принимает вид

$$u(1-u)\frac{d^2r}{du^2}+\frac{1}{2}(1-3u)\frac{dr}{du}-\frac{Cma^2}{4A(C+ma^2)}r=0. \qquad (30)$$

Мы пришли, таким образом, к линейному уравнению второго порядка, представляющему собой известное в анализе *гипергеометрическое уравнение* Гаусса[1]).

Интегрирование уравнения (30) дает угловую скорость r диска в функции от θ, после чего все сводится к определению θ в функции от времени, так как, зная $\theta(t)$, мы сможем найти аналогичное выражение для r, а на основании первого из уравнений (20) и второго из уравнений (29) найдем и выражения для p и q; с другой стороны, после вычисления p, q и r в функциях от времени, второе и третье из уравнений (20) дадут $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ посредством двух квадратур. Для определения $\theta(t)$ можно было бы обратиться к первому из уравнений (19′), до сих пор еще не использованному. Выгоднее, однако, взять в качестве исходного уравнения хорошо известный первый интеграл наших уравнений движения, а именно интеграл живых сил.

Действительно, мы имеем здесь дело с твердым телом, находящимся под действием неголономной, но не зависящей от времени связи, причем активные силы сводятся к силе тяжести, которая при $m=1$ имеет потенциал $-g\zeta_G$, где ζ_G обозначает третью абсолютную координату центра тяжести, т. е. $a\sin\theta$. Далее, живая сила диска на основании теоремы Кёнига и известного выражения живой силы относительно центра тяжести определяется равенством

$$2T=mv_G^2+A(p^2+q^2)+Cr^2$$

или же в силу выражений (18) при $z_0=0$

$$2T=(A+ma^2)p^2+Aq^2+(C+ma^2)r^2;$$

поэтому интеграл живых сил принимает вид

$$(A+ma^2)p^2+Aq^2+(C+ma^2)r^2-2mag\sin\theta=\text{const},$$

и так как имеем $p=\dot{\theta}$, а r и q, как это видно из уравнений (29′), могут быть (в результате интегрирования гипергеометрического уравнения) выражены через θ, то последнее уравнение дает t в функции от θ посредством одной квадратуры.

§ 3. Тяжелое тело, ограниченное поверхностью вращения, на горизонтальной плоскости

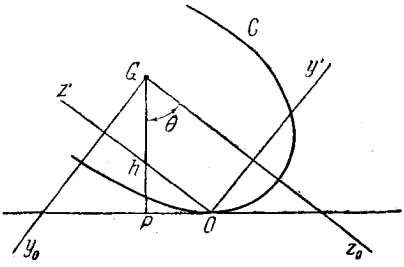
17. Геометрические замечания. К другой известной задаче, обобщающей как ту, так и другую из задач, исследованных в §§ 1 и 2, мы придем, рассматривая твердое тело, ограниченное поверхностью

---

[1]) См., например, В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1938, стр. 237—241. (*Прим. ред.*)

вращения, которое движется исключительно под действием силы тяжести, опираясь на горизонтальный твердый пол.

Обратимся сначала к некоторым предварительным геометрическим соображениям. Пусть мы имеем некоторую плоскую кривую C (фиг. 27), отнесенную к прямоугольным осям Gy_0z_0, причем за положительное направление вращения вокруг точки G плоскости y_0z_0 принимается то, которое идет от оси y_0 к оси z_0 (через прямой угол). Обозначим через y_0, z_0 координаты произвольной точки O кривой, через GP — перпендикуляр, опущенный из G на касательную в точке O, через θ — угол оси Gz_0 относительно направленной прямой GP и через h — расстояние (положительное) GP. Относя, если необходимо, наши рассуждения к надлежащим образом ограниченной дуге кривой C, мы можем принять угол θ за параметр, пригодный для определения положения произвольной точки O кривой, благодаря чему y_0, z_0 и h можно рассматривать как однозначные функции угла θ, определяемые геометрической природой кривой C. Далее, так как направляющие косинусы касательной в точке O пропорциональны соответствующим значениям производных y_0', z_0' функций y_0, z_0 по θ, а направляющие косинусы полупрямой GP, параллельной нормали, равны $\sin\theta$, $\cos\theta$, мы для произвольной точки O будем иметь



