больших трансатлантических пароходов, в однорельсовой железной дороге Бреннана, в искусственном горизонте Флерье для наблюдений на секстанте на кораблях, в приборах, предназначенных для поддержания постоянным направления движения торпед, и т. п. [1])*)

УПРАЖНЕНИЯ

1. Однородный шар, катящийся и скользящий по наклонной шероховатой плоскости. Возьмем снова положения пп. 1 и 2 текста, принимая за плоскость $\zeta = 0$ опорную плоскость с осью ζ, направленной вверх, и осью ξ, направленной по линии наибольшего ската вниз. Обозначим через i угол наклона плоскости, который надо принять существенно положительным, так как случай горизонтальной плоскости был уже исчерпан в § 1. Здесь продолжают оставаться в силе кинематические уравнения

$$v_\xi = \dot{\alpha} - R\chi, \quad v_\eta = \dot{\beta} + R\pi \tag{1}$$

и основные уравнения движения, которые, если принять во внимание, что проекции веса суть $mg\sin i$, 0, $-mg\cos i$ и проекции реакции Φ плоскости Φ_ξ, Φ_η, $\Phi_\zeta = N$, можно написать в виде

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{m}\Phi_\xi + g\sin i, \quad \ddot{\beta} = \frac{1}{m}\Phi_\eta, \quad 0 = -g\cos i + \frac{1}{m}N; \tag{2}$$

$$\frac{2}{5}\dot{\pi} = -\frac{1}{mR}\Phi_\eta, \quad \frac{2}{5}\dot{\chi} = \frac{1}{mR}\Phi_\xi, \quad \dot{\rho} = 0. \tag{3}$$

---

[1]) Klein-Sommerfeld, Theorie d. Kreisels т. IV; Gray, Gyrostatics and rotational motion, 1918, гл. VII; J. Rèveille, Dynamique des solides, 1923, гл. VI.

*) Гироскопы, предназначенные для стабилизации, связаны с объектом стабилизации не так, как это изложено в тексте.

Описание и изложение теории гироскопических стабилизаторов можно найти в книгах: А. Н. Крылов и Ю. А. Крутков, Общая теория гироскопов, 1932; Б. В. Булгаков, Прикладная теория гироскопов, 1938.

Крылов Алексей Николаевич родился в 1863 г. в г. Алатыре Ульяновской обл.; умер в Ленинграде в 1945 г. В 1890 г. окончил кораблестроительное отделение Морской академии и был оставлен при ней для усовершенствования; первое время вел практические занятия по математике, а впоследствии читал лекции по математике и теории корабля. Одновременно с плодотворной и разносторонней научной деятельностью вел практическую и организационную работу в качестве главного инспектора кораблестроения. В 1916 г. был избран в действительные члены Академии Наук и назначен директором Главной физической обсерватории.

Научные работы А. Н. Крылова охватывают многие отделы прикладной математики, механики, аэродинамики, геофизики и разнообразные вопросы техники. Уже в первых своих работах по теории корабля он зарекомендовал себя выдающимся и оригинальным исследователем и приобрел мировую известность. В своих работах по баллистике, по теории компасов, по строительной механике он сочетал строгий научный подход к решению конкретных технических проблем с поразительной простотой и ясностью изложения и всегда доводил анализ решения до практически важных выводов. (*Прим. ред.*)

После исключения из уравнений (2) и (3) реакций, т. е. Φ_ξ, Φ_η, N, получим три уравнения

$$\ddot{\alpha} - \frac{2}{5} R\dot{\chi} = g \sin i, \qquad \ddot{\beta} + \frac{2}{5} R\dot{\pi} = 0, \qquad \dot{\rho} = 0, \tag{4}$$

которые сохраняют силу в течение всего времени движения независимо от того, будет ли иметь место скольжение шара по плоскости или нет.

Уравнения (4) непосредственно интегрируются:

$$\dot{\alpha} - \frac{2}{5} R\chi = g \sin i\, t + c_1, \qquad \dot{\beta} + \frac{2}{5} R\pi = c_2, \qquad \rho = c_3, \tag{4'}$$

где c_1, c_2, c_3 означают постоянные интегрирования. Но теперь, чтобы идти дальше в изучении вопроса, надо отличать, как и в § 1, фазу скольжения, когда $v > 0$, от фазы чистого качения.

а) *Фаза скольжения*. В этом случае для реакции Φ имеет место закон *динамического* трения, т. е. проекции Φ_ξ, Φ_η касательной реакции имеют значения $-fNv_\xi/v$, $-fNv_\eta/v$. Заметив это, мы поступим так же, как в п. 2, и после исключения из уравнений (1), (2), (3) величин α, β, π, χ, ρ, N получим уравнения

$$\dot{v}_\xi = -\frac{7}{5} fg \cos i \frac{v_\xi}{v} + g \sin i,$$

$$\dot{v}_\eta = -\frac{7}{5} fg \cos i \frac{v_\eta}{v};$$

эти уравнения, если ввести в них вместо v_ξ, v_η абсолютную величину v скорости v скольжения и угол отклонения ее от линии наибольшего ската, заключенный между $-\pi$ и π, принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g \sin i\,(\cos\theta - n), \\ v\frac{d\theta}{dt} &= -g \sin i \sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где для краткости письма положено

$$n = \frac{7}{5} \frac{f}{\operatorname{tg} i}. \tag{6}$$

Заметим теперь же что нам придется различать два случая

α) $\qquad n \leqslant 1;$

β) $\qquad n > 1.$

Принимая во внимание значение (6) постоянной n, условимся говорить что случай α) соответствует *большим углам наклона*, или *большим наклонам* (по сравнению с углом трения), случай β) — *малым углам наклона*, или *малым наклонам*.

