

ную сторону оси η ; но в конце этой первой фазы, т. е. в момент t_1 , обращаются одновременно в нуль $\dot{\beta}$ и π , а потому центр O , потеряв всю свою скорость, останавливается в достигнутом положении и шар продолжает вращаться с постоянной угловой скоростью ρ^0 вокруг вертикального диаметра, если только с самого начала не было $\rho^0 = 0$; в этом последнем случае шар останавливается совсем.

Если, наоборот, t^* будет положительным и меньшим t_1 , то в момент t^* исчезает $\dot{\beta}$, хотя первая фаза скольжения еще не будет окончена; центр O , описав за интервал от 0 до t^* прямолинейный отрезок, параллельный оси η , в положительную сторону, меняет направление движения на прямо противоположное, продолжая двигаться равнозамедленно, в то время как сам шар продолжает скользить до момента t_1 , когда начинается фаза равномерного движения для центра и чистого качения для шара. Таким образом, мы имеем здесь механическое объяснение того хорошо известного факта, что на шероховатом полу можно так толкнуть шар, что он, вращаясь и скользя до определенной точки, останавливается раньше, чем можно было бы предположить по начальному импульсу, или даже возвращается назад.

Заметим, что все это находится в совершенном согласии с тем, что было сказано в § 6 гл. VII о движении колеса. По существу, мы могли бы даже все свести к тем же рассуждениям, уподобляя $\dot{\beta}$ и χ количествам, которые ранее обозначались через V и ω .

§ 2. Круговой тяжелый диск, который может катиться по горизонтальной плоскости. Твердое тело гирокопической структуры с круговым основанием

6. Для того чтобы иметь конкретное представление о задаче, рассматриваемой в этом параграфе, представим себе монету (однородный диск), которая катится по полу; рассуждения, которые мы здесь изложим, останутся в силе, если мы будем иметь дело с кольцом (детский игрушечный обруч) или с каким угодно твердым диском, сплошным или полым, лишь бы выполнялись следующие условия: 1) диск должен оканчиваться острым краем, имеющим форму окружности C ; 2) центр тяжести диска G должен совпадать с центром окружности C ; 3) диск должен быть гирокопической структуры относительно оси, проходящей через C . Однако пока мы оставим в стороне условие 2) и будем рассматривать более общий случай какого угодно твердого тела, имеющего гирокопическую структуру относительно какой-нибудь оси и оканчивающегося у основания круговым диском с острым краем, перпендикулярным в своем центре к гирокопической оси и опирающимся в какой-нибудь точке контура на горизонтальную шероховатую плоскость (*твердое тело гирокопической структуры с круглым основанием*).

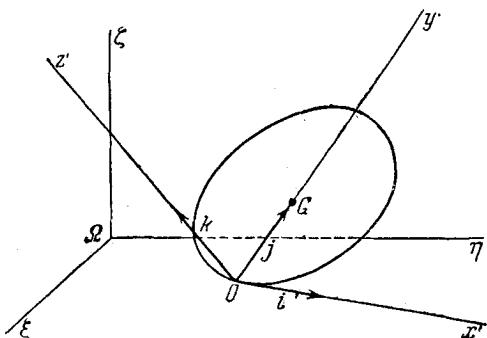
Центр тяжести будет лежать на гирокопической оси на некотором расстоянии от плоскости окружности основания; достаточно

будет предположить, что это расстояние равно нулю, чтобы вернуться к диску в собственном смысле.

Здесь так же, как и в случае биллиардного шара, движение может происходить со скольжением или как чистое качение; для нашей цели больший интерес представляет этот последний случай, которым мы и ограничимся в нашем исследовании.

Здесь мы имеем одну из тех задач, в которых, чтобы лучше представить ход движения, удобнее основные уравнения динамики относить к осям, движущимся в теле (гл. VII, п. 3; гл. VIII, п. 46).

В качестве основной системы осей мы примем систему $Ox'y'z'$ (фиг. 25), начало которой совпадает в каждый момент с той точкой O ,



Фиг. 25

в которой окружность C диска в этот момент соприкасается с плоскостью, и оси x' , y' , z' идут соответственно по касательной к окружности C в точке O , направленной в сторону качения, по прямой, идущей от O к центру C окружности и, наконец, по перпендикуляру в точке O к плоскости диска, направленному таким образом, чтобы система, как обычно, была правой. Единичные векторы этих трех

осей обозначим через i , j , k ; заметим также, что в случае диска, к которому относится прилагаемая фигура, центр тяжести G совпадает с центром окружности C и лежит поэтому на оси y' .

Вместе с этой основной системой примем за вспомогательные две другие системы осей $\Omega\xi\zeta$ и $Gxuz$. Первая из этих систем неподвижна и ее плоскость $\zeta = 0$ совпадает с опорной плоскостью, а ось ζ (вертикаль) направлена вверх, вторая же неизменно связана с диском и имеет началом центр тяжести; ось z этой системы совпадает с гирокнической осью диска и направлена в одну и ту же сторону с параллельной ей осью z' . В силу гирокнической структуры тела эта последняя система осей, как бы ни были заданы оси x , y , представляет собой систему главных осей инерции (относительно центра тяжести), и потому мы имеем $A = B$. Кроме того, надо заметить, что координаты центра тяжести относительно осей $Ox'y'z'$ будут 0 , a , z_0 , где a обозначает радиус окружности C , а z_0 — расстояние от плоскости окружности C до центра тяжести; достаточно положить $z_0 = 0$, чтобы вернуться к случаю диска.

7. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА. Введенные таким образом три системы осей имеют в действительности разные начала; но если мы обратим внимание только на их взаимную

ориентировку, то увидим, что система $Ox'y'z'$ является стереонодальной, так как ось Oz' имеет направление гирокопической оси, и ось Ox' параллельна (или прямо тождественна, если $z_0 = 0$) прямой пересечения плоскости xy , неподвижной в теле, с неподвижной плоскостью $\xi\eta$ (линия узлов). Отсюда следует, что для углов Эйлера, для угловых скоростей ω твердого тела, ω' основных осей (относительно неподвижных осей) и для проекций p, q, r и p', q', r' этих угловых скоростей на стереонодальные оси остаются справедливыми соотношения

$$\omega' = \omega - \dot{\phi}k; \quad (11)$$

$$v' = \dot{\theta}, \quad q' = \dot{\psi} \sin \theta, \quad r' = \dot{\psi} \cos \theta; \quad (12)$$

$$p' = p, \quad q' = q, \quad r' = r - \dot{\varphi}, \quad (13)$$

взятые из п. 47 предыдущей главы, так как на них не оказывает никакого влияния положение начала различных систем.

Для дополнения кинематических предпосылок примем во внимание, что в этой задаче удобно обратиться к основному уравнению моментов в его общей форме (п. 17, гл. V), т. е. к уравнению вида

$$\dot{K} + \omega' \times K + v' \times Q = M, \quad (14)$$

при составлении которого предполагается, что центр моментов, движущийся с абсолютной скоростью v' , выбран в точке касания O , а производная \dot{K} берется относительно стереонодальных осей (имеющих угловую скорость ω'). Поэтому для дальнейшего полезно определить абсолютную скорость v' полюса O .

Для этой цели заметим прежде всего, что из того факта (отмеченного в упомянутом п. 47 предыдущей главы), что оси, неподвижные в теле, врачаются вокруг оси z относительно осей $Ox'y'z'$ с угловой скоростью ϕ , следует, что всякая материальная точка диска, совпадающая в рассматриваемый момент с точкой касания O диска с плоскостью, имеет относительно осей $Ox'y'z'$ скорость $a\dot{\varphi}i$, так что, обратно, скорость точки соприкосновения O относительно тела будет равна $-a\dot{\varphi}i$. Но, вводя предположение о чистом качении, легко понять на основании теоремы сложения скоростей, что это есть также скорость v' точки O относительно неподвижных осей. Действительно, эта абсолютная скорость v' определяется геометрической суммой только что найденной относительной скорости и переносной скорости, т. е. скорости относительно неподвижных осей той материальной точки диска, которая в рассматриваемый момент совпадает с точкой соприкосновения O , а так как эта скорость в силу допущенного отсутствия скольжения равна нулю, то мы тотчас же заключаем, что

$$v' = -a\dot{\varphi}i. \quad (15)$$

Заметим, что в последующем изложении мы будем принимать, что ϕ не равняется тождественно нулю. Это оправдывается тем, что противоположное предположение привело бы к движению твердого тела вокруг неподвижной точки, так как при этом скорость точки прикосновения оставалась бы равной нулю.

8. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА. После этих предварительных кинематических замечаний мы должны вычислить, имея в виду основное уравнение (14), количество движения Q , результирующий момент K количества движения относительно точки O и, наконец, результирующий момент M внешних сил.

К выражениям векторов Q и K мы быстрее всего придем, если возьмем производную на основании правил п. 15 гл. IV от живой силы или, еще проще, применяя прямо формулы (29'), (30') того же пункта, но для этого необходимо прежде всего отнести тело к какой-нибудь неподвижной в теле системе осей. Имея в виду какой-нибудь определенный момент времени, мы примем за неподвижную в теле ту систему осей, которая в рассматриваемый момент совпадает с $Ox'y'z'$ и имеет поэтому, как это и требуется для нашей цели, начало в точке, выбранной за центр приведения моментов. Вместе с этой системой мы рассмотрим систему $G\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, имеющую началом центр тяжести G с координатами $0, a, z_0$ и оси, соответственно параллельные и одинаково направленные с осями x', y', z' . Вследствие гироскопической структуры тела относительно оси z , совпадающей с осью \bar{z} , система $G\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, как бы ни были внутри тела направлены оси \bar{x}, \bar{y} , состоит из главных центральных осей инерции, а соответствующие главные центральные моменты инерции тела относительно осей \bar{x}, \bar{y} оба равны A ; момент инерции относительно оси \bar{z} мы обозначим, как обычно, через C . Отсюда на основании теоремы Гюйгенса (т. I, гл. X, п. 21) мы выводим, что моменты инерции относительно осей x', y', z' определяются равенствами

$$A_1 = A + m(a^2 + z_0^2), \quad B_1 = A + mz_0^2, \quad C_1 = C + ma^2, \quad (16)$$