Фиг. 27

$$y_0'\sin\theta + z_0'\cos\theta = 0. \tag{31}$$

С другой стороны, проектируя вектор $\overrightarrow{GO}$ на направление GP, получим

$$y_0\sin\theta + z_0\cos\theta = h. \tag{32}$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (31), в результате дифференцирования по θ получим

$$y_0\cos\theta - z_0\sin\theta = h'. \tag{32'}$$

Левая часть этого равенства, взятая с обратным знаком, представляет собой проекцию вектора $\overrightarrow{GO}$ на направленную прямую, образующую с осью y_0 угол $\pi - \theta$. Поэтому $-h'$ есть абсцисса точки P относительно точки соприкосновения O, причем положительным направлением абсциссы будет направление, указанное на фигуре.

Решая оба последних уравнения относительно y_0, z_0, получим

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= h\sin\theta + h'\cos\theta, \\ z_0 &= h\cos\theta - h'\sin\theta; \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

эти равенства представляют собою, если предполагается известным выражение h через θ, параметрические уравнения кривой C (или, по крайней мере, той ее дуги, которую мы условились рассматривать) в функции параметра θ.

Так, например, если C есть дуга окружности с радиусом ε, имеющей центр Q на оси Gz_0 и именно в точке с координатами O, ρ, то, проектируя ломаную GQO на GP, получим

$$h = \rho \cos \theta + \varepsilon, \tag{34}$$

откуда следует

$$h' = -\rho \sin \theta; \tag{35}$$

достаточно подставить эти значения h и h' в уравнения (33), чтобы иметь параметрические уравнения дуги окружности. Необходимо заметить, что уравнения (33) остаются в силе и в предельном случае, когда при ε, стремящемся к нулю, дуга окружности сводится к точке.

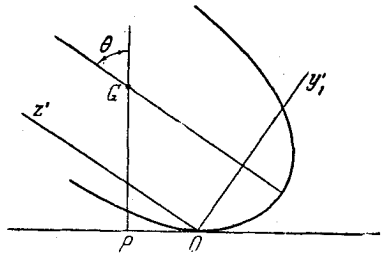
Возвращаясь, наконец, к общему случаю, заметим, что если рассматривается система осей $Oy'z'$, соответственно параллельных осям Gy_0z_0 и направленных в обратную сторону, то y_0, z_0 можно истолковать как координаты точки G относительно новой системы.

18. Случай твердого тела с круглым основанием (и, в частности, случай диска). Если y_0, z_0, вместо того чтобы изменяться в зависимости от угла θ, остаются постоянными (положительными) при изменении θ, то мы, очевидно, имеем случай твердого тела с круглым основанием, соприкасающегося с плоскостью в некоторой, вполне определенной относительно осей Gy_0z_0 точке; при движении тела точка касания перемещается вдоль окружности, неподвижной в теле с радиусом $a = y_0$. Для диска, кроме того, имеем еще $z_0 = 0$. Во всяком случае всегда остаются в силе уравнения (31), (32) и другие, установленные ранее, формулы.

19. Система отсчета для тела вращения. После этих предварительных замечаний обратимся к телу вращения вокруг оси z, имеющему по отношению к этой оси гироскопическую структуру, что обязательно будет иметь место, если симметрия относительно оси z будет не только геометрической, но также и материальной; предположим, что тело может свободно двигаться, опираясь на горизонтальную плоскость π. Если O есть точка, в которой в некоторый момент происходит соприкосновение между телом и опорной плоскостью, а G есть центр тяжести твердого тела, необходимо лежащий на оси симметрии z, то плоскость меридиана Oz, проходящая через точку соприкосновения, обязательно будет вертикальной, как плоскость, перпендикулярная к касательной в точке O к параллели твердого тела, лежащей в плоскости π.

