

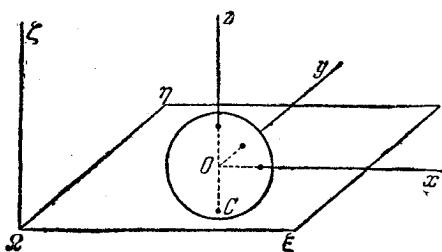
## Глава IX

### ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ДВИЖЕНИЯ С КАЧЕНИЕМ. СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ВНУТРЕННИМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

#### § 1. Биллиардный шар

1. Рассмотрим движение тяжелого однородного твердого шара радиуса  $R$  по шероховатой горизонтальной плоскости, которую мы примем за плоскость  $\zeta = 0$  неподвижных осей  $\Omega\xi\eta\zeta$  с осью, направленной по вертикали вверх (фиг. 24). Очевидно, что речь идет о системе с пятью степенями свободы.

Обозначим через  $\alpha, \beta$  первые две координаты (переменные) центра  $O$  шара; третья координата остается постоянно равной  $R$ . За подвижную систему осей (как в пространстве, так и в теле) мы возьмем ту, которая имеет начало в точке  $O$ , и оси  $x, y, z$ , соответственно параллельные и одинаково направленные с осями  $\xi, \eta, \zeta$ .



Фиг. 24.

В силу этого точки  $C$ , в которой в любой момент шар соприкасается с опорной плоскостью, по отношению к неподвижным осям имеет координаты  $\alpha, \beta, 0$ , а по отношению к подвижным — координаты  $0, 0, -R$ .

Для уточнения и пояснения постановки задачи мы предположим несколько замечаний. Во всякий момент в соответствующей точке соприкосновения  $C$  плоскость будет действовать на шар с некоторой реактивной силой, которую мы, пренебрегая трением качения и вращения (т. I, гл. 13, § 6), будем предполагать представленной в виде одной силы  $\Phi$ . Согласно раз навсегда установленным принципам (гл. I, § 8) мы будем считать действительными законы динамического или, в частности, статического трения.

При этом необходимо отличать моменты времени, когда точка  $C$ , рассматриваемая как принадлежащая сфере, имеет скорость  $v_C$ , отличную от нуля, от моментов, когда эта скорость равна нулю. Если обозначим через  $v_0$  и  $\omega$  характеристические векторы (относительно точки  $O$ ) движения шара (скорость точки  $O$  и угловую скорость шара), первый из которых, имея относительно неподвижных осей составляющие  $\alpha, \beta, 0$ , постоянно остается параллельным опорной

плоскости, то скорость точки  $C$  определится, как известно, равенством

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC};$$

отсюда мы видим, что эта скорость, если она не равна нулю, лежит в плоскости  $\zeta=0$ . Таким образом, мы должны отличать моменты, когда шар скользит по плоскости ( $\mathbf{v}_C \neq 0$ ), от моментов, когда он находится в состоянии чистого качения вокруг оси, проходящей через  $C$  и лежащей в опорной плоскости ( $\mathbf{v}_C = 0$ ).

В ближайшем пункте мы подтвердим, что всякая фаза движения со скольжением *после некоторого конечного промежутка времени* необходимо оканчивается состоянием чистого качения, т. е. скорость  $v_C$  при этом обращается в нуль; если в некоторый момент  $t_1$  выполняется это последнее условие, то дальнейшее движение шара может представлять собой только чистое качение.

Поэтому в более общем случае движение шара по плоскости при принятых условиях будет состоять из двух различных фаз: за начальной фазой движения со скольжением следует фаза чистого качения.

**2. Фаза скольжения.** Обозначив для простоты через  $\boldsymbol{\omega}$  *скорость скольжения*, которую выше мы обозначали через  $\mathbf{v}_C$  т. е. скорость точки шара, находящейся в данный момент в соприкосновении с плоскостью, возьмем для нее выражение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC}$$

через характеристические векторы  $\mathbf{v}_0$  и  $\boldsymbol{\omega}$  движения шара, относящиеся к точке  $O$ , и спроектируем это равенство на оси  $\xi$  и  $\eta$ . Обозначая, как обычно, через  $\pi$ ,  $\chi$ ,  $\rho$  проекции угловой скорости на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , получим

$$v_\xi = \dot{\alpha} - R\chi, \quad v_\eta = \dot{\beta} + R\pi. \quad (1)$$

С другой стороны, если в фазе скольжения (т. е. в предположении  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ ) обозначим через  $N$  нормальную составляющую реакции опоры  $\Phi$ , а через  $A$  — силу трения (т. е. касательную составляющую  $\Phi$ ), то в силу законов динамического трения получим

$$A_\xi = -fN \frac{v_\xi}{v}, \quad A_\eta = -fN \frac{v_\eta}{v}, \quad A_\zeta = 0,$$

где  $f$  означает коэффициент трения между плоскостью и шаром, который надо считать известным.