Прежде чем приступить к формальному интегрированию уравнений (5), надо установить некоторые особенности их поведения для фазы, которая нас интересует, когда $v > 0$. В этой фазе угол θ либо равен нулю для любого значения t, либо сохраняет тот же самый знак, не проходя уже через нуль. Это вытекает из следующих рассуждений. Во-первых, $\theta = 0$ при произвольном t составляет вполне определенное решение системы (5) (v удовлетворяет первому из уравнений (5) при $\theta = 0$, или уравнению

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - n) \sin i, \tag{5'}$$

и равна какому-нибудь наперед заданному значению v_1 при $t = t_1$). С другой стороны, система (5), правильная при $v > 0$, допускает *одно и только одно* решение, если при $t = t_1$ имеем $\theta = 0$ и $v = v_1$. Поэтому исключается тот случай, когда, отправляясь от начального состояния движения, для которого $\theta \neq 0$, можно (без того, чтобы v обращалось в нуль) встретить такой момент времени t_1, когда θ было бы равно 0.

То же самое можно сказать и в случае, когда $\theta = \pm\pi$, если не считать того, что тогда v будет определяться уравнением

$$\frac{dv}{dt} = -g(1+n)\sin i. \tag{5''}$$

Наконец, если величина $\sin\theta$ не обращается в нуль в начальный момент, то она не может обратиться в нуль до тех пор, пока остается $v > 0$. При этих условиях из второго из уравнений (5) видно, что $d\theta/dt$ всегда имеет знак, обратный знаку θ, следовательно, θ изменяется вместе с t постоянно в том же самом направлении, возрастая по абсолютной величине. Можно, следовательно, принять θ за независимую переменную вместо t в течение промежутка времени, о котором идет речь. Разделив первое из уравнений (5) на второе, благодаря чему t исключится, мы будем иметь дифференциальное уравнение годографа

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{d\theta} = -\operatorname{ctg}\theta + \frac{n}{\sin\theta},$$

интегрируя которое получим

$$v = \lambda\frac{\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|^n}{\sin\theta}, \tag{7}$$

где λ обозначает постоянную интегрирования. Эту постоянную надо принять, конечно, отличной от нуля, потому что в противном случае, вопреки предположению, исчезала бы скорость v.

Выражение (7) для v показывает, что величина $v/\sin\theta$ при $\theta = 0$ становится бесконечно большой порядка $(2-n)$. Когда речь идет о больших наклонах, т. е. для случая α) $(n \leqslant 1)$, порядок этот будет $\geqslant 1$.

Обратимся сначала к случаю α).

Интеграл $\int\frac{v}{\sin\theta}d\theta$ стремится к бесконечности, когда мы будем приближать к нулю один из концов промежутка интегрирования. Поэтому из второго из уравнений (5) следует, что если мы заставим θ изменяться всегда в одном и том же направлении от его начального значения θ_0 до нуля, то t будет безгранично возрастать. Принимая снова t за независимую переменную и предполагая, что вначале v и $\sin\theta$ отличны от нуля, при больших наклонах $(n \leqslant 1)$ можно сказать, что угол θ, образуемый направлением скорости скольжения и линией наибольшего ската, асимптотически стремится к нулю, а абсолютная величина этой скорости возрастает до бесконечности.

Перейдем теперь к малым наклонам $(n > 1)$, предполагая, что начальные значения v и $\sin\theta$ не равны нулю.

Из уравнения (7) теперь следует, что v стремится к нулю вместе с θ, а второе из уравнений (5) показывает, что t остается конечным при $\theta \to 0$. Если затем снова примем t за независимое переменное, то придем к заключению, что по истечении конечного промежутка времени, т. е. в определенный момент t_1, скорость скольжения уменьшится до нуля, стремясь в то же время принять направление линии наибольшего ската.

Если в начальный момент исчезает $\sin\theta$, но не скорость v, то уравнения (5), как было уже замечено, допускают решение $\sin\theta = 0$ для всего промежутка времени, в котором v остается отличным от нуля. Далее, если $\sin$

исчезает вместе с начальной скоростью скольжения, направленной вверх ($\cos\theta = -1$), то из первого из уравнений (5), в котором надо положить $\cos\theta = -1$, или же из уравнения

$$\frac{dv}{dt} = -g(1+n)\sin i \qquad (5'')$$

непосредственно будет следовать, что скорость скольжения будет стремиться к нулю, *каково бы ни было* n, достигая значения, равного нулю, по истечении конечного промежутка времени. То же произойдет и в случае малого наклона ($n > 1$), если скорость скольжения вначале направлена вниз ($\cos\theta = 1$). Наоборот, для больших наклонов ($n \leqslant 1$), когда имеет место равенство

$$\frac{dv}{dt} = g(1-n)\sin i, \qquad (5')$$

скорость скольжения уже не исчезает, а возрастает до бесконечности вместе с t при $n < 1$ и остается постоянной в частном случае, когда $n = 1$.

Наконец, если в какой-либо момент имеем $v = 0$, то, начиная с этого момента, уравнения (5) теряют силу в случае малого наклона, или при $n > 1$. Действительно, правая часть первого из них,

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin i\,(n - \cos\theta),$$

имеет отрицательное значение, какое бы предположение ни делалось относительно угла θ. Поэтому v должно было бы убывать, начиная от нулевого значения, что представляет собой абсурд, так как v есть абсолютная величина скорости. Следовательно, мы должны сделать вывод, что при $n > 1$, как только v обращается в нуль, наступает фаза качения.