Для постановки задачи о движении рассматриваемого нами тела вращения введем и здесь три системы осей: систему (неподвижную)

$\Omega\xi\eta\zeta$, плоскость $\xi\eta$ которой совпадает с опорной плоскостью и ось ζ (вертикальная) направлена вверх, систему $Gxyz$, неподвижную в теле, в которой, ограничивая, если необходимо, наши исследования подходящим промежутком времени, будем предполагать ось z (гироскопическую для твердого тела) направленной вверх от опорной плоскости, и, наконец, систему $Ox'y'z'$, которую будем называть также стереонодальной, поскольку мы предполагаем, что ось Oz' параллельна Gz и ось Ox' представляет собой касательную к параллели твердого тела, проходящей через точку O, и, следовательно, параллельна линии узлов системы $Gxyz$ относительно неподвижной системы. Отсюда следует, что ось Oy' лежит в вертикальной меридианной плоскости OGz и перпендикулярна к Gz.



Фиг. 28

Пересечение поверхности тела с этой вертикальной плоскостью OGz дает как раз кривую, изображенную на фиг. 28 предыдущего пункта, которую мы воспроизводим здесь (фиг. 28), упраздняя оси Gy_0z_0, теперь уже бесполезные; заметим, что первую стереонодальную ось Ox' надо полагать перпендикулярной к плоскости фигуры и направленной так, чтобы система $Ox'y'z'$ была правой.

Рассмотренный в предыдущем пункте угол θ является здесь третьим углом Эйлера (или углом нутации) системы, неподвижной в теле (и также углом нутации стереонодальной системы), относительно неподвижной системы; координатами же центра тяжести G относительно стереонодальных осей будут 0, y_0, z_0, где y_0, z_0 суть функции угла θ, определяемые уравнениями (33) (п. 17), если при этом в качестве функции $h(\theta)$ берется функция, соответствующая меридианной кривой рассматриваемого здесь твердого тела вращения.

Заметим, наконец, что гироскопическое тело с круглым основанием (п. 18) представляет собой предельный случай рассмотренного здесь тела вращения, когда при наличии острого кругового ребра соприкосновение с опорной плоскостью может происходить только в точках некоторой окружности. В этом случае y_0, z_0, очевидно, будут постоянными (т. е. не зависящими от θ).

20. Движение тяжелого твердого тела вращения в случае отсутствия трения. Каковы бы ни были силы, действующие на твердое тело, движение его и в этом случае определяется, как обычно, основными уравнениями. Ограничиваясь, как было сказано вначале, случаем, когда приложенной силой является исключительно сила тяжести, мы покажем прежде всего, что в том случае, когда опорная плоскость абсолютно гладкая, задача может быть сведена к квадратурам.

Из первого основного уравнения

$$\frac{dQ}{dt} = R, \tag{36}$$

вследствие того, что результирующая сила R, равно как и ее составляющие (вес и реакция опоры), вертикальна, мы видим, что горизонтальная составляющая производной dQ/dt будет все время равна нулю; поэтому горизонтальная составляющая количества движения Q будет постоянна, а следовательно, на основании тождества $Q = mv_G$ (гл. IV, п. 12) будет постоянна и горизонтальная составляющая скорости v_G центра тяжести. Таким образом, при отсутствии трения горизонтальная проекция P центра тяжести движется прямолинейно и равномерно.

Рассмотрим сначала случай, когда эта проекция остается неподвижной и примем ее за начало Ω неподвижных осей. Если обозначим через N нормальную реакцию опоры (представляющую собой, благодаря отсутствию трения, полную реакцию) и вспомним, что высота центра тяжести есть h, то, проектируя уравнение (36) на вертикаль ζ, мы будем иметь скалярное уравнение

$$m\ddot{h} = -mg + N, \tag{36'}$$

которое вследствие того, что h есть известная функция от θ, даст реакцию для любого момента времени, как только удастся определить параметр θ в функции от времени.