Замечая теперь, что внешние силы сводятся в данном случае к весу и к реакции плоскости, мы можем легко дать явный вид основным уравнениям движения шара относительно центра тяжести  $O$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}, \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Обозначая через  $m$  массу шара и припоминая, что  $Q = mv_0$  (гл. IV, п. 12), получим после проектирования первого уравнения на неподвижные оси

$$\ddot{a} = -fN \frac{v_\xi}{v}, \quad m\ddot{\beta} = -fN \frac{v_\eta}{v}, \quad 0 = -mq + N \quad (2)$$

или же, по исключении  $N$ ,

$$\ddot{a} = -fq \frac{v_\xi}{v}, \quad \ddot{\beta} = -fq \frac{v_\eta}{v}. \quad (2')$$

Что же касается второго основного уравнения, то вспомним, что для шара всякий диаметр есть главная ось инерции и что момент инерции шара относительно какого-нибудь диаметра определяется равенством

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$

Следовательно, на основании известных соотношений между проекциями векторов результирующего момента количества движения  $K$  и угловой скорости  $\omega$  имеем

$$K_\xi = \frac{2}{5}mR^2\pi, \quad K_\eta = \frac{2}{5}mR^2\chi, \quad K_\zeta = \frac{2}{5}mR^2\rho,$$

а так как путем прямого вычисления находим

$$M_\xi = -fmRg \frac{v_\eta}{v}, \quad M_\eta = fmRg \frac{v_\xi}{v}, \quad M_\zeta = 0,$$

то, проектируя основное уравнение моментов на неподвижные оси, придем к трем уравнениям

$$\frac{2}{5}\dot{\pi} = -fg \frac{v_\eta}{Rv}, \quad \frac{2}{5}\dot{\chi} = fg \frac{v_\xi}{Rv}, \quad \dot{\rho} = 0. \quad (3)$$

Последнее из них показывает, что во время движения вертикальная составляющая угловой скорости  $\omega$  остается постоянной. Для остальных шести неизвестных  $a$ ,  $\beta$ ,  $\pi$ ,  $\chi$ ,  $v_\xi$ ,  $v_\eta$  имеем шесть уравнений (1), (2'), (3).

Интегрирование почти очевидно. Дифференцируя уравнения (1) и исключая  $\ddot{a}$ ,  $\ddot{\beta}$ ,  $\dot{\pi}$ ,  $\dot{\chi}$  при помощи уравнений (2), (3), получим

$$\dot{v}_\xi = -\frac{7}{2}fg \frac{v_\xi}{v}, \quad \dot{v}_\eta = -\frac{7}{2}fg \frac{v_\eta}{v};$$

поэтому, вводя угол  $\theta$ , составляемый в плоскости  $\zeta = 0$  вектором  $v$  с осью  $\xi$ , так что имеем

$$v_\xi = v \cos \theta, \quad v_\eta = v \sin \theta,$$

и принимая во внимание известные тождества (т. I, гл. II,пп. 20 и 19)

$$v^2\dot{\theta} = v_\xi \dot{v}_\eta - \dot{v}_\xi v_\eta, \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2 = \dot{v}_\xi \dot{v}_\xi + v_\eta \dot{v}_\eta,$$

заключаем, что

$$\dot{\theta} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{7}{2} fg. \quad (4)$$

Отсюда, во-первых, следует, что скорости тех точек шара, которые последовательно приходят в соприкосновение с плоскостью, имеют в соответствующие моменты соприкосновения одинаковые направление и сторону, и, во-вторых, для общей величины этих скоростей мы получаем выражение

$$v = v^0 - \frac{7}{2} fgt,$$

где  $v^0$  есть начальное значение  $v$ , которое на основании соотношений (1) можно выразить при помощи начальных значений  $\dot{a}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\pi$  и  $\chi$ .