Наоборот, при больших наклонах ($n \leqslant 1$) уравнения (5) все еще будут определять v и θ, даже если в некоторый момент $v = 0$ (и θ неопределенно). Между тем из второго из уравнений (5), в предположении, что названные функции остаются конечными (вместе с их производными), следует, что если v исчезает, то должен исчезать также и $\sin\theta$. Поэтому начальное значение угла θ может быть только равным нулю или π. Но значение π надо исключить, потому что первое из уравнений (5) в рассматриваемый момент перешло бы в уравнение (5'') и дало бы $dv/dt < 0$, что нелепо. Если, далее, $\theta = 0$, то вначале будет иметь место уравнение (5') и, следовательно, $dv/dt > 0$, по крайней мере при $n < 1$. В момент, непосредственно следующий, $v > 0$, и тогда, как мы это видели выше, θ будет оставаться нулем, а v будет безгранично возрастать. При $n = 1$, $v = \theta = 0$ будет решением уравнений (5).

Из всего предшествующего заключаем, что *при* $n \leqslant 1$ (*большие углы наклона*) *движение исчерпывается фазой скольжения, за исключением одного очень частного случая, когда при* $n = 1$ v *исчезает в начальный момент.*

Если исключим этот случай, то v и θ определятся в функциях от t из уравнений (5) указанным выше способом с соответствующими изменениями. Для того чтобы дополнить определение неизвестных функций, можно, например, обратиться к первым двум из уравнений (3) и к интегралам (4), принимая во внимание, что в рассматриваемой фазе Φ_ξ/m, Φ_η/m имеют выражения, соответствующие динамическому трению

$$-fN\frac{v_\xi}{mv}, \quad -fN\frac{v_\eta}{mv},$$

или же, в силу третьего из уравнений (2),

$$-fg\cos i\cos\theta, \quad -fg\sin i\sin\theta.$$

Таким образом, мы видим, что все приведено к квадратурам.

Наконец, если $n > 1$ (малые наклоны), мы необходимо придем, после возможной фазы скольжения, к моменту t_1, когда будет $v = 0$.

Начиная с этого момента, дальнейшее скольжение было бы невозможно, как мы это уже видели. Следовательно, должна наступить фаза качения. К этой фазе можно также отнести и частный случай, который мы должны были выделить из α), когда $n = 1$ и v в начальный момент равно нулю.

б) *Фаза качения.* В этой фазе из уравнений (1) находим

$$\dot{\alpha} - R\chi = 0, \quad \dot{\beta} + R\pi = 0; \tag{8}$$

эти уравнения вместе с уравнениями (4′) вполне определяют движение. Ни в одно из этих уравнений не входит f, так что движение при чистом качении не зависит от трения опорной поверхности; то же, конечно, относится и к состоянию движения в момент t_1.

Дополнить исследование и подтвердить, в частности, что

1) центр тяжести описывает дугу параболы с осью, параллельной линии наибольшего ската, и с вогнутостью вниз, или, в частности, прямую, направленную по линии наибольшего ската вниз;

2) $\pi = 0$;

3) в течение всей фазы качения (на основании уравнений (2), (3), к которым надо присоединить уравнения (8), продифференцировав их по t, проекции реакции Φ имеют значения

$$\Phi_\xi = \frac{2}{3} mg \sin i, \quad \Phi_\eta = 0, \quad N = mg \cos i.$$

Речь идет, действительно, о реакциях, удовлетворяющих закону статического трения, потому что, при $n > 1$ или в силу неравенства (6) $\operatorname{tg} i < 7f/5$, отношение

$$\frac{\Phi_\xi}{N} = \frac{2}{3} \operatorname{tg} i$$

будет меньше

2. Доказать, что если фаза скольжения (см. упражнение 1) действительно начинается и затем кончается (что предполагает $n > 1$), то ее продолжительность t_1 выразится в виде

$$t_1 = \frac{\lambda}{2g \sin i} \left\{ \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{n+1} \operatorname{tg}^{n+1} \frac{\theta_0}{2} \right\},$$

где λ есть постоянная, входящая в выражение интеграла (7), а θ_0 — угол начальной скорости точки соприкосновения с линией наибольшего ската.

3. Возьмем в биллиардном шаре радиуса R точку Q, находящуюся на вертикали над центром на расстоянии $2R/5$, считая ее неизменно связанной с шаром. Пусть эта точка имеет постоянную скорость в течение всего движения как при скольжении шара, так и при переходе к чистому качению.

Обозначив через a, b проекции этой скорости (непосредственно получающиеся из начальных данных), показать, что окончательная скорость центра тяжести будет иметь проекции

$$\dot{\alpha} = \frac{5}{7} a, \quad \dot{\beta} = \frac{5}{7} b.$$

4. Интересные примеры движения (большей частью чистого качения) шара по заданной поверхности (в частности, по сфере или конусу) могут быть разобраны с исчерпывающей полнотой элементарными средствами. См. Routh, Dynamics of a system of rigid bodies, ч. II, гл. V, пп. 215—239.

5. Реакции опоры при качении диска. Уравнение (24) п. 13, вообще говоря, определяет реакцию **Ф**. Оно было разъяснено применительно к частному случаю меростатических решений (п. 13). Указать для общего случая выражения нормальной реакции и трения в функции от состояния движения, соответствующего любому рассматриваемому моменту.

