§ 4. Гиростаты. Установившиеся циклические движения

24. Определение гиростата. Рассмотрим материальную систему Σ, состоящую из неизменяемой части S (ядро, оправа, арматура, оболочка и т. п.) и из других тел S', изменяемых или твердых, но связанных не неизменно с S. Такими системами будут, например, сосуд с твердыми стенками, содержащий жидкость, оправа, в которую вмонтированы один или больше гироскопов, карманные часы, велосипед, пароход со всеми его механизмами и т. п.

Ясно, что в этих случаях, предполагая известными внешние силы, приложенные к системе, нельзя приступить к изучению движения неизменяемой части S, не рассматривая одновременно движения других частей S' системы Σ. Хорошо известный случай, когда влияние этих частей S' на движение тела S можно схематически представить в довольно простой форме, мы будем иметь, когда движение частей S' будет *циклическим*, т. е. будет происходить все время так, что распределение масс всей системы Σ не будет изменяться. Это будет иметь место, например, в том случае, когда с твердым телом S неизменно связаны оси нескольких гироскопов в тесном смысле слова, т. е. гироскопов, обладающих полной симметрией (физической и геометрической), так как в этом случае распределение масс всей системы остается неизменным. То же самое можно сказать о твердом теле, в котором сделана полость в форме тора, наполненная однородной жидкостью, находящейся в каком угодно движении.

Обобщая выражение, применяемое английскими механиками, мы будем называть такие материальные системы с внутренними циклическими движениями *гиростатами*.

Необходимо тотчас же отметить, что в гиростате при заданном распределении масс в результате внутренних движений не изменятся ни положение центра тяжести, ни направления главных осей, ни моменты инерции, отнесенные к центру тяжести или к какой-нибудь другой точке, неизменно связанной с твердой частью S гиростата.

С другой стороны, заметим, что абсолютную скорость какой-нибудь точки P части S' всегда можно представить себе разложенной на геометрическую сумму переносной скорости (которую имела бы точка P, если бы вся система Σ была твердой) и ее относительной скорости по отношению к S. Соответственно этому результирующий вектор и результирующий момент количеств движения можно разложить каждый на два вектора, первый из которых относится ко всей системе Σ, рассматриваемой как твердое тело, а второй представляет собой составляющую, происходящую от внутренних движений.

25. Основное уравнение моментов для гиростата. В случае гиростата, так как он не является вполне неизменяемой системой, нельзя

уже сказать, что основные уравнения, оставаясь в силе, будут, вообще говоря, достаточны для определения движения. Чтобы точнее указать, в чем заключается недостаточность этих уравнений, приведем пример, показывающий, что ее можно устранить, и рассмотрим сначала случай, когда неизменяемая часть S гиростата Σ закреплена в одной из своих точек O. Для определения движения твердого тела, закрепленного таким образом, достаточно основного уравнения моментов. Посмотрим, что может дать это уравнение в случае гиростата.

Представим себе, что (абсолютный) результирующий момент количеств движения гиростата относительно точки O разложен на два слагаемых, указанных в конце предыдущего пункта: на вектор $\boldsymbol{K}$, происходящий от переносного движения, и на вектор $\boldsymbol{\chi}$, появляющийся благодаря внутренним движениям и называемый гиростатическим моментом. В силу этого основное уравнение моментов принимает вид

$$\frac{d(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\chi})}{dt}=\boldsymbol{M}, \tag{47}$$

где дифференцирование надо отнести к неподвижным осям, а $\boldsymbol{M}$ обозначает результирующий момент относительно точки O всех *внешних* сил, приложенных ко всей системе Σ; если обозначить через $\boldsymbol{\omega}$ угловую скорость неизменяемой части S, то это же уравнение можно написать в равносильной форме

$$\dot{\boldsymbol{K}}+\dot{\boldsymbol{\chi}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\chi})=\boldsymbol{M}, \tag{47'}$$

где, как обычно, точками, поставленными сверху, обозначаются производные по времени от $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{\chi}$, отнесенные к триедру, неизменно связанному с S.

