Глава X

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Гамильтонова форма лагранжевых систем

1. Канонические системы. Возвратимся опять к изучению *лагранжевых систем* (п. 41 гл. V), т. е. систем из n дифференциальных уравнений второго порядка с n неизвестными функциями $q_1, q_2, \ldots, q_n$ от t, имеющих вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $\mathfrak{L}$ обозначает какую угодно функцию (правильную в некоторой области) от координат q, от их первых производных $\dot{q}$ и, возможно, от независимой переменной t. Как мы уже видели, во всякой области n измерений, в которой гессиан

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\|$$

лагранжевой функции $\mathfrak{L}$ не будет тождественно равен нулю, система (1) будет нормальной, т. е. разрешимой относительно вторых производных $\ddot{q}$ от неизвестных функций.

Далее, из анализа известно (и в частных случаях нам приходилось применять этот способ), что всякую нормальную систему второго порядка с n неизвестными функциями можно заменить бесконечным множеством способов эквивалентной ей системой первого порядка, тоже нормальной, с $2n$ неизвестными функциями или, как мы будем говорить теперь, *порядка* $2n$. Достаточно взять за новые неизвестные функции, наряду с q, n их первых производных $\dot{q}$, или, вообще, n каких угодно независимых между собою функций от $\dot{q}$, которые могут содержать также координаты q и время t.

Классическое преобразование Гамильтона, которое мы будем здесь рассматривать, является только частным применением этого способа и состоит в том, что за вспомогательные неизвестные принимают переменные

$$p_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

называемые *сопряженными переменными* относительно q или, как мы условились говорить в п. 42 гл. V, *моментами* (или обобщенными импульсами), вследствие механического истолкования, которое

им можно дать в некоторых типичных случаях динамики голономных систем. Уравнения (2) при $\Delta \neq 0$ представляют собой n уравнений относительно $\dot{q}$; поэтому в области, в которой не только функция $\mathfrak{L}$ является правильной, но сохраняет свою силу и это неравенство, они будут разрешимы относительно $\dot{q}$, и мы будем иметь

$$\dot{q}_h = u_h(p \mid q \mid t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n); \quad (2')$$

с другой стороны, уравнения (1) на основании уравнений (2) и эквивалентных им уравнений (2) дают

$$\dot{p}_h = \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h}\right)_{\dot{q}=u} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \quad (1')$$

так что производные от новых неизвестных p будут выражены через p, q, t, как это имело место для $\dot{q}$ в силу уравнений (2').

Мы пришли, таким образом, к нормальной системе первого порядка с $2n$ неизвестными функциями p, q, состоящей из уравнений (1'), (2'); эти $2n$ уравнений можно назвать эквивалентными первоначальной лагранжевой системе (1), так как, с одной стороны, они получаются из уравнений (1) только что указанным однозначным способом, а с другой стороны, обратно, исходя из соотношений (1'), (2'), мы возвратимся к уравнениям (1), исключая p посредством уравнений (2).

Это и есть, по существу, *преобразование Гамильтона* системы (1). Остается еще установить одно особенно важное обстоятельство, заключающееся в том, что правые части уравнений (1'), (2') можно выразить посредством одной единственной функции от p, q, t, называемой *функцией Гамильтона* [1]) или *характеристической функцией*, так что система первого порядка (1'), (2') с формальной точки зрения будет столь же простой, как и первоначальная лагранжева система, зависящая от одной только функции $\mathfrak{L}$ *). Функция Гамиль-

---

[1]) В. Р. Гамильтон родился в Дублине в 1805 г., умер в Дунсинке в 1865 г., был профессором астрономии в Дублинском университете и президентом Ирландской академии. Изобрел *метод кватернионов*, представляющий собой алгоритм полного и систематического геометрического исчисления. Под влиянием трудов