где m обозначает полную массу тела; с другой стороны, принимая во внимание, что между координатами любой точки двух систем, $Ox'y'z'$ и $G\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, имеют место соотношения

$$x' = \bar{x}, \quad y' = \bar{y} + a, \quad z' = \bar{z} + z_0$$

и что, так как G есть центр тяжести, статические моменты относительно трех координатных плоскостей системы $G\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ будут тождественно равны нулю; находим, что центробежные моменты

относительно системы $Ox'y'z'$ будут иметь следующие значения:

$$A'_1 = maz_0, \quad B'_1 = C'_1 = 0. \quad (17)$$

Здесь важно отметить, что выражения (16), (17) для моментов инерции и центробежных моментов относительно системы, неподвижной в теле и совпадающей в какой-нибудь произвольный момент времени с системой $Ox'y'z'$, не будут зависеть от этого момента, так что они в любой момент остаются в силе по отношению к тем осям, которые мы приняли для построения системы $Ox'y'z'$.

Установив это, применим формулы (29'), (30') п. 15 гл. IV, принимая во внимание, что так как в качестве осей проекций в какой-либо произвольный момент времени мы берем оси, связанные с телом и совпадающие в этот момент с осями $Ox'y'z'$, то проекции u , v , w скорости поступательного движения тела, совпадающей со скоростью точки O , при чистом качении тела равны нулю. Таким образом, для проекций векторов Q и K мы получим выражения

$$\left. \begin{aligned} Q_{x'} &= m(z_0q - ar), \quad Q_{y'} = -mz_0p, \quad Q_{z'} = map; \\ K_{x'} &= A_1p, \quad K_{y'} = B_1q - maz_0r, \quad K_{z'} = C_1r - maz_0q, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где A_1 , B_1 , C_1 обозначают моменты инерции (16); эти выражения в силу замечания, сделанного выше, относительно величин (16), (17) в любой момент остаются в силе по отношению к осям $Ox'y'z'$, хотя эти оси на самом деле являются подвижными относительно тела.

Наконец, остается определить только результирующий момент относительно точки Q внешних сил. Эти силы сводятся к силе тяжести mg , приложенной в точке G , и к реакции опоры, которая возникает в O . Реакция ничего не прибавляет к моменту M , благодаря чему и оказывается удобным выбор центра моментов в точке соприкосновения. Поэтому имеем

$$M = -\vec{OG} \times mg\mathbf{x},$$

где \mathbf{x} обозначает единичный вектор оси ζ (для которого имеем $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{k}} = \theta$).

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. Если спроектируем основное уравнение моментов (14) на стереонодальные оси $Ox'y'z'$ и примем во внимание выражения (18), а также формулы (11), (12), (13), (15), то для гирокопического твердого тела с круговым основанием получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} A_1\dot{p} + q\{C_1r - B_1(r - \dot{\phi})\} - maz_0\{q^2 - r(r - \dot{\phi})\} &= \\ &= mg(z_0 \sin \theta - a \cos \theta), \\ B_1\dot{q} - maz_0\dot{r} + p\{A_1(r - \dot{\phi}) - C_1r + ma^2\dot{\phi}\} + maz_0pq &= 0, \\ C_1\dot{r} - maz_0\dot{q} - (A_1 - B_1)pq - maz_0(r - \dot{\phi})p &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

в которых $A_1B_1C_1$ определяются через центральные моменты инерции при помощи формул (16).

В случае диска достаточно, как мы знаем, положить $z_0 = 0$, чтобы прийти к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} A_1\dot{p} + q(C_1r - B_1(r - \dot{\varphi})) &= -mag \cos \theta, \\ B_1\dot{q} + p(A_1(r - \dot{\varphi}) - C_1r + ma^2\dot{\varphi}) &= 0, \\ C_1\dot{r} - (A_1 - B_1)pq &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19')$$

где, естественно, вместо формул (16) имеют место равенства

$$A_1 = A + ma^2, \quad B_1 = A, \quad C_1 = C + ma^2; \quad (16')$$

если речь идет о диске в собственном смысле (т. е. о диске, толщиной которого можно пренебречь), то при $C = 2A$ имеем

$$A_1 = \frac{1}{2}C + ma^2, \quad B_1 = \frac{1}{2}C, \quad C_1 = C + ma^2. \quad (16'')$$

Уравнения (19) или (19') вместе с равенствами

$$p = \dot{\theta}, \quad q = \dot{\varphi} \sin \theta, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta, \quad (20)$$

вытекающими непосредственно из формул (12), (13), представляют собой полную систему уравнений задачи, так как углы Эйлера θ , φ , ψ определяются в функциях от времени на основании дифференциальной системы (19), (20) или (19'), (20), а каждый из остальных параметров, характеризующих положение твердого тела, определяется посредством двух дальнейших квадратур. Угол θ между восходящей вертикалью и гирокопической осью дает в любой момент наклон плоскости окружности C к плоскости опоры $\zeta = 0$, а направление касательной к окружности C в точке соприкосновения O с опорной плоскостью определяется непосредственно углом ψ . Что касается положения этой точки, то достаточно вспомнить, что ее скорость определяется формулой (15), чтобы получить соответствующие координаты α , β посредством двух квадратур из уравнений

$$\dot{\alpha} = -a\dot{\varphi} \cos \psi, \quad \dot{\beta} = -a\dot{\varphi} \sin \psi, \quad (21)$$

в которых правые части являются теперь уже известными функциями времени.