Возьмем для этой цели второе основное уравнение, которое, если за центр моментов принять центр тяжести, принимает в этом случае свой наиболее простой вид

$$\frac{dK}{dt} = M; \tag{37}$$

обозначим, как обычно, через A и C главные моменты инерции (экваториальный и осевой) твердого тела относительно центра тяжести и через p, q, r — проекции угловой скорости ω твердого тела на стереонодальные оси $Ox'y'z'$ или, что все равно, на оси $G\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, с началом в центре тяжести и одинаково направленными с осями x', y', z' (эта система $G\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, как бы ни были расположены в теле оси $\bar{x}$, $\bar{y}$, всегда состоит из главных осей инерции). Так как линии действия силы тяжести и реакции пересекают ось z, то уравнение (37) после проектирования на эту ось, как и в случае тяжелого гороскопа, дает

$$C\dot{r} = 0,$$

откуда и следует постоянство проекции угловой скорости r, т. е. первый интеграл $r = r_0$.

Далее, вместо того, чтобы проектировать уравнение (37) на экваториальную плоскость, мы обратимся к интегралам живых сил и моментов относительно вертикали

$$T - U = E, \quad K_\zeta = c, \tag{38}$$

которые, очевидно, существуют также и в этом случае. Для того чтобы написать их в явной форме, заметим, что потенциал, если предположить его равным нулю в опорной плоскости, определяется равенством

$$U = -mgh;$$

с другой стороны, если, как обычно, обозначим через γ_1, γ_2, γ_3 направляющие косинусы вертикальной оси ζ относительно системы осей $Ox'y'z'$, то будем иметь

$$T = \frac{1}{2} m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}(A[p^2 + q^2] + Cr_0^2),$$

$$K_\zeta = A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + C\gamma_3 r_0.$$

Теперь $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \sin\theta$, $\gamma_3 = \cos\theta$ и при заданной гироскопической структуре твердого тела относительно этой стереонодальной системы будут иметь место уравнения (20) п. 9, так что, рассматривая h как функцию от t через посредство θ, обоим первым интегралам (38) можно придать вид

$$\dot{\theta}^2(A + mh'^2) + A\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + 2mgh = E, \tag{39}$$

$$A\dot{\psi}\sin^2\theta + Cr_0\cos\theta = c. \tag{40}$$

где для краткости положено $2E - Cr_0^2 = E_1$. Достаточно исключить из этих уравнений $\dot{\psi}$, чтобы видеть, что угол нутации θ определяется в функции от времени уравнением известного типа

$$\dot{\theta}^2 = \Phi(\theta), \tag{41}$$

которое, как мы уже знаем, интегрируется в квадратурах; после этого на основании уравнений (20) посредством квадратур определяются все остальные неизвестные величины задачи.

Заметим, без доказательства, что всякий раз, как высота h центра тяжести будет рациональной функцией от $\sin\theta$ и $\cos\theta$, квадратура при интегрировании уравнения (41) сведется к гиперэллиптической, если за неизвестную функцию примем $\operatorname{tg}\theta/2$; таким, в частности, будет случай, когда h выражено формулой (34), которая справедлива для обыкновенного волчка как в том предельном случае, когда он опирается на плоскость в одной точке ($\varepsilon = 0$), так и в том случае, когда его основание представляет собой полусферу.

Как бы то ни было, при всяком движении твердого тела, когда проекция P центра тяжести на опорную плоскость остается

неподвижной, гироскопическая ось z, в то время как проходящая через нее вертикальная плоскость вращается вокруг вертикали, совершает периодическое нутационное движение между двумя крайними значениями углов θ_1 и θ_2, представляющими собой простые нули функции $\Phi(\theta)$ (если бы начальные условия соответствовали двойному нулю функции $\Phi(\theta)$, то мы имели бы снова движение прецессионного характера).

21. Перейдем теперь к случаю, когда проекция P центра тяжести на опорную плоскость не остается неподвижной, а движется прямолинейно и равномерно. В этом предположении систему $P\xi_1\eta_1\zeta_1$ с началом в P и осями, параллельными неподвижным осям ξ, η, ζ и одинаково направленными с ними, можно рассматривать как галилееву систему, так что относительно нее остаются в силе основные уравнения в представленной в предыдущем пункте форме. Поэтому можно сказать, что относительно этих новых осей опорная плоскость находится в прямолинейном и равномерном поступательном движении, противоположном действительному движению точки P; но так как эта плоскость по предположению абсолютно гладкая, то ее движение никоим образом не влияет на реакцию в точке O; поэтому относительно осей $P\xi_1\eta_1\zeta_1$ остаются в силе все заключения и рассуждения предыдущего пункта.