Таким образом, как уже указывалось в предыдущем пункте, по истечении конечного промежутка времени

$$t_1 = \frac{2}{7} \frac{v^0}{fg}$$

скорость  $v$  обращается в нуль. Теперь легко убедиться, что в этот момент кончается первая фаза движения, так как скорость  $v$ , начиная с этого момента, должна быть постоянно равна нулю. Действительно, если бы  $v$ , изменяясь непрерывно, принимала при  $t > t_1$  положительные значения, то ее производная должна быть положительной при  $t = t_1$ , а следовательно, и тотчас же после этого момента; но при тех же самых предположениях были бы справедливы сделанные ранее выводы для моментов времени, непосредственно следующих за  $t_1$ , и, в частности, оставалось бы в силе второе из уравнений (4), которое здесь показывает, что должно быть  $\frac{dv}{dt} < 0$ .

Поэтому, действительно, в момент  $t = t_1$  оканчивается фаза скольжения, чтобы уступить место последующей фазе чистого качения.

Остановимся еще на первой фазе движения для вычисления  $\alpha$  и  $\beta$  и возьмем одну из осей опорной плоскости, например  $\dot{\eta}$ , в направлении (неизменном) скорости  $v$ , благодаря чему, так как  $v_\xi = 0$ ,  $v_\eta = v$ , уравнения (2) принимают вид

$$\ddot{\alpha} = 0, \quad \ddot{\beta} = -fg^0. \quad (5)$$

Отсюда следует, что движение точки  $C$  по опорной плоскости\*) (и, следовательно, центра  $O$  сферы в горизонтальной плоскости) составляется из равномерного движения по оси  $\xi$  и равнозамедленного

\*) Речь идет о движении геометрической точки  $C$ , а не о движении точки тела. (Прим. ред.)

движения по оси  $\eta$ , так что, вообще говоря, движение происходит по параболе, ось которой параллельна постоянной скорости скольжения  $v$ .

Движение точки  $C$  может свестись, в частности, к простому прямолинейному равнозамедленному движению; это произойдет тогда и только тогда, когда будет равно нулю начальное значение  $\dot{\alpha}^0$  величины  $\dot{\alpha}$ ; это можно также (независимо от специального выбора осей, принятого выше) выразить условием, что начальная скорость  $\dot{\alpha}^0$ ,  $\dot{\beta}^0$ , 0 центра должна быть направлена так же, как скорость  $v$  скольжения. Аналитически это условие, на основании уравнений (1), если написать их для начального момента, выражается равенством

$$\dot{\alpha}^0 \pi^0 + \dot{\beta}^0 \chi^0 = 0,$$

так что можно сказать, что центр шара будет двигаться прямолинейно только тогда, когда в начале движения скорость этого центра перпендикулярна к угловой скорости.

Закон, по которому изменяются с временем проекции  $\pi$  и  $\chi$  угловой скорости, определяется во всех случаях уравнениями (3), которые в предположении, что ось  $\eta$  идет в направлении (неизменном) скорости скольжения, принимают вид

$$\dot{\pi} = -\frac{5fg}{2R}, \quad \dot{\chi} = 0;$$

из этих уравнений следует, что проекция  $\chi$  (в направлении скорости скольжения) постоянна, так же как и вертикальная проекция  $p$ , а проекция

$$\pi = \pi^0 - \frac{5fg}{2R} t$$

убывает с течением времени, пока к концу фазы скольжения, т. е. к моменту  $t_1$ , не достигнет наименьшего значения

$$\pi^0 - \frac{5fg}{7R}.$$

**3. ФАЗА КАЧЕНИЯ.** При отсутствии скольжения из равенств (1) можно получить уравнения (неголономных связей чистого качения; см. т. I, гл. VI, п. 11)

$$\dot{\alpha} - R\gamma = 0, \quad \dot{\beta} + R\pi = 0; \quad (6)$$

так как трение об опорную плоскость в этом случае полностью идет на то, чтобы препятствовать скольжению или, если угодно, чтобы в любой момент в силу соотношений (6) ограничивать виртуальные перемещения системы, то можно применить общее уравнение динамики,

которое здесь, так как речь идет о твердом теле, принимает вид (гл. V, п. 27)

$$\left(\mathbf{R}^{(a)} - \frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right) \cdot \delta\mathbf{O} + \left(\mathbf{M}^{(a)} - \frac{d\mathbf{K}}{dt}\right) \cdot \delta\omega = 0, \quad (7)$$

где, как мы знаем,  $\mathbf{R}^{(a)}$  и  $\mathbf{M}^{(a)}$  обозначают результирующую силу и результирующий момент относительно центра тяжести  $O$  только одних активных сил, а  $\delta\mathbf{O}$  и  $\delta\omega$  представляют собой виртуальное поступательное перемещение и виртуальный бесконечно малый поворот шара.