10. Меростатические решения. В одном из следующих пунктов (п. 16) мы скажем несколько слов об общем интегрировании дифференциальной системы (19), (20), по крайней мере для случая диска. В этом же пункте, основываясь на тех же уравнениях, мы изучим более простой тип движений твердого тела гирокопической структуры с круглым основанием, к которому мы придем, предполагая постоянным угол наклона θ плоскости окружности C к плоскости опоры,

т. е. полагая $p = \dot{\theta} = 0$. Если обратимся прямо к более общим уравнениям (19), то из второго и третьего увидим, что при указанном предположении останутся постоянными также q и r и что, обратно, последние два уравнения будут тождественно удовлетворяться при при $p = 0$, $q = \text{const}$, $r = \text{const}$. Поэтому речь идет о статических решениях по отношению к аргументам θ , q и r .

Точнее, если примем во внимание равенства (20), то увидим, что постоянными останутся также и $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, тогда как первое из уравнений (19) на основании (20) сводится к соотношению между постоянными θ , $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, из которого можно определить какую-нибудь одну из этих величин, когда будут заданы две другие.

Наконец, если, отвлекаясь от движения точки соприкосновения O по опорной плоскости, мы сосредоточим внимание только на ориентировке системы $Ox'y'z'$ относительно неподвижной системы, то движение сводится только к регулярной прецессии вокруг вертикальной оси. Упомянутое только что соотношение между θ , $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, характеризующее эту регулярную прецессию, аналогично тому соотношению, которое мы имели в случае регулярной прецессии тяжелого гироскопа, закрепленного в одной точке (предыдущая глава, п. 37).

11. Прямолинейное движение (точки соприкосновения). Обращаясь к еще более частному случаю, посмотрим, возможно ли для нашего твердого тела такое движение, в котором при постоянном угле θ точка O на опорной плоскости описывает прямую линию. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно на основании уравнений (21), чтобы, помимо θ и $\dot{\varphi}$, оставался постоянным также и угол $\dot{\psi}$, а это, если возможно, равносильно предположению, что регулярная прецессия, к которой сводится любое движение с постоянным углом нутации, становится просто равномерным вращением, если отвлечься от движения точки O .

Предполагая постоянным угол $\dot{\psi}$, можно без ограничения общности задать направление неподвижной оси ξ так, чтобы было $\dot{\psi} = 0$. Далее, соотношение, которое согласно предыдущему пункту должно быть между постоянными θ , $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi} = 0$ и которое получается из первого из уравнений (19) посредством подстановки в него значений $p = 0$, $q = 0$, $r = \dot{\varphi}$, получающихся при настоящих предположениях из уравнений (20), приводится здесь к виду

$$mg(z_0 \sin \theta - a \cos \theta) = 0.$$

Отсюда следует, что неизменный угол наклона θ определяется из условия

$$\tan \theta = \frac{a}{z_0}, \quad (22)$$

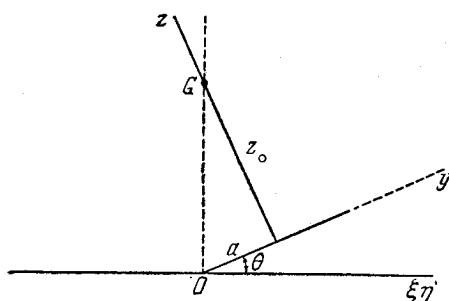
а постоянная угловая скорость качения $\dot{\varphi}$ остается произвольной.

Уравнение (22) выражает то обстоятельство, что при движении центр тяжести G остается на вертикали, проходящей через точку O , или, другими словами, что твердое тело сколь угодно долго сохраняет то положение, которое было бы положением равновесия, если бы точка O была неподвижной (фиг. 26).

Уравнения (21), принимающие здесь вид

$$\dot{\alpha} = -a\dot{\varphi}, \quad \dot{\beta} = 0,$$

подтверждают, что точка O действительно описывает прямолинейную траекторию с постоянной скоростью, которую, располагая величиной $\dot{\varphi}$, можно задать произвольно.



Фиг. 26

В случае диска ($z_0 = 0$) уравнение (22) дает $\theta = \pi/2$, т. е. диск остается перпендикулярным к опорной плоскости; таким образом оправдывается очевидная заранее возможность равномерного качения диска в вертикальном положении вдоль прямолинейного пути (с произвольной угловой скоростью).