Можно исходить из уравнения (24), проектируя его на стереонодальные оси x', y', z' и вводя в качестве проекции вектора $mv_G = Q$ выражения (18) п. 8, а затем взять для производных от p, q, r выражения, определяемые уравнениями движения (19′) того же пункта.

На основании законов статического трения вывести динамическое условие чистого качения (аналогичное (25) п. 13).

6. Показать, что для устойчивости качения окружности (обруча) по прямолинейному пути (на плоскости) необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство $v'^2 > ga/4$ (п. 15); период малых колебаний будет иметь значение

$$\frac{\pi a}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(v'^2 - \frac{1}{4}ga\right)}}.$$

7. Рассмотреть снова случай, изложенный в пп. 17—21, движения тяжелого твердого тела вращения, опирающегося на горизонтальную плоскость без трения, и доказать приводимость задачи к квадратурам, пользуясь уравнениями Лагранжа.

Надо исходить из замечания п. 20 о том, что горизонтальная составляющая скорости центра тяжести G постоянна. Не нарушая общности, можно предположить, что эта составляющая равна нулю, относя твердое тело к системе галилеевых осей, параллельных неподвижным осям, принятым вначале, и имеющих как раз эту постоянную скорость. Относительно этих (галилеевых) осей центр тяжести G может только скользить по вертикальной прямой, что можно рассматривать как связь (без трения).

Принимая во внимание теорему Кёнига (гл. IV, п. 8) и уравнение (20) п. 9, показать, что функция Лагранжа в этой задаче имеет вид

$$\mathfrak{L} = T + U = \frac{1}{2}(A + mh'^2)\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\sin^2\theta\cdot\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}Cr^2 - mgh,$$

где $h(\theta)$, как и в указанном п. 20, представляет собой высоту G над опорной плоскостью и $h' = dh/d\theta$, $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$. Как φ, так и ψ являются, очевидно, игнорируемыми координатами (гл. V, п. 42), так что будут существовать два первых интеграла

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\varphi}} = Cr_0, \quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\psi}} = c \qquad (r_0,\ c = \text{const}),$$

первый из которых приводится очевидно к виду $r = r_0$, а второй совпадает, как это можно проверить непосредственно, с интегралом моментов количеств движения относительно вертикали. С другой стороны, существует интеграл живых сил

$$T - U = E,$$

из которого можно вывести при помощи первых двух уравнений (41) п. 20 уравнение для определения θ.

8. Принимая во внимание геометрические замечания из п. 17 [в частности, дифференцируя уравнение (32′) и принимая во внимание уравнение (32)], показать, что кривизна $|d\theta/ds|$ плоской кривой C может быть выражена посредством функции $h(\theta)$ в виде $|h' + h''|$.

9. Найти меростатические решения задачи о чистом качении твердого тела вращения, опирающегося на горизонтальную плоскость.

Задача состоит в том, чтобы удовлетворить трем последним уравнениям п. 23, предполагая постоянными θ, q и r, вследствие чего прежде всего из уравнений (20) п. 9 будем иметь, что величина $\dot{\theta} = p$ равна нулю, а величины $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ будут постоянными; далее, постоянными будут также и величины y_0, z_0, h, A_1, B_1, C_1, зависящие исключительно от θ.

В этом предположении второе и третье из упомянутых уравнений удовлетворяются тождественно, а первое приводится к виду

$$q\{C_1 r - B_1(r - \dot{\varphi})\} - my_0 z_0\{q^2 - r(r - \dot{\varphi})\} = -mgh'.$$

Если вспомним, что

$$B_1 = A + mz_0^2, \quad C_1 = C + my_0^2,$$

где моменты инерции A и C относятся к центру тяжести, и что на основании уравнений (20) п. 9

$$q = \dot{\psi}\sin\theta, \quad r - \dot{\varphi} = \dot{\psi}\cos\theta,$$

и если, кроме того, примем во внимание выражение (32) величины h (п. 17), то это уравнение можно будет написать в виде

$$\sin\theta\,(A\cos\theta + mz_0 h)\,\dot{\psi}^2 - r\,(C\sin\theta + my_0 h)\,\dot{\psi} - mgh' = 0.$$

Движение твердого тела, очевидно, сводится к регулярной прецессии, характеристические постоянные которой θ, $\dot{\varphi} = \mu$, $\dot{\psi} = \nu$ связаны предыдущим уравнением, в котором r стоит вместо $\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$, а значения h, y_0, z_0 надо рассматривать как известные функции от θ; первая из них прямо определяется в зависимости от формы поверхности, рассматриваемой в задаче, а остальные две определены уравнениями (33) п. 17.

Движение, динамическая возможность которого интуитивно очевидна, мы будем иметь, предполагая, что соприкосновение происходит в вершине (пересечение выпуклой поверхности твердого тела с осью тела) и что твердое тело равномерно вращается вокруг собственной оси (направленной по восходящей вертикали), в силу чего центр тяжести G остается неподвижным, так же как и точка соприкосновения O. При этих условиях будем иметь $\theta = 0$, а вследствие неопределенности линии узлов неопределенными будут φ и ψ, но не их сумма $\varphi + \psi$, которую можно истолковать здесь как изменяющийся равномерно с течением времени угол между некоторой осью, неизменно связанной с телом, и неподвижной осью; действительно, из общего выражения $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$ получаем в этом случае $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}$.