Если за основные неизвестные принимаются углы Эйлера θ, φ, ψ, определяющие относительно неподвижных осей, проходящих через точку O, положение неизменяемой части S, то векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ могут быть выражены в функциях от θ, φ, ψ и от их первых производных. То же самое можно сказать и о векторе $\boldsymbol{M}$, если мы ограничимся случаем (который не является наиболее общим из возможных), когда внешние силы, предполагающиеся заданными, зависят от положения и состояния движения одной только твердой части S. Остается еще гиростатический момент $\boldsymbol{\chi}$, который выражает влияние циклических движений; уравнение (47) или равносильное ему уравнение (47′) уже не будет достаточным для постановки задачи о движении системы Σ до тех пор, пока не удастся каким-нибудь способом определить вектор $\boldsymbol{\chi}$, для чего, вообще говоря, требуется изучение механического поведения частей S' системы Σ. Рассмотрим пока частный случай, пригодный для интересных приложений, когда задача упрощается, поскольку сами предположения позволяют заранее видеть, что гиростатический момент $\boldsymbol{\chi}$ является постоянным. В общем случае, следуя

Вольтерра[1]), мы можем заметить, что если уже определено вращательное движение неизменяемой части S и известен результирующий момент M внешних сил, то уравнение (47) или (47′) определит момент χ, поскольку оно дает систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно соответствующих составляющих.

26. Движение гиростата вокруг центра тяжести. Понятие о задаче об изменении широт. Основное уравнение моментов сохраняет, как известно, для материальной системы свой вид (47′) также и в том случае, когда центр моментов во все время движения совпадает с центром тяжести системы. Это, в частности, имеет силу также и для гиростата, центр тяжести G которого в силу самого определения системы является точкой, неизменно связанной с твердой частью S. Как уже было отмечено выше (п. 24), то же самое можно сказать и о главных осях инерции относительно точки G, так что уравнение (47′) продолжает оставаться в силе, если оно отнесено к этим осям. Это уравнение и в данном случае может однозначно определить гиростатический момент χ, если известно движение S около G и задан результирующий момент внешних сил.

Эти замечания нашли интересное применение в так называемой *задаче об изменении широт*. Эта задача ведет свое начало от того факта, полученного из наблюдений, что движение Земли около ее центра тяжести не только не является простым суточным вращением, рассматриваемым в элементарной космографии, но, строго говоря, не является даже регулярной прецессией, понятие о которой мы дали в п. 20 гл. IV т. I, и даже не представляет собой то общее возмущенное движение (которым мы будем заниматься в п. 61 следующей главы), которое могла бы предвидеть механика абсолютно неизменяемых тел, когда принимается во внимание лунно-солнечное притяжение. Остаются необъяснимыми некоторые дальнейшие малые перемещения мгновенной оси вращения Земли как относительно полярной земной оси, так и относительно неподвижных звезд. Именно эти весьма малые перемещения мгновенной оси относительно неподвижных звезд и вызывают так называемые *изменения широт* (на небесной сфере).

Эти изменения, которые при содействии международной комиссии в течение многих лет являются предметом аккуратных наблюдений и систематических исследований на специальных станциях[2]), с полным основанием приписываются несовершенной твердости Земли.

Вольтерра на основании указанных выше наблюдений отметил (см. упомянутую работу), что, не прибегая к предположению о

---

[1]) Volterra, Sur la théorie des variations des latitudes, *Acta math.* т. 22, 1899, стр. 201—358.

[2]) Из этих станций, расположенных на одной и той же 39-ой параллели северной широты, одна находится в Карлофорте в Сардинии, две принадлежат Соединенным Штатам, одна Японии и две СССР.

пластических деформациях Земли, эти изменения широт всегда можно было бы объяснить посредством подходящего гиростатического момента χ, предполагая существование некоторого внутреннего циклического движения, что является возможным на основании того факта, что на самой поверхности Земли можно наблюдать непосредственно движения, которые, по крайней мере в первом приближении, имеют циклический характер (морские, речные, атмосферные течения)*).