Заметим теперь, что: 1) момент единственной активной силы, т. е. веса, относительно точки  $O$  равен нулю; 2) как и в предыдущем пункте имеем

$$\begin{aligned} Q_\xi &= m\dot{\alpha}, \quad Q_\eta = m\dot{\beta}, \quad Q_\zeta = 0; \\ K_\xi &= I\pi, \quad K_\eta = I\chi, \quad K_\zeta = I\rho \quad \text{при} \quad I = \frac{2}{5}mR^2; \end{aligned}$$

3) при любом виртуальном перемещении шара проекции вектора  $\delta\mathbf{O}$  есть  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ ,  $0$ , а проекция вектора  $\delta\omega$  на основании уравнений (6) и определения виртуальных перемещений неголономной системы (т. I, гл. XI, п. 17) будут

$$\delta\pi = -\frac{1}{R}\delta\beta, \quad \delta\chi = \frac{1}{R}\alpha\delta, \quad \delta\rho$$

при произвольных  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ ,  $\delta\rho$ .

Принимая во внимание все это, можно написать уравнение (7) в виде

$$\left(\ddot{\alpha} + \frac{2}{5}R\dot{\chi}\right)\delta\alpha + \left(\ddot{\beta} - \frac{2}{5}R\dot{\pi}\right)\delta\beta - \frac{2}{5}R^2\dot{\rho}\delta\rho = 0;$$

это уравнение в силу произвольности  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ ,  $\delta\rho$  распадается на три уравнения

$$\ddot{\alpha} + \frac{2}{5}R\dot{\chi} = 0, \quad \ddot{\beta} - \frac{2}{5}R\dot{\pi} = 0, \quad \dot{\rho} = 0. \quad (8)$$

Уравнения (8) вместе с уравнениями (6) дают пять уравнений между пятью неизвестными  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\pi$ ,  $\chi$ ,  $\rho$ .

Естественно, что те же уравнения могли бы быть получены путем исключения неизвестной реакции  $\Phi$  из основных уравнений.

Из последнего из уравнений (8) следует, что и в этом случае имеем  $\rho = \text{const}$ , а два других на основании уравнений (6) дают

$$\ddot{\alpha} = 0, \quad \ddot{\beta} = 0,$$

так что мы заключаем, что в фазе чистого качения движение центра шара будет прямолинейным и равномерным.

После этого из тех же уравнений (6) мы находим, что во время движения вместе с  $\rho$  остаются постоянными также  $\pi$  и  $\chi$ , т. е. остается

неизменной угловой скорость шара  $\omega$ ; а так как  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$  в силу тех же уравнений (6) пропорциональны  $\chi$  и  $-\pi$ , то центр шара движется в направлении (параллельном плоскости опоры), перпендикулярном к угловой скорости  $\omega$ .

Предыдущее заключение о бесконечной продолжительности чистого качения существенным образом зависит от условия, что мы пренебрегаем трением качения. Если бы мы приняли во внимание трение качения аналогично тому, как это делалось для диска (гл. VII, п. 19), то нашли бы, что движение должно прекратиться по истечении конечного промежутка времени.

**4. Замечание о реакции  $\Phi$  опорной плоскости.** В предыдущем пункте мы видели, что при  $t > t_1$  уже не может быть скольжения. Далее мы исследовали движение чистого качения, допуская неявно, что плоскость в точке опоры  $C$  способна развить такую реакцию  $\Phi$ , которая обеспечивает условия (6) неголономной связи (и согласуется с принципом виртуальных работ); теоретически этот способ правилен, так как, очевидно, выполняется условие, что работа реакции связи (в силу неподвижности точки  $C$ ) равна нулю. Однако, физически, нельзя отвлечься от того факта, что реакция  $\Phi$  как реакция опоры подчиняется закону статического трения, т. е. должна содержаться внутри конуса трения, имеющего вершину  $C$ . Теперь важно отметить, что это условие будет, наверное, удовлетворено в нашем случае, потому что из равномерности горизонтального движения центра тяжести непосредственно следует, что реакция  $\Phi$  будет вертикальной, т. е. нормальной к плоскости опоры.

**5. Заключительные замечания.** Проследим за центром шара в общем случае его движения, чтобы посмотреть, как связываются одна с другой обе фазы. Для упрощения формул представим себе, как в п. 2, что ось  $\eta$  выбрана с самого начала в направлении скорости  $v$  скольжения.