12. Движение точки соприкосновения и центра тяжести в меростатических движениях диска. Обратимся к произвольному меростатическому движению, т. е. исключим для $\dot{\varphi}$ значение нуль и, следовательно, для θ значение, определяемое равенством (22). Из постоянства $\dot{\varphi}$ следует, что $\psi = \dot{\psi}t + \psi_0$, так что, интегрируя уравнения (21), получим

$$\alpha = \alpha_0 - a \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}} \sin(\dot{\psi}t + \psi_0), \quad \beta = \beta_0 + a \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}} \cos(\dot{\psi}t + \psi_0), \quad (23)$$

где α_0, β_0 означают две произвольные постоянные. Таким образом, мы видим, что точка соприкосновения O во время движения твердого тела описывает на опорной плоскости окружность с центром в $O_0(\alpha_0, \beta_0)$ и радиусом $R_0 = a|\dot{\varphi}/\dot{\psi}|$ с угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Отметим, что то же значение радиуса R_0 можно получить также и более прямым путем, замечая, что в рассматриваемых меростатических движениях, при заданном отсутствии скольжения, должны получаться равные абсолютные значения $R_0|\dot{\psi}|, a|\dot{\varphi}|$ скоростей, с которыми точка соприкосновения движется соответственно по опорной плоскости и по окружности C .

С другой стороны, в предположении постоянства угла наклона θ очевидно, что гирокопическая ось во время движения описывает

конус вращения вокруг вертикали точки O_0 , так что центр тяжести G твердого тела описывает в свою очередь с той же самой угловой скоростью $\dot{\psi}$ окружность в горизонтальной плоскости, центр которой находится на вертикали центра O_0 окружности, описанной точкой O . При определении радиуса R этой круговой траектории точки G обратим прежде всего внимание на то, что он связан с линейной скоростью v_G центра тяжести соотношением

$$R^2 \dot{\psi}^2 = v_G^2;$$

далее, принимая во внимание, что количество движения Q равно количеству движения центра тяжести $m v_G$ (гл. IV, п. 12), получаем, пользуясь первыми тремя из выражений (18) и предполагая, что $p = 0$,

$$v_G^2 = (ar - z_0 q)^2.$$

Из полученных двух соотношений выводим

$$R = \left| \frac{ar - z_0 q}{\dot{\psi}} \right|;$$

в частном случае диска ($z_0 = 0$) имеем

$$R = a \left| \frac{r}{\dot{\psi}} \right|.$$

13. Реакция опоры. Благодаря выбору центра моментов в точке соприкосновения O второе основное уравнение (14) оказалось независящим от неизвестной реакции опоры Φ , и потому из него можно было определить все неизвестные величины задачи. После того как найдено какое-нибудь решение уравнения (14), можно приступить к определению соответствующей реакции, возвращаясь к первому основному уравнению. Это уравнение, принимая во внимание соотношение $Q = m v_G$ (гл. IV, п. 12), можно написать в виде

$$m \frac{d v_G}{dt} = -mgx + \Phi, \quad (24)$$

где дифференцирование относится к неподвижным осям.

Обращаясь непосредственно к меростатическому движению (прецессионного характера в отношении ориентации), из уравнения (24) увидим, что, так как центр тяжести описывает равномерно окружность (в горизонтальной плоскости), равнодействующая ($-mgx + \Phi$) будет направлена к центру. Поэтому, обозначая через N вертикальную составляющую реакции Φ , направленную обязательно вверх ($N > 0$), и через A — горизонтальную составляющую (трение), получим, проектируя уравнение (24) сначала на вертикаль,

$$N = mg;$$

таким образом, в меростатическом движении, как и в случае равновесия, нормальная реакция уравновешивает вес тела. Если затем спроектируем уравнение (24) на горизонтальную плоскость, то найдем

$$A = \frac{mv_G^2}{R};$$

отсюда, вследствие того, что $v_G = R|\dot{\psi}|$, будем иметь

$$A = mR\dot{\psi}^2.$$

С найденным для A выражением $m v_G^2 / R$ можно связать замечание, по существу аналогичное замечанию, указанному в п. 4.

В предыдущем исследовании трение входило просто, как касательная реакция плоскости, что объясняется тем, что здесь достаточно только, чтобы оно препятствовало скольжению. Но в действительности, так как при отсутствии скольжения в любой момент скорость точки окружности C , совпадающей в этот момент с точкой O , будет равна нулю, требуется также, чтобы удовлетворялся основной эмпирический закон статического трения $A \leq fmg$, так что должно быть

$$\frac{v_G^2}{R} \leq f g, \quad (25)$$

где f обозначает коэффициент трения опорной плоскости.

Отсюда ясно, что на поверхности с заданным коэффициентом трения f рассматриваемые здесь меростатические движения физически возможны только при условии, что v_G^2 / R достаточно мало. Таким образом, необходимо, чтобы, помимо угла наклона θ , была задана скорость v_G центра тяжести, или радиус R его траектории, причем или этот радиус должен быть достаточно велик, или скорость v_G должна быть достаточно мала. Так как случай диска, соответствующий предположению $z_0 = 0$, представляет собой схему, хотя и грубую, велосипеда, то понятно, что и для этого случая имеет силу аналогичное правило, которое подтверждается на опыте.