Обращаясь к общему меростатическому решению, легко увидим, как и в п. 12, что как центр тяжести G, так и точка соприкосновения O движутся равномерно по окружностям. Чтобы показать это, рассмотрим абсолютные скорости $\mathbf{v}_G = \mathbf{G}/m$ точки G и $\mathbf{v}'$ точки O, для которых в п. 23 были указаны общие выражения проекций на стереонодальные оси. В случае меростатических решений, для которых p, y_0', z_0' обращаются в нуль, отсюда следует, что оба вектора $\mathbf{v}_G$ и $\mathbf{v}'$ направлены по линии узлов и имеют, соответственно, в качестве проекций (постоянных)

$$V_1 = z_0 q - y_0 r = z_0\dot{\psi}\sin\theta - y_0(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta), \quad V_2 = -y_0\dot{\varphi}.$$

Следовательно, речь идет о горизонтальных скоростях, имеющих проекциями на неподвижные оси

$$V_1\cos\psi, \quad V_1\sin\psi \text{ и } V_2\cos\psi, \quad V_2\sin\psi.$$

Отсюда, рассуждая как в п. 12 и принимая во внимание, кроме того, уравнение (32) п. 17, находим, что радиусы R_1, R_2 окружностей (горизонтальных), описываемых центром тяжести G и точкой соприкосновения O, определяются соответственно равенствами

$$R_1 = \left|\frac{V_1}{\dot{\psi}}\right| = \left|z_0 \sin\theta - y_0 \cos\theta - y_0 \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}}\right| = \left|h' + y_0 \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}}\right|,$$

$$R_2 = \left|y_0 \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}}\right|.$$

10. Качение по горизонтальной плоскости тяжелого твердого тела, ограниченного какой угодно выпуклой поверхностью. Удобно отнести тело к осям, неизменно связанным с ним, а именно к главным центральным осям инерции $Gxyz$, и взять уравнение выпуклой поверхности σ в виде

$$f(x, y, z) = 0.$$

Обозначив через n единичный вектор нормали к σ в точке опоры O, направленной наружу относительно σ (т. е. вниз), введем двенадцать следующих неизвестных функций от t: 1) шесть параметров, определяющих положение осей, неподвижных в теле, относительно неподвижных осей и позволяющих выразить абсолютную скорость v_G точки G и угловую скорость ω тела; 2) три координаты x, y, z точки соприкосновения O, посредством которых можно выразить n; 3) проекции Φ_x, Φ_y, Φ_z реакции Φ в точке O. Сила тяжести будет представлена вектором mgn, и задача будет поставлена во всей своей общности, если составить следующие двенадцать уравнений: 1) шесть основных уравнений; 2) три уравнения, характеризующие отсутствие скольжения в точке O; 3) уравнение $f = 0$; 4) два скалярных уравнения, к которым в силу геометрического тождества $n^2 = 1$ сводится векторное уравнение Пуансо

$$\frac{dn}{dt} = \dot{n} + \omega \times n = 0,$$

выражающее то обстоятельство, что единичный вектор всегда направлен по вертикали.

Как должна быть изменена предыдущая постановка задачи в фазе скольжения и в случае опоры без трения? Ср. Раус, цит. соч., ч. II, §§ 245—248, или Грей, цит. соч., гл. XVII.

11. Малые колебания тела около перманентного движения, представляющего собой чистое верчение. Чистым верчением (ср. т. I, гл. XIII, п. 29) называют всякое вращение твердого тела, опирающегося на поверхность, вокруг общей нормали к поверхности σ твердого тела и к поверхности опоры.

Для того чтобы тяжелое твердое тело, ограниченное произвольной выпуклой поверхностью и опирающееся на горизонтальную плоскость, могло совершать перманентное чистое верчение около точки $\bar{O}$ (т. е. верчение с постоянной угловой скоростью, *отличной от нуля*), необходимо и достаточно, чтобы а) нормаль (вертикаль) в точке $\bar{O}$ к σ и к плоскости опоры содержала центр тяжести G твердого тела; б) эта нормаль была главной осью инерции для твердого тела относительно точки G и, следовательно, также (см. примечание в п. 52 гл. V) относительно точки $\bar{O}$.

Здесь на основе общих соображений, изложенных в предыдущем упражнении, мы хотим показать, как для тяжелого твердого тела указанного выше типа изучаются малые колебания вблизи перманентного верчения, предполагая, естественно, что только что указанные условия выполнены.

Обозначив через $Gxyz$ систему главных центральных осей инерции твердого тела, допустим для определенности, что ось Gz есть ось вращения

в невозмущенном движении верчения и направлена от центра тяжести G к точке опоры $\bar{O}$, которая при таком движении остается неподвижной. Относительно этой неподвижной в теле системы осей координаты точки $\bar{O}$ будут $0, 0, z_0 > 0$, проекции угловой скорости $\bar{\omega}$ верчения твердого тела — $0, 0, r_0$ (постоянные); при малых колебаниях около такого движения переменное положение точки соприкосновения O и угловая скорость ω будут мало отличаться от неизменного положения точки $\bar{O}$ и неизменного значения угловой скорости $\bar{\omega}$, относящихся к чистому верчению. Поэтому, обозначив через $x, y, z_0 + z_1$ координаты точки O и через $p, q, r_0 + \varepsilon$ — проекции вектора ω, можно рассматривать величины x, y, z и p, q, ε как бесконечно малые. Возьмем уравнение поверхности σ в виде $z - z(x, y) = 0$ и разложим $z(x, y)$ по формуле Маклорена. Принимая во внимание, что, так как плоскость $z = z_0$ является касательной к поверхности σ в точке $\bar{O}$, в этом разложении должны отсутствовать члены первого порядка относительно x, y, и пренебрегая членами порядка выше второго, уравнение поверхности σ можно написать в виде

$$f \equiv z - z_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 2kxy\right) = 0; \tag{9}$$

в этом уравнении a, b, k обозначают три постоянные, которые вследствие предположения, что поверхность σ является выпуклой и целиком находится выше плоскости опоры, должны быть такими, чтобы бинарная квадратичная форма, стоящая в скобках, была определенной положительной.