22. Действие трения. После этого первого схематического разбора задачи, имеющего чисто теоретический характер, мы рассмотрим ее снова в виде, лучше соответствующем действительности, принимая во внимание трение.

Чтобы обнаружить наиболее существенные обстоятельства, нет необходимости давать полную явную форму уравнениям движения. Достаточно спроектировать основное уравнение моментов на вертикаль ζ и на гироскопическую ось z твердого тела. Для того чтобы сохранить для этого уравнения его более простой вид (37), удобно также и здесь принять за центр моментов центр тяжести, благодаря чему момент веса будет равен нулю. Поэтому момент M сведется к моменту реакции, которая в этом случае наряду с нормальной составляющей будет иметь и касательную составляющую (сила трения). Обозначая через Ξ, H, Z проекции реакции (полной) Φ на стереонодальные оси $Ox'y'z'$ и принимая во внимание, что координаты центра моментов G равны 0, y_0, z_0, мы найдем для проекций момента $M = \overrightarrow{GO} \times \Phi$ на оси x', y', z' и на вертикаль ζ выражения

$$M_{x'} = z_0 \mathrm{H} - y_0 \mathrm{Z}, \quad M_{y'} = -z_0 \Xi, \quad M_{z'} = y_0 \Xi,$$

$$M_\zeta = \gamma_1 M_{x'} + \gamma_2 M_{y'} + \gamma_3 M_{z'},$$

последнее из которых, если принять во внимание предыдущие три равенства, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_3 = \sin\theta$, $\gamma_3 = \cos\theta$, а также уравнение (32′) п. 17, принимает вид

$$M_\zeta = (y_0 \cos\theta - z_0 \sin\theta)\,\Xi = h'\Xi.$$

После этого, проектируя основное уравнение (37) на вертикаль (неподвижную) ζ и на гироскопическую ось z, мы получим уравнения

$$\dot{K}_\zeta = h'\Xi, \quad C\dot{r} = y_0\Xi;$$

исключая Ξ, приходим к уравнению

$$y_0\dot{K}_\zeta - Ch'\dot{r} = 0, \tag{42}$$

где, конечно, вместо y_0 надо подставить его выражение через θ, получающееся из первого из уравнений (33); для K_ζ остается еще справедливым выражение, получающееся из левой части уравнения (40), если заменить в нем r_0 на r, так что имеем

$$K_\zeta = A\dot{\psi}\sin^2\theta + Cr\cos\theta. \tag{43}$$

До тех пор пока не сделано никакого определенного предположения о форме тела, т. е., по существу, о виде функции $h(\theta)$, уравнение (42) не может быть проинтегрировано непосредственно. В случае волчка с округленным основанием (ножка, оканчивающаяся полусферой) имеем (п. 17)

$$h = \rho\cos\theta + \varepsilon, \quad h' = -\rho\sin\theta, \quad y_0 = \varepsilon\sin\theta,$$

так что уравнение (42), если предположить, что $\sin\theta > 0$ (т. е. если исключить случай, когда ось волчка расположена вертикально), принимает непосредственно интегрируемую форму

$$\varepsilon\dot{K}_\zeta + C\rho\dot{r} = 0.$$

Интегрируя от начального момента t_0 до любого момента t и пользуясь обычным значением символа конечного приращения, мы получим выражение

$$\varepsilon\Delta K_\zeta + C\rho\Delta r = 0, \tag{44}$$

которое приводит к замечательному заключению, когда речь идет о волчке, приведенном в очень быстрое вращательное движение и предоставленном самому себе на горизонтальном полу под некоторым, не равным нулю, углом θ_0, но без прецессионной скорости ($\dot{\psi}_0 = 0$). Для промежутка времени, в течение которого угловая скорость $\dot{\psi}$ остается ничтожной по сравнению с r, на основании уравнения (43) приблизительно будем иметь

