей единичные векторы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{t}$, отклонение вектора $\boldsymbol{t}$ есть $\theta + \pi/2$, так что его направляющие косинусы относительно осей $O\xi\eta_1\zeta_1$ будут $-\sin\theta$, $\cos\theta$, 0 и, следовательно, относительно осей $O\xi\eta\zeta$ будут $-\sin\theta$, $\cos\theta\cos\chi$, $\cos\theta\sin\chi$. Так как направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{w}$ относительно осей $O\xi\eta\zeta$ суть $\sin\lambda$, $\cos\lambda$, O, то заключаем, что

$$R_t = -R\cos\widehat{\boldsymbol{w}\boldsymbol{t}} = -R(\cos\theta\cos\lambda\cos\chi - \sin\theta\sin\lambda).$$