Из уравнения (9) следует прежде всего, что в порядке принятого приближения z_1 надо прямо положить равным нулю. Далее, направляющие косинусы нормали n к σ в точке O, близкой к $\bar{O}$, пропорциональные частным производным $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$, определяются на основании уравнения (9), если пренебречь членами второго порядка и принять во внимание, что нормаль n принимается направленной наружу относительно σ, равенствами

$$\gamma_1 = \frac{x}{a} + ky, \quad \gamma_2 = kx + \frac{y}{b}, \quad \gamma_3 = 1. \tag{10}$$

Таким образом, из уравнения поверхности σ мы получили все, что необходимо для нашей цели. Аналогичным образом мы воспользуемся другими уравнениями, которые согласно общим соображениям предыдущего упражнения надо рассмотреть.

Из уравнения $dn/dt \equiv \dot{n} + \omega \times n = 0$, выражающего условие того, что единичный вектор n остается постоянно вертикальным, вводя проекции $p, q, r_0 + \varepsilon$ вектора ω и принимая во внимание, что γ_1 и γ_2 являются величинами первого порядка, а $\gamma_3 = 1$, получим три уравнения

$$\dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r_0 - q, \quad \dot{\gamma}_2 = -\gamma_1 r_0 + p, \quad \dot{\gamma}_3 = 0. \tag{11}$$

Условие чистого качения выражается обычно приравниванием нулю скорости точки соприкосновения O с координатами x, y, z_0, которая рассматривается как неизменно связанная с телом, так что, обозначая через u, v, w проекции на оси, неподвижные в теле, скорости v_G центра тяжести, которые в нашем случае должны сами рассматриваться как величины первого порядка, мы придем к трем уравнениям

$$u + qz_0 - r_0 y = 0, \quad v + r_0 x - pz_0 = 0, \quad w = 0. \tag{12}$$

Наконец, остается еще воспользоваться основными уравнениями движения твердого тела. В постановке Рауса, принятой в предыдущем упражнении, за центр приведения моментов принимался центр тяжести, вследствие чего пришлось в виде вспомогательной неизвестной ввести реакцию опоры Φ, которая исключалась при помощи первого основного уравнения. Но, как и

в § 2 и в п. 23 § 3, можно избежать введения и последующего исключения этой реакции, принимая за центр приведения точку соприкосновения O и пользуясь только вторым основным уравнением, взятым при этом в его общей форме (14) п. 7; это уравнение, вследствие того, что оси неподвижны в теле ($\omega' = \omega$) и момент M приводится к моменту силы веса, принимает вид

$$\dot{K} + \omega \times K + v' \times Q = \overrightarrow{OG} \times mgn.$$

Поэтому нам надо получить явные выражения для проекций векторов K, Q, и v' на оси, неподвижные в теле, на которые мы намерены проектировать предыдущие уравнения. Скорость (абсолютная) v' точки O, в которой в любой момент происходит соприкосновение, на основании теоремы сложения скоростей можно рассматривать как сумму относительной скорости (относительно неподвижных в теле осей) с проекциями $\dot{x}$, $\dot{y}$, 0 и переносной скорости; так как, по предположению, речь идет о чистом качении, то переносная скорость во всякий момент равна нулю, поэтому имеем

$$v'_x = \dot{x}, \quad v'_y = \dot{y}, \quad v'_z = 0. \tag{13}$$

Количество движения $Q = mv_G$, вследствие того, что в силу третьего из уравнений (12) проекция w скорости v_G равна нулю, имеет проекции

$$Q_x = mu, \quad Q_y = mv, \quad Q_z = 0. \tag{14}$$

Наконец, для вычисления проекций вектора K удобно применить формулы п. 15 гл. IV. Для этой цели возьмем, как и в п. 8, произвольный момент времени и примем за вспомогательную ту систему осей, неподвижных в теле, которая в этот момент имеет начало в точке O тела, представляющей собой точку соприкосновения тела с плоскостью, и оси которой параллельны осям системы $Gxyz$ и одинаково направлены с ними. В соответствии с этим необходимо ввести главные моменты инерции A_1, B_1, C_1 и центробежные моменты A'_1, B'_1, C'_1 относительно точки O; так как точка O относительно системы $Gxyz$ имеет координаты x, y, z_0, то на основании теоремы Гюйгенса, обозначая через A, B, C главные центральные моменты инерции и пренебрегая членами второго порядка, найдем прежде всего

$$A_1 = A + mz_0^2, \quad B_1 = B + mz_0^2, \quad C_1 = C; \tag{15}$$

далее имеем, по определению,

$$A'_1 = \sum_i m_i (y_i - y)(z_i - z_0),$$

$$B'_1 = \sum_i m_i (z_i - z_0)(x_i - x), \quad C'_1 = \sum_i m_i (x_i - x)(y_i - y).$$