$$K_\zeta = Cr\cos\theta,$$

так что уравнение (44) приведется к некоторому соотношению между одновременными конечными приращениями величин r и θ

$$\varepsilon\Delta(r\cos\theta) = -\rho\,\Delta r. \tag{44'}$$

Так как мы допустили, что точка соприкосновения ножки волчка с плоскостью не лежит на оси ($\theta_0 \gtrless 0$) и что, с другой стороны, движение твердого тела мало отличается от простого вращения с значительной угловой скоростью около оси Gz, то очевидно, что трение, действуя в любой момент в направлении, прямо противоположном скорости точки волчка, приходящей в соприкосновение с плоскостью, стремится уменьшить величину $|r|$ угловой скорости вращения. Если предположим для определенности $r > 0$, то будем иметь $\Delta r < 0$ и потому на основании соотношения (44′) будет

$$\Delta(r\cos\theta) > 0; \tag{45}$$

отсюда, так как произведение $r\cos\theta$, как доказано, возрастает, а первый множитель убывает, мы заключаем, что в моменты, непосредственно следующие за начальным, $\cos\theta$ возрастает, т. е. угол нутации θ начинает убывать. Таким образом, если имеют место указанные выше начальные условия, то *влияние трения в начале движения проявляется в том, что ось волчка приближается к вертикали, направленной вверх (стремится выпрямиться)*.

Для того чтобы иметь представление количественного характера о соотношении между этим выпрямлением оси и одновременным замедлением вращения вокруг этой оси, мы применим соотношение (44′) к числовому случаю. Для этой цели заметим сначала, что для относительной потери угловой скорости

$$\lambda = \frac{r_0 - r}{r_0}$$

из формулы (44′) мы получим выражение

$$\lambda = \frac{\varepsilon(\cos\theta - \cos\theta_0)}{\varepsilon\cos\theta + \rho};$$

поэтому полное выпрямление оси ($\theta = 0$) сопровождается относительной потерей скорости

$$\lambda = \frac{\varepsilon(1 - \cos\theta_0)}{\varepsilon + \rho}.$$

Если, например, предположим $\varepsilon = 3$ *мм*; $\rho = 5$ *см*, $\theta_0 = 45°$, то приблизительно найдем

$$\lambda = 0{,}014.$$

Мы видим, таким образом, что явление, происходящее от трения об опорную плоскость, будет резко бросаться в глаза, потому что при выпрямлении волчка угловая скорость испытывает почти незаметное уменьшение: немного больше одной сотой его начальной величины.

23. Дифференциальные уравнения движения в случае чистого качения. В заключение, возвращаясь к случаю твердого тела вращения с каким угодно меридианным сечением, обладающего гироскопической структурой, приведем здесь в явном виде уравнения, определяющие его движение, предполагая, что это движение происходит без скольжения.

В этом случае, так же как и в случае диска или тела гироскопической структуры с круглым основанием, закон движения вполне определяется вторым основным уравнением, если только за центр приведения в любой момент принимается та точка твердого тела, которая в этот момент совпадает с точкой соприкосновения тела с плоскостью. Вследствие этого автоматически исключается неизвестная реакция Φ и основное уравнение моментов принимает вид (гл. V, п. 17)

$$\dot{K} + \omega' \times K + v' \times Q = -\overrightarrow{OG} \times mg\varkappa, \tag{46}$$

где ω' обозначает угловую скорость стереонодальной системы $Ox'y'z'$, относительно которой взята производная $\dot{K}$, а v' обозначает скорость (абсолютную), которую в любой момент имеет точка соприкосновения O. Если примем во внимание, что координаты центра тяжести суть $0, y_0, z_0$, то для моментов инерции и моментов девиации (центробежных моментов) относительно стереонодальной системы найдем выражения

$$A_1 = A + m(y_0^2 + z_0^2), \quad B_1 = A + mz_0^2, \quad C_1 = C + my_0^2,$$
$$A_1' = my_0z_0, \quad B_1' = C_1' = 0,$$

формально аналогичные выражениям (16), (17) п. 18, но с тем существенным различием, что здесь y_0, z_0 более уже не являются постоянными, а зависят согласно уравнениям (33) от θ и, следовательно, от времени.