27. Установившиеся циклические движения. Уравнения Вольтерра. Предположим, что внутренние циклические движения гиростата Σ являются установившимися или стационарными; под этим мы понимаем, что неизменным во времени по отношению к неизменяемой части S гиростата остаются не только распределение масс, но также и распределение скоростей (относительных) отдельных материальных точек части S'. Если, например, гиростат состоит из ящика, внутри которого свободно вращаются вокруг осей, неизменно связанных с ним, гироскопы (в узком смысле), то для стационарности внутренних движений необходимо и достаточно, чтобы оставалась постоянной угловая скорость каждого гироскопа, что можно себе представить осуществленным посредством подходящих электрических приборов.

В случае установившихся внутренних движений результирующий момент χ (относительных) количеств движения части S' относительно какой-нибудь точки O, неизменно связанной с S, очевидно, будет вектором, постоянным относительно S; это будет иметь место, в частности, как в том случае, когда центр приведения O представляет собой закрепленную точку части S, так и в том случае, когда он совпадает в любой момент с центром тяжести Σ. В обоих этих случаях уравнение (47) или равносильное ему уравнение (47′) при условии, что результирующий момент $\boldsymbol{M}$ внешних сил можно выразить через углы Эйлера и их первые производные, становится пригодным для определения этих главных неизвестных θ, φ, ψ задачи (в функциях времени, постоянных интегрирования и постоянных составляющих гиростатического момента).

Замечательное упрощение, соответствующее тому результату, что для твердого тела, закрепленного в одной точке, движение приводится к движению по Пуансо, мы будем иметь в том случае, когда внешние силы, действующие на гиростат, будут все равны нулю или, по крайней мере, будут иметь результирующий момент относительно O, равный нулю (*спонтанное движение гиростата* или *движение гиростата по инерции*).

Уравнение (47′) приведется тогда к виду

$$\dot{K} + \omega \times (K + \chi) = 0. \tag{48}$$

*) Этот вопрос изложен в работе Н. Е. Жуковского: „Геометрическая интерпретация теории движения полюсов вращения Земли по ее поверхности“, Полное собрание сочинений, т. I, 1937. *(Прим. ред.)*

Если x, y, z являются главными осями инерции, относящимися к полюсу O (неподвижному или совпадающему с центром тяжести), и A, B, C — соответствующие главные моменты инерции гиростата, то для составляющих вектора $\boldsymbol{K}$ мы будем иметь обычные канонические выражения

$$K_x = Ap, \quad K_y = Bq, \quad K_z = Cr. \tag{49}$$

Проектируя уравнение (48) на эти оси, получим следующие *уравнения Вольтерра*:

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)\,qr + q\chi_z - r\chi_y &= 0, \\ B\dot{q} - (C - A)\,rq + r\chi_x - p\chi_z &= 0, \\ C\dot{r} - (A - B)\,pq + p\chi_y - q\chi_x &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{48'}$$

где, не надо забывать, составляющие χ_x, χ_y, χ_z гиростатического момента являются постоянными.

28. Первые интегралы. Уравнения Вольтерра, или уравнения спонтанного движения гиростата с внутренними установившимися движениями, так же как и уравнения Эйлера, допускают два первых интеграла: интеграл моментов количеств движения и интеграл живых сил (ср. гл. VIII, п. 9). Эти интегралы легко получаются формальным путем из тех же уравнений (48′), но еще проще получить их, если обратиться и здесь к уравнению моментов количеств движения в векторной форме.

Из уравнения (47), если иметь в виду, что $\boldsymbol{\chi} = \text{const}$, $\boldsymbol{M} = 0$, непосредственно видно, что (абсолютный) момент количеств движения остается постоянным относительно неподвижных осей, так что, в частности, остается постоянной его абсолютная величина K, т. е., на основании равенств (49), имеет место уравнение

$$K^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const}.$$

С другой стороны, умножая скалярно на $\boldsymbol{\omega}$ уравнение (48), получим, пользуясь формулой (13), т. I, гл. VI, п. 10,

$$\dot{\boldsymbol{K}} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0,$$

а на основании уравнений (49) будем иметь тождественно

$$\dot{\boldsymbol{K}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{K} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Отсюда следует (т. I, гл. IV, п. 10, (13)) соотношение