Достаточно принять во внимание, что центробежные моменты и статические моменты относительно центра тяжести равны нулю, и пренебречь членами второго порядка, чтобы иметь

$$A'_1 = myz_0, \quad B'_1 = mxz_0, \quad C'_1 = 0.$$

После этих замечаний, принимая во внимание, что начало вспомогательных осей (центр приведения моментов), как неизменно связанное с телом, имеет скорость (абсолютную), равную нулю, так что непосредственно можно применить формулы (30″) п. 15 гл. IV, заключаем, что

$$K_x = A_1 p - mz_0 r_0 x, \quad K_y = B_1 q - mz_0 r_0 y, \quad K_z = C(r_0 + \varepsilon).$$

На основании этих формул и равенств (13) из основного уравнения моментов, в котором еще надо пренебречь членами второго порядка,

получаем три скалярных уравнения

$$\left.\begin{aligned} A_1\dot{p} - mz_0r_0\dot{x} - (B_1 - C)\,r_0q + mz_0r_0^2y &= mg\,(z_0\gamma_2 - y),\\ B_1\dot{q} - mz_0r_0\dot{y} - (C - A_1)\,r_0p - mz_0r_0^2x &= -mg\,(z_0\gamma_1 - x),\\ C\dot{\varepsilon} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

последнее из которых показывает, что и при малых колебаниях угловая скорость вокруг оси Gz остается постоянной.

Из двух других уравнений, если исключить из них p, q посредством равенств (11), получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} B_1\ddot{\gamma}_1 - Dr_0\dot{\gamma}_2 + mz_0r_0\dot{y} - E_1\gamma_1 + mg'x &= 0,\\ A_1\ddot{\gamma}_2 + Dr_0\dot{\gamma}_1 - mz_0r_0\dot{x} - E_2\gamma_2 + mg'y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

где для краткости положено

$$\left.\begin{aligned} D = A_1 + B_1 - C, \quad g' = g + z_0r_0^2,\\ E_1 = (A_1 - C)\,r_0^2 + mgz_0, \quad E_2 = (B_1 - C)\,r_0^2 + mgz_0; \end{aligned}\right\}$$

уравнения (16′) в силу уравнений (10) образуют систему двух дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами относительно одних только x и y.

Для того чтобы исследовать устойчивость невозмущенного движения (чистого верчения), мы должны согласно правилу п. 21 гл. IV положить в уравнениях (16′)

$$x = \lambda e^{i\Omega t}, \quad y = \mu e^{i\Omega t}$$

и составить характеристическое уравнение относительно Ω. Для устойчивости требуется, чтобы это уравнение, которое в настоящем случае будет уравнением четвертой степени, имело только действительные корни.

Остановимся, в частности, на предположении, что в уравнениях (9) поверхности σ $k = 0$; геометрически это означает, что главные центральные оси инерции Gx, Gy параллельны касательным к двум линиям кривизны поверхности σ в точке $\bar{O}$. Тогда, как мы знаем из анализа, a и b представляют собой главные радиусы кривизны поверхности σ в этой точке. При этом частном предположении уравнение относительно Ω будет биквадратным, а именно

$$\begin{vmatrix} B_1\Omega^2 + E_1 - mg'a & ir_0\,(D - mz_0b)\,\Omega \\ -ir_0\,(D - mz_0a)\,\Omega & A_1\Omega^2 + E_2 - mg'b \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

12. Случай твердого тела вращения (или более общий случай тела, ограниченного поверхностью вращения и имеющего гироскопическую структуру относительно оси). При этом предположении имеем $a = b$ и $A = B$ и потому $A_1 = B_1$, $E_1 = E_2$. Следовательно, уравнение (18) распадается на два квадратных уравнения

$$A_1\Omega^2 + E_1 - mg'a \pm r_0\,(D - mz_0a)\,\Omega = 0, \tag{18'}$$

из которых для исследования устойчивости достаточно рассмотреть только одно, например первое, так как второе необходимо будет иметь корни, противоположные первому по знаку.

Поэтому для того, чтобы корни характеристического уравнения (биквадратного) были все действительны, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант выбранного квадратного уравнения (общий для обоих уравнений (18′))

был положительным. Поэтому критерий устойчивости, даваемый методом малых колебаний [1]), выразится неравенством

$$r_0^2 (D - mz_0 a)^2 - 4A_1 (E_1 - mg'a) > 0, \tag{19}$$

которому в силу равенств (17) можно придать вид

$$r_0^2 > \frac{4A_1 mg (z_0 - a)}{(C + maz_0)^2}, \tag{19'}$$

откуда следует, что, если $z_0 \leqslant a$ (центр тяжести не выше центра кривизны меридианного сечения поверхности σ), неравенство будет удовлетворяться непосредственно, так что будем иметь устойчивость (линейную) при какой угодно скорости верчения r_0.

Если, наоборот, $z_0 > a$ (центр тяжести выше центра кривизны меридианного сечения поверхности σ), то мы будем иметь случай гироскопической стабилизации в том смысле, что движение верчения можно сделать устойчивым, придавая телу достаточно большую угловую скорость.

13. В случае однородного эллипсоида вращения с экваториальной полуосью a и полярной полуосью c, опирающегося на горизонтальную плоскость одним из своих полюсов (в силу чего вместо z_0 и радиуса кривизны в полюсе должны быть взяты соответственно c и a^2/c), условие устойчивости невозмущенного движения чистого верчения с угловой скоростью r_0 определится (ср. предыдущее упражнение) неравенством

$$r_0^2 > \frac{20}{49} \frac{(6c^2 + a^2)(c^2 - a^2)}{a^4} \frac{g}{c}$$

и будет автоматически удовлетворяться для сплюснутого эллипсоида ($c < a$).