Отсюда, применяя, как в п. 8, общие формулы (29′), (30′) п. 15 гл. IV, найдем составляющие векторов Q и K в виде

$$Q_{x'} = m(z_0q - y_0r), \quad Q_{y'} = -mz_0p, \quad Q_{z'} = my_0p,$$
$$K_{x'} = A_1p, \quad K_{y'} = B_1q - my_0z_0r, \quad K_{z'} = C_1r - my_0z_0q.$$

С другой стороны, для того чтобы иметь выражение абсолютной скорости v' точки O (центра моментов), заметим прежде всего, что ее можно рассматривать так же, как скорость самой точки O, относительно осей, неподвижных в теле. Достаточно вспомнить теорему сложения скоростей и принять во внимание, что на основании предположения о чистом качении переносная скорость точки O равна нулю.

Заметив это, введем временно систему $G\bar{x}\bar{y}z$ с началом в точке G и с направлениями осей такими же, как и в стереонодальной системе

$Ox'y'z'$, т. е. с единичными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, и примем во внимание, что на основании теоремы сложения скоростей скорость $\boldsymbol{v}'$ точки O относительно осей, неподвижных в теле, можно рассматривать как сумму скорости $\boldsymbol{v}'_\tau$ точки O относительно вспомогательных осей $G\bar{x}\bar{y}z$ и переносной скорости $\boldsymbol{v}'_\tau$ точки O (предполагаемой неизменно связанной с этой системой) относительно осей, неподвижных в теле. Так как координаты точки O относительно $G\bar{x}\bar{y}z$ равны 0, $-y_0$, $-z_0$ (где y_0, z_0 означают, как обычно, известные функции от θ), то имеем $\overrightarrow{GO} = -(y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k})$, и, следовательно, если напишем p вместо $\dot{\theta}$ (в силу первого из равенств (20)), то получим

$$\boldsymbol{v}'_r = -p(y'_0\boldsymbol{j} + z'_0\boldsymbol{k}).$$

Так как, далее, система, неизменно связанная с телом, вращается относительно вспомогательной системы с угловой скоростью $\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$ и, следовательно, вспомогательная система вращается относительно системы неизменно связанной с телом, с угловой скоростью $-\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$, то имеем

$$\boldsymbol{v}'_\tau = -\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \times \overrightarrow{GO} = -y_0\dot{\varphi}\boldsymbol{i};$$

складывая два последних равенства, получаем

$$\boldsymbol{v}' = -y_0\dot{\varphi}\boldsymbol{i} - p(y'_0\boldsymbol{j} + z'_0\boldsymbol{k}).$$

Остается, наконец, рассмотреть момент силы тяжести, приложенной в точке G, относительно центра O; вследствие того, что проекции единичного вектора восходящей вертикали $\boldsymbol{\varkappa}$ на стереонодальные оси равны $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \sin\theta$, $\gamma_3 = \cos\theta$, этот момент будет равен

$$-(y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}) \times mg(\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})$$

или же на основании соотношения (32′)

$$-mgh'\boldsymbol{i}.$$

После этого, проектируя уравнение (46) на стереонодальные оси, получим для движения тяжелого твердого тела вращения, катящегося по горизонтальной плоскости, следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}(A_1p) + q\{C_1r - B_1(r - \dot{\varphi})\} - my_0z_0\{q^2 - r(r - \dot{\varphi})\} -$$
$$- m(y_0y'_0 + z_0z'_0)p^2 = -mgh',$$
$$\frac{d}{dt}(B_1q - my_0z_0r) + p\{A_1(r - \dot{\varphi}) - C_1r + my_0^2\dot{\varphi}\} +$$
$$+ my_0z_0pq - mz'_0p(z_0q - y_0r) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}(C_1r - my_0z_0q) - (A_1 - B_1)pq - my_0z_0(r - \dot{\varphi})p +$$
$$+ my'_0p(z_0q - y_0r) = 0,$$

где, конечно, y_0, z_0 означают функции θ, определяемые из уравнений (33).