К этому заключению можно прийти даже более простым способом, обращаясь к теории относительного движения¹), которая приводит приближенным путем к так называемому условию динамического равновесия, принадлежащему Бурле²).

14. Замечания общего характера. Конечно, в случае любых решений для физической осуществимости движения чистого качения (как в случае диска, так и в более общем случае тела с круговым основанием) требуется, чтобы реакция плоскости подчинялась закону

¹⁾ Biscopini, Esercizi e complementi di Meccanica razionale, Milano, Tamburini, 1927, стр. 377—380, 467—471.

²⁾ Bourlet, Traité des bicycles et bicyclettes, Paris, Gauthier — Villars, 1898, т. I, стр. 49.

статического трения. А это приводит (см. упражнение 6) к неравенству, в которое входит коэффициент трения f и характеристики состояния движения твердого тела.

Некоторые авторы пользуются неточным выражением *абсолютно шероховатая опора* для обозначения того абстрактного случая, в котором всякое скольжение заранее исключается. На самом деле, сколь бы ни был велик, т. е. близок к единице, коэффициент трения, всегда существуют такие состояния движения (в примере, который приводит к соотношению (25), это будут такие состояния движения, когда $v_d^3/gR > 1$), которые не совместимы с чистым качением, при условии, что тело просто опирается на горизонтальную плоскость.

15. Устойчивость прямолинейных движений. Сравнительные замечания. Применим к системе (19) метод малых колебаний (гл. VI, § 6), рассматривая колебания около меростатического решения σ , соответствующего прямолинейному движению точки соприкосновения и определяемого (п. 11) постоянными значениями

$$\bar{p} = \dot{\theta} = 0, \quad \bar{q} = \dot{\psi} \sin \theta = 0, \quad \bar{\theta} = \arctg \frac{a}{z_0}, \quad \bar{r},$$

где на основании последнего из соотношений (20) \bar{r} совпадает с постоянным значением $\dot{\phi}$ ¹⁾. В любом решении σ , близком к решению $\bar{\sigma}$, мы можем рассматривать r и q , а следовательно, и $\dot{\phi}$ как количества первого порядка, полагая в то же время

$$\theta = \bar{\theta} + \tau,$$

где τ рассматривается также как величина первого порядка. При этих условиях из того же соотношения (20), по крайней мере до членов второго порядка, получим

$$r - \dot{\varphi} = q \operatorname{ctg} \bar{\theta}.$$

Последнее из уравнений (19), так как pq и $(r - \dot{\varphi})p$ будут величинами второго порядка, интегрируется непосредственно и для любого σ , близкого к $\bar{\sigma}$, дает

$$r = r_0 + \frac{maz_0}{C_1} q,$$

где r_0 обозначает постоянную (мало отличающуюся от \bar{r}).

¹⁾ Условие устойчивости, к которому мы придем при помощи метода малых колебаний, действительно также и в строгом смысле. См. G. Vranceanu, Sulla stabilità del rotolamento di un disco, *Rend. Acc. Lincei*, т. XXXIII, 10 sem. 1924, стр. 383—388.

Полагая теперь в двух первых уравнениях (19) $\theta = \bar{\theta} + \tau$, $p = \dot{\tau}$, $r = r_0 + maz_0 q/C_1$, и $r_0 - \phi = q \operatorname{ctg} \bar{\theta}$, по крайней мере с точностью до членов второго порядка, получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} A_1 \ddot{\tau} + (C_1 + maz_0 \operatorname{ctg} \bar{\theta}) r_0 q &= mg(z_0 \cos \bar{\theta} + a \sin \bar{\theta}) \tau, \\ B_2 \dot{q} - (C_1 - ma^2) r_0 \dot{\tau} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где для краткости положено

$$B_2 = B_1 - m^2 a^2 z_0^2 / C_1.$$

Второе уравнение интегрируется непосредственно и после интегрирования принимает вид

$$B_2 q - (C_1 - ma^2) r_0 \tau = \varepsilon_1,$$

где ε_1 обозначает постоянную величину первого порядка.

После этого, исключая q из первого из уравнений (26), придем к линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\tau} + k\tau = c, \quad (27)$$

где для краткости положено

$$k = \frac{(C_1 + maz_0 \operatorname{ctg} \bar{\theta})(C_1 - ma^2) r_0^2 - mgB_2(z_0 \cos \bar{\theta} + a \sin \bar{\theta})}{A_1 B_2},$$

$$c = - \frac{(C_1 + maz_0 \operatorname{ctg} \bar{\theta}) r_0 \varepsilon_1}{A_1 B_2}.$$

Общий интеграл уравнения (27), если предположить, что $k \neq 0$, выражается, как известно, равенством

$$\tau = \frac{c}{k} + \tau_1,$$

где τ_1 есть общий интеграл соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{\tau} + k\tau = 0;$$

по хорошо известному виду его (ср. т. I, гл. II, пп. 36, 44) легко заключить, что мы будем иметь устойчивость или неустойчивость в зависимости от того, будет ли k положительным или отрицательным.