14. Случай равновесия. Способом, аналогичным указанному в упражнениях 11, 12, можно исследовать, для тяжелого твердого тела, ограниченного какой-нибудь выпуклой поверхностью σ и опирающегося на горизонтальную плоскость, малые колебания вокруг состояния равновесия. С первого

---

[1]) Как мы уже отмечали в гл. VI (пп. 21, 23), то обстоятельство, что все характеристические показатели чисто мнимые, недостаточно для обеспечения устойчивости в строгом смысле; однако оно будет достаточно для линейной устойчивости, *по крайней мере вообще*. Эта оговорка учитывает ту возможность, что характеристическое уравнение допускает кратные корни, наличие которых, как и в элементарном случае движений, определяемых одним линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (т. I, гл. II, п. 43, в), может поставить под сомнение устойчивость. Это наличие кратных корней не подвергает сомнению устойчивость в случае голономных систем, как это косвенно следует из теоремы Дирихле; для более общих систем, таких, например, как система (16'), требуется, наоборот, дополнительное исследование.

Далее, в частном случае, к которому мы здесь и обращаемся ($a = b$, $A_1 = B_1$, $E_1 = E_2$), уравнение (19) продолжает обеспечивать устойчивость (линейную) даже и тогда, когда корни (действительные) характеристического уравнения относительно Ω не являются простыми. Действительно, достаточно рассматривать это уравнение распавшимся на уравнения (18') (каждое из которых имеет корни, противоположные по знаку корням другого, и в силу соотношения (19') положительный дискриминант), чтобы видеть, что оно имеет кратные корни тогда, когда $D - mz_0 a = 0$; при этом предположении оба уравнения (16') на основании равенства (10) становятся тождественными, причем одно из них будет содержать только x, другое только y. Для каждой из этих переменных устойчивость обеспечивается неравенством (19').

взгляда можно думать, что достаточно было бы положить $r_0 = 0$ в формулах, установленных в упражнениях 11, 12, но таким образом мы рассмотрим только частный случай этого вопроса. Действительно, как было показано в упражнении 11, движение перманентного верчения динамически возможно только в том случае, когда будут удовлетворены оба условия а) и б); для возможности же равновесия достаточным (а также и необходимым) оказывается только первое из них.

Поэтому необходимо снова начать исследование, предполагая, что точка соприкосновения $\bar{O}$ в положении равновесия относительно главных осей инерции $Gxyz$ имеет совершенно произвольные координаты x_0, y_0, z_0. Направляющие косинусы единичного вектора n, нормального к σ в точке $\bar{O}$, уже не будут равны 0, 0, 1, а будут иметь значения $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_3$, получаемые в функциях от x_0, y_0, z_0 из уравнения $f = 0$ поверхности σ. Обозначим в возмущенном движении через $x_0 + x_1$, $y_0 + y_1$, $z_0 + z_1$ переменные координаты точки соприкосновения O и через $\bar{\gamma}_1 + \delta_1$, $\bar{\gamma}_2 + \delta_2$, $\bar{\gamma}_3 + \delta_3$—направляющие косинусы единичного вектора нормали к σ в этой точке; наравне с δ_1, δ_2, δ_3 мы должны рассматривать x_1, y_1, z_1 как бесконечно малые. Подробное вычисление можно найти в упомянутом сочинении Рауса, § 253.

15. Относительно общей задачи о качении одной поверхности по другой укажем на исследования Джеббиа (*Rend. del Circ. mat. di Palermo*, т. XX, 1905, стр. 265—303) частных случаев, в которых, как и в простейшем примере, указанном в п. 52 гл. V, присоединение какой-нибудь новой связи к неголономной связи чистого качения позволяет рассматривать систему как голономную.

16. Перманентные вращения, динамически возможные при движении по инерции гиростата вокруг закрепленной точки, или центра тяжести. Обозначим, как и в § 4, через χ (относительный) результирующий момент количеств движения относительно закрепленной точки или центра тяжести, происходящий от внутренних движений, и предположим, что речь идет об установившихся движениях, так что вектор χ нужно считать постоянным относительно неизменяемой части S гиростата.

В искомых перманентных вращениях мы, очевидно, будем иметь при обычных обозначениях $\dot{K} = 0$, так что на основании уравнения (48) п. 27 угловая скорость ω должна удовлетворять уравнению

$$(K + \chi) \times \omega = 0.$$

Проверить, что геометрическое место возможных перманентных осей есть конус второго порядка, уравнение которого относительно главных осей инерции системы Σ определится в виде

$$\begin{vmatrix} Ax & By & Cz \\ x & y & z \\ \chi_x & \chi_y & \chi_z \end{vmatrix} = 0.$$

Вспоминая уравнение конуса Штауде (гл. VIII, п. 25), мы увидим тождественность двух уравнений, за исключением лишь подстановки вместо координат x_0, y_0, z_0 центра тяжести постоянных χ_x, χ_y, χ_z. Поэтому исследование частных случаев можно вести способом, совершенно аналогичным способу, указанному в упражнении 11 упомянутой главы.

Более глубокое изучение этих перманентных вращений и их устойчивости см. Lazzarino, *Rend. Acc. Lincei*, c. 5ª т. XXVI, 1917_2, стр. 146—151; *Atti Acc. Torino*, т. LIV, 1919, стр. 202—219.