Если  $\dot{\alpha}^0$ ,  $\dot{\beta}^0$  представляют собой составляющие (произвольные) скорости (горизонтальной) точки  $O$  в начальный момент ( $t = 0$ ), то первое из уравнений (1) при нашем выборе осей ( $v_\xi = 0$ ) для начального значения  $\chi^0$  составляющей  $\chi$  содержит в себе условие

$$\dot{\alpha}^0 = R\chi^0, \quad (9)$$

а второе дает для величины скорости скольжения  $v = v_\eta$  начальное значение

$$v^0 = \dot{\beta}^0 + R\pi^0,$$

где  $\pi^0$  есть начальное значение  $\pi$ , являющееся произвольным, за исключением лишь того ограничения (происходящего от выбора осей), чтобы было

$$v^0 = \dot{\beta}^0 + R\pi^0 \geqslant 0.$$

Центр  $O$  шара, как мы видели, исходя из своего начального положения, описывает, вообще говоря, дугу параболы, в то время как шар скользит по опорной плоскости, вращаясь вокруг  $O$  с некоторой угловой скоростью, составляющие которой определяются равенствами

$$\pi = \pi^0 - \frac{5fg}{2R} t, \quad \chi = \chi^0, \quad \rho = \rho^0,$$

где  $\chi^0, \rho^0$  обозначают начальные значения (произвольные) составляющих  $\chi$  и  $\rho$ . Эти равенства показывают, что две угловые скорости, с которыми шар, скользя по плоскости, вращается вокруг вертикального диаметра и диаметра, параллельного скорости скольжения, остаются постоянными, тогда как угловая скорость качения в собственном смысле (вызываемая сопротивлением скольжению), т. е. угловая скорость вращения вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к направлению движения, убывает.

В этой первой фазе, которая продолжается до момента

$$t_1 = \frac{2}{7} \frac{v^0}{fg},$$

проекции скорости точки  $O$  в любой момент определяются на основании равенств (5) уравнениями

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}^0, \quad \dot{\beta} = -fgt + \dot{\beta}^0,$$

и поэтому к концу  $t_1$  этой первой фазы достигают значений

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}^0, \quad \dot{\beta}_1 = -\frac{2}{7} v^0 + \dot{\beta}^0 = \frac{1}{7} (5\dot{\beta}^0 - 2R\pi^0); \quad (10)$$

в то же время при неизменных  $\chi = \chi^0, \rho = \rho^0$  составляющая  $\pi$  достигает своего наименьшего значения

$$\pi^0 - \frac{5v^0}{7R} = -\frac{1}{7R} (5\dot{\beta}^0 - 2R\pi^0).$$

Это и будут начальные значения величин  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \pi, \chi, \rho$  во второй фазе, в течение которой центр  $O$  продолжает двигаться по прямой линии с постоянной скоростью; составляющие этой скорости определяются из уравнений (10). Так как эти составляющие совпадают с составляющими скорости точки  $O$  в конце параболической траектории первой фазы, то мы непосредственно видим, что центр  $O$  после прохождения дуги параболы движется равномерно вдоль касательной в конце параболы в ту же сторону. Так как может случиться (это видно из уравнений (10)), что ориентированное направление этой касательной образует тупой угол с начальной скоростью, то мы имеем здесь теоретическое объяснение того факта, хорошо известного игрокам на биллиарде, что шар при известных условиях может в своем движении повернуть назад.

Здесь, наконец, удобно обратить внимание на тот случай, когда движение точки  $O$  вместо параболического оказывается прямолинейным даже в первой фазе. Для того чтобы это произошло, необходимо и достаточно при принятых здесь осиях, чтобы было  $\dot{\alpha}^0 = 0$  (п. 2) и, следовательно, в силу уравнения (9)  $\dot{\beta}^0 = 0$ ; при этом предположении надо принять во внимание только характер изменения составляющей  $\dot{\beta}$  скорости центра  $O$ , которая в любой момент все еще определяется равенством

$$\dot{\beta} = -fgt + \dot{\beta}^0.$$

Если значение

$$t^* = \frac{\dot{\beta}^0}{fg},$$

для которого исчезает это выражение  $\dot{\beta}$ , не заключено в промежутке от 0 до

$$t_1 = \frac{2}{7} \frac{v^0}{fg} = \frac{2}{7fg} (\dot{\beta}^0 + R\pi^0),$$

то центр  $O$  описывает за время  $t_1$  равнозамедленным движением прямолинейный отрезок, параллельный оси  $\eta$ , а шар скользит по плоскости, вращаясь с убывающей угловой скоростью