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\omega})=0,$$

интегрируя которое получим

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\omega}\equiv Ap^2+Bq^2+Cr^2=\text{const}.$$

Квадратичная форма относительно p, q, r, стоящая в левой части этого уравнения, представляет собой удвоенную живую силу T гиростата Σ, рассматриваемого как одно твердое тело, поэтому этот второй интеграл можно написать в виде

$$T=\text{const}.$$

Как мы видим, он не зависит от момента $\boldsymbol{\chi}$, т. е. от величин χ_x, χ_y, χ_z, которые явно входят в уравнение движения (48′), хотя как раз вектор $\boldsymbol{\chi}$ и определяет различие в механическом поведении гиростата Σ и того твердого тела, которое получится, если рассматривать гиростат как неизменяемую систему. Это обстоятельство и служит основанием для названия *гиростатические члены*, принятого в п. 44 гл. V для обозначения тех членов дифференциальных уравнений движения какой угодно системы, которые ничего не прибавляют к соответствующему интегралу энергии.

В случае Пуансо мы видели, как, используя два первых интеграла — интеграл моментов количеств движения и интеграл живой силы, можно прийти к наглядному представлению геометрической картины движения.

Аналогичные результаты для движения гиростата с внутренними установившимися движениями и с таким же изяществом получил Вольтерра [1]) из двух указанных выше первых интегралов.

29. Гиростат с гироскопической структурой. Мы будем говорить, что гиростат имеет *гироскопическую структуру*, если: а) неизменное распределение масс системы Σ является гироскопическим относительно неизменно связанной с телом оси z, проходящей через центр тяжести; б) гиростатический момент (или результирующий момент количеств движения в относительном движении) $\boldsymbol{\chi}$ направлен по этой оси.

Для оправы, содержащей гироскопы с осями, неизменно связанными с ней, эти два предположения будут, конечно, осуществимы, если оправа и гироскопы в их совокупности обладают полной геометрической и физической симметрией относительно какой-нибудь оси, которая будет также осью каждого из гироскопов.

---

[1]) Цит. соч.; см. также O. Lazzarino, Teoria sintetica dei moti giroscopici di sistemi non completamente rigidi, Esercitazioni matematiche (Catania), Anno III, 1923, стр. 153—160.

Представляя себе, что такой гиростат подвергается действию каких угодно сил, мы рассмотрим его движение вокруг какой-нибудь точки O оси в предположении, что эта точка удерживается неподвижной или совпадает в любой момент с центром тяжести системы. Тогда будут справедливы рассуждения предыдущих пунктов со следующими дополнительными условиями (структурными и динамическими):

$$A = B, \quad \chi_x = \chi_y = 0,$$

первое из которых позволяет, как и в случае тела с гироскопической структурой (гл. IV, п. 17), положить

$$\omega = e + rk, \quad K = Ae + Crk,$$

где k обозначает единичный вектор гироскопической оси гиростата.

Соответственно этому, если обозначим через M_1 экваториальную составляющую результирующего момента внешних сил, то вместо уравнений (48′) можно подставить два равносильных уравнения.

$$C(\dot{r} + \dot{\chi}_z) = M_z,$$

$$A\dot{e} - \{(C - A)r + \chi_z\} k \times e = M_1,$$

которые отличаются от уравнений, относящихся к твердому телу с гироскопической структурой относительно полюса (уравнения (15), (16) п. 17 предыдущей главы), только наличием членов (гиростатических) с χ_z.

Легко было бы видеть на основании рассуждений § 2 предыдущей главы, что если гиростатический момент χ_z значителен по сравнению с проекциями Ap, Bq, Cr момента K, то можно обнаружить те же элементарные явления (стремление к параллельности и сохранение направления оси), которые мы видели в случае гироскопа, так что мы приходим к подтверждению существования гиростатической устойчивости, совершенно аналогичной гироскопической устойчивости (предыдущая глава, п. 42).