Если мы хотим обратиться к теории характеристических показателей, то достаточно принять во внимание, что характеристическое уравнение будет иметь здесь вид

$$z^2 + k = 0.$$

Если затем из выражения для k мы исключим r_0 , вводя в него квадрат $v'^2 = a^2 r_0^2$ линейной скорости точки O , то условию устойчивости $k > 0$ можно будет придать вид

$$v'^2 > \frac{ma^2 g B_2 (z_0 \cos \bar{\theta} + a \sin \bar{\theta})}{(C_1 + maz_0 \operatorname{ctg} \bar{\theta})(C_1 - ma^2)}. \quad (28)$$

В случае диска в собственном смысле (полного или неполного), или прямолинейном движении будем иметь $\bar{\theta} = \pi/2$. Что касается структурных постоянных, то имеем

$$z_0 = 0, \quad B_2 = B_1 = \frac{1}{2} C, \quad C_1 = C + ma^2,$$

где C обозначает осевой момент инерции, так что условие (28) принимает вид

$$v'^2 > \frac{ma^3 g}{2(C + ma^2)}. \quad (28')$$

Этот результат позволяет объяснить причину того экспериментального факта, что как для гироскопического тела с круговым основанием, так, в частности, и для диска состояние равновесия, соответствующее предположению, что центр тяжести находится на вертикали, проходящей через точку опоры, выше этой точки, будет неустойчивым, тогда как качение вдоль прямой, которое при малых скоростях все еще будет неустойчивым, становится устойчивым, когда скорости достаточно велики [6].

Приложим это правило к конкретному случаю. Заметим прежде всего, что для полного однородного диска имеем $C = ma^2/2$, тогда как для кольца (обруча) $C = ma^2$, так что условие устойчивости для обоих случаев выражается соответственно неравенствами

$$v'^2 > \frac{1}{3} ag, \quad v'^2 > \frac{1}{4} ag.$$

Заметим, между прочим, что в случае обруча легче достигнуть устойчивости, чем в случае полного диска (в том смысле, что для достижения устойчивости достаточна меньшая скорость). Например, если радиус a равен 30 см, то приближенно будем иметь

$$v' > 1 \text{ м/сек}, \quad v' > 0,86 \text{ м/сек}.$$

Колесо велосипеда можно рассматривать как промежуточный случай между двумя указанными, так что для обеспечения устойчивости достаточно скорости около 1 м/сек (3,6 км в час). Система, составленная из велосипеда и велосипедиста, конечно, очень далека от простого катящегося диска (или обруча), тем не менее найденное выше значение может служить для указания порядка величины минимальной скорости, которая требуется для

того, чтобы устойчиво держаться на велосипеде; как каждому хорошо известно, мы имеем здесь приближенное согласие с повседневным опытом [7].

Заметим, что тем же самым приемом, только с более сложными вычислениями, можно было бы исследовать вопросы устойчивости, относящиеся к меростатическим решениям, которые соответствуют равномерному качению вдоль круговой дорожки, обладающему прецессионным характером¹⁾.

Наконец, здесь уместно с целью сравнения добавить некоторые замечания, в которых для простоты мы будем иметь в виду случай диска. Заметим прежде всего, что если бы у диска, катящегося по горизонтальной плоскости, мы отняли одну степень свободы, а именно ту, которая соответствует параметру ψ , вынуждая точку соприкосновения двигаться по заданной прямой, то пришли бы к уже рассмотренной в виде примера в п. 52 гл. V голономной системе с двумя степенями свободы. Как уже тогда отмечалось и как это ясно из интуитивных соображений, динамически все еще возможно меростатическое движение, в котором диск равномерно с произвольной скоростью катится, оставаясь вертикальным, однако такое движение (как было указано в п. 52 гл. V) существенно неустойчиво так же, как и аналогичное состояние равновесия.

После этого предварительного замечания сопоставим три следующие динамические задачи, все относящиеся к тяжелому диску, опирающемуся на горизонтальную плоскость: 1) диск (с одной степенью свободы), закрепленный в точке его соприкосновения O с плоскостью и свободно вращающийся вокруг касательной Ox таким образом, что он может составлять любой угол с горизонтальной плоскостью; 2) диск (с двумя степенями свободы), который, кроме вращения вокруг касательной Ox , может свободно катиться вдоль этой прямой; 3) диск (неголономная система с ∞^3 виртуальными перемещениями), который может свободно катиться по плоскости.

В случае 1) (сложный маятник) для диска возможно равновесие в вертикальной плоскости, проходящей через касательную Ox , но это состояние равновесия существенно неустойчиво; и, как мы только что напомнили, неустойчивость сохраняется и в случае 2), как бы ни была велика скорость качения. Наоборот, в случае 3), в котором без качения мы имели бы неустойчивость по отношению к двум степеням свободы (т. е. как по отношению к θ , так и по отношению к ψ), достаточно, чтобы качение сделалось достаточно быстрым, для того чтобы соответствующее меростатическое движение стало устойчивым.