$$\pi = \pi^0 - \frac{5fg}{2R} t$$

вокруг горизонтального и перпендикулярного к направлению движения диаметра, с постоянной угловой скоростью (произвольной)  $\rho_0$  вокруг вертикального диаметра (и с нулевой скоростью вокруг диаметра, параллельного направлению движения); начиная с момента  $t_1$ , центр  $O$  движется равномерно по той же прямой и в ту же сторону со скоростью (наименьшей)

$$\frac{1}{7} (5\dot{\beta}^0 - 2R\pi^0),$$

а сам шар катится по плоскости, вращаясь с угловой скоростью

$$-\frac{1}{7R} (5\dot{\beta}^0 - 2R\pi^0)$$

вокруг горизонтального и перпендикулярного к направлению движения диаметра, и вертится с постоянной угловой скоростью  $\rho^0$  вокруг вертикального диаметра.

Движение будет происходить иначе, если  $t^*$  заключено между 0 и  $t_1$ , для чего требуется во всяком случае, чтобы было  $\dot{\beta}^0 > 0$ . Если  $t^*$  совпадает с  $t_1$ , т. е. если имеем

$$5\dot{\beta}^0 = 2R\pi^0,$$

то фаза скольжения развивается, как и выше, с той особенностью (связанной с выбором осей), что здесь центр движется в положитель-

ную сторону оси  $\eta$ ; но в конце этой первой фазы, т. е. в момент  $t_1$ , обращаются одновременно в нуль  $\dot{\beta}$  и  $\pi$ , а потому центр  $O$ , потеряв всю свою скорость, останавливается в достигнутом положении и шар продолжает вращаться с постоянной угловой скоростью  $\rho^0$  вокруг вертикального диаметра, если только с самого начала не было  $\rho^0 = 0$ ; в этом последнем случае шар останавливается совсем.

Если, наоборот,  $t^*$  будет положительным и меньшим  $t_1$ , то в момент  $t^*$  исчезает  $\dot{\beta}$ , хотя первая фаза скольжения еще не будет окончена; центр  $O$ , описав за интервал от 0 до  $t^*$  прямолинейный отрезок, параллельный оси  $\eta$ , в положительную сторону, меняет направление движения на прямо противоположное, продолжая двигаться равнозамедленно, в то время как сам шар продолжает скользить до момента  $t_1$ , когда начинается фаза равномерного движения для центра и чистого качения для шара. Таким образом, мы имеем здесь механическое объяснение того хорошо известного факта, что на шероховатом полу можно так толкнуть шар, что он, вращаясь и скользя до определенной точки, останавливается раньше, чем можно было бы предположить по начальному импульсу, или даже возвращается назад.

Заметим, что все это находится в совершенном согласии с тем, что было сказано в § 6 гл. VII о движении колеса. По существу, мы могли бы даже все свести к тем же рассуждениям, уподобляя  $\dot{\beta}$  и  $\chi$  количествам, которые ранее обозначались через  $V$  и  $\omega$ .

## § 2. Круговой тяжелый диск, который может катиться по горизонтальной плоскости. Твердое тело гирокопической структуры с круговым основанием

6. Для того чтобы иметь конкретное представление о задаче, рассматриваемой в этом параграфе, представим себе монету (однородный диск), которая катится по полу; рассуждения, которые мы здесь изложим, останутся в силе, если мы будем иметь дело с кольцом (детский игрушечный обруч) или с каким угодно твердым диском, сплошным или полым, лишь бы выполнялись следующие условия: 1) диск должен оканчиваться острым краем, имеющим форму окружности  $C$ ; 2) центр тяжести диска  $G$  должен совпадать с центром окружности  $C$ ; 3) диск должен быть гирокопической структуры относительно оси, проходящей через  $C$ . Однако пока мы оставим в стороне условие 2) и будем рассматривать более общий случай какого угодно твердого тела, имеющего гирокопическую структуру относительно какой-нибудь оси и оканчивающегося у основания круговым диском с острым краем, перпендикулярным в своем центре к гирокопической оси и опирающимся в какой-нибудь точке контура на горизонтальную шероховатую плоскость (*твёрдое тело гирокопической структуры с круглым основанием*).

Центр тяжести будет лежать на гирокопической оси на некотором расстоянии от плоскости окружности основания; достаточно