Любопытное приложение таких гиростатических явлений можно иногда видеть в театрах варьетэ. Закрытый цилиндрический сосуд, радиус основания которого больше высоты, содержит внутри себя расположенный вдоль оси цилиндра быстро вращающийся гироскоп; цилиндр опирается на пол одной из своих образующих. Сильный человек, толкая цилиндр от себя, не может повалить его на одно из оснований, тогда как под действием относительно небольшого усилия, имеющего характер пары с вертикальной осью, цилиндр, благодаря стремлению его гироскопической оси расположиться вертикально, в конце концов, хотя и медленно, ложится на пол.

Важное практическое приложение гиростатическая устойчивость нашла в приборе Шлика, предназначенном для уменьшения качки

больших трансатлантических пароходов, в однорельсовой железной дороге Бреннана, в искусственном горизонте Флерье для наблюдений на секстанте на кораблях, в приборах, предназначенных для поддержания постоянным направления движения торпед, и т. п. [1])*)

УПРАЖНЕНИЯ

1. Однородный шар, катящийся и скользящий по наклонной шероховатой плоскости. Возьмем снова положения пп. 1 и 2 текста, принимая за плоскость $\zeta = 0$ опорную плоскость с осью ζ, направленной вверх, и осью ξ, направленной по линии наибольшего ската вниз. Обозначим через i угол наклона плоскости, который надо принять существенно положительным, так как случай горизонтальной плоскости был уже исчерпан в § 1. Здесь продолжают оставаться в силе кинематические уравнения

$$v_\xi = \dot{\alpha} - R\chi, \quad v_\eta = \dot{\beta} + R\pi \tag{1}$$

и основные уравнения движения, которые, если принять во внимание, что проекции веса суть $mg\sin i$, 0, $-mg\cos i$ и проекции реакции Φ плоскости Φ_ξ, Φ_η, $\Phi_\zeta = N$, можно написать в виде

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{m}\Phi_\xi + g\sin i, \quad \ddot{\beta} = \frac{1}{m}\Phi_\eta, \quad 0 = -g\cos i + \frac{1}{m}N; \tag{2}$$

$$\frac{2}{5}\dot{\pi} = -\frac{1}{mR}\Phi_\eta, \quad \frac{2}{5}\dot{\chi} = \frac{1}{mR}\Phi_\xi, \quad \dot{\rho} = 0. \tag{3}$$

---

[1]) Klein-Sommerfeld, Theorie d. Kreisels т. IV; Gray, Gyrostatics and rotational motion, 1918, гл. VII; J. Rèveille, Dynamique des solides, 1923, гл. VI.

*) Гироскопы, предназначенные для стабилизации, связаны с объектом стабилизации не так, как это изложено в тексте.

Описание и изложение теории гироскопических стабилизаторов можно найти в книгах: А. Н. Крылов и Ю. А. Крутков, Общая теория гироскопов, 1932; Б. В. Булгаков, Прикладная теория гироскопов, 1938.

Крылов Алексей Николаевич родился в 1863 г. в г. Алатыре Ульяновской обл.; умер в Ленинграде в 1945 г. В 1890 г. окончил кораблестроительное отделение Морской академии и был оставлен при ней для усовершенствования; первое время вел практические занятия по математике, а впоследствии читал лекции по математике и теории корабля. Одновременно с плодотворной и разносторонней научной деятельностью вел практическую и организационную работу в качестве главного инспектора кораблестроения. В 1916 г. был избран в действительные члены Академии Наук и назначен директором Главной физической обсерватории.

Научные работы А. Н. Крылова охватывают многие отделы прикладной математики, механики, аэродинамики, геофизики и разнообразные вопросы техники. Уже в первых своих работах по теории корабля он зарекомендовал себя выдающимся и оригинальным исследователем и приобрел мировую известность. В своих работах по баллистике, по теории компасов, по строительной механике он сочетал строгий научный подход к решению конкретных технических проблем с поразительной простотой и ясностью изложения и всегда доводил анализ решения до практически важных выводов. (*Прим. ред.*)