¹⁾ См., например, Routh, Dynamics of a system of rigid bodies, ч. II, § 244; Gray, Gyrostatics and rotational motion [London, Macmillan, 1918], стр. 388—391 или же J. Réveille, Dynamique des solides [Paris Ballière, 1923], стр. 333—338.

Таким образом, мы имеем простой и наглядный пример того обстоятельства, отмеченного в общем случае в п. 27 гл. VI, что появление гиростатических членов (в нашем случае это происходит благодаря качению) может стабилизировать движение только при четном числе степеней неустойчивости.

16. Об интегрировании дифференциальных уравнений движения диска. В п. 9 мы видели, что в общем случае определение движения тяжелого гирокопического тела с круглым основанием, опирающегося на горизонтальную плоскость, приводится, если не считать двух дальнейших квадратур, к интегрированию системы дифференциальных уравнений (19). Для диска ($z_0 = 0$) система (19) должна быть заменена более простой системой (19'); как было сказано в п. 10, мы предполагаем здесь исследовать аналитическую природу задачи интегрирования, к которой приходим в этом последнем случае.

Возьмем снова второе и третье из уравнений (19'), которые, если принять во внимание тождества (16'), можно написать в виде

$$\left. \begin{aligned} A\dot{q} + \{(A - C)r - A\dot{\varphi}\}p &= 0, \\ (C + ma^2)\dot{r} - ma^2pq &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Ограничиваюсь рассмотрением одной фазы движения, в которой угол Эйлера θ (угол наклона диска к плоскости опоры) будет изменяться всегда в одном и том же направлении, так что производная $\dot{\theta}$ остается отличной от нуля, мы можем принять θ за независимую переменную вместо t ; тогда, разделив уравнения (29) на $p = \dot{\theta}$, что возможно в силу допущенного предположения, и учитывая, что на основании третьего из уравнений (20) имеем

$$r - \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \cos \theta = q \operatorname{ctg} \theta,$$

мы придем к следующим двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dq}{d\theta} + Aq \operatorname{ctg} \theta - Cr &= 0, \\ (C + ma^2) \frac{dr}{d\theta} - ma^2q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29')$$

Отсюда, дифференцируя второе уравнение по θ и исключая при помощи уравнений (29) q и $dq/d\theta$, получим для неизвестной проекции r угловой скорости дифференциальное уравнение второго порядка (при независимой переменной θ)

$$\left(1 + \frac{C}{ma^2}\right) \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{C}{A} r = 0,$$

которое, если положить

$$\cos^2 \theta = u,$$

принимает вид

$$u(1-u)\frac{d^2r}{du^2} + \frac{1}{2}(1-3u)\frac{dr}{du} - \frac{Cma^2}{4A(C+ma^2)}r = 0. \quad (30)$$

Мы пришли, таким образом, к линейному уравнению второго порядка, представляющему собой известное в анализе гипергеометрическое уравнение Гаусса¹⁾.

Интегрирование уравнения (30) дает угловую скорость r диска в функции от θ , после чего все сводится к определению θ в функции от времени, так как, зная $\theta(t)$, мы сможем найти аналогичное выражение для r , а на основании первого из уравнений (20) и второго из уравнений (29) найдем и выражения для p и q ; с другой стороны, после вычисления p , q и r в функциях от времени, второе и третье из уравнений (20) дадут $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ посредством двух квадратур. Для определения $\theta(t)$ можно было бы обратиться к первому из уравнений (19'), до сих пор еще не использованному. Выгоднее, однако, взять в качестве исходного уравнения хорошо известный первый интеграл наших уравнений движения, а именно интеграл живых сил.

Действительно, мы имеем здесь дело с твердым телом, находящимся под действием неголономной, но не зависящей от времени связи, причем активные силы сводятся к силе тяжести, которая при $m=1$ имеет потенциал $-g\zeta_G$, где ζ_G обозначает третью абсолютную координату центра тяжести, т. е. $a \sin \theta$. Далее, живая сила диска на основании теоремы Кёнига и известного выражения живой силы относительно центра тяжести определяется равенством

$$2T = mv_G^2 + A(p^2 + q^2) + Cr^2$$

или же в силу выражений (18) при $z_0 = 0$

$$2T = (A + ma^2)p^2 + Aq^2 + (C + ma^2)r^2;$$

поэтому интеграл живых сил принимает вид

$$(A + ma^2)p^2 + Aq^2 + (C + ma^2)r^2 - 2mag \sin \theta = \text{const},$$

и так как имеем $p = \dot{\theta}$, а r и q , как это видно из уравнений (29'), могут быть (в результате интегрирования гипергеометрического уравнения) выражены через θ , то последнее уравнение дает t в функции от θ посредством одной квадратуры.

§ 3. Тяжелое тело, ограниченное поверхностью вращения, на горизонтальной плоскости

17. Геометрические замечания. К другой известной задаче, обобщающей как ту, так и другую из задач, исследованных в §§ 1 и 2, мы придем, рассматривая твердое тело, ограниченное поверхностью

¹⁾ См., например, В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1938, стр. 237—241. (Прим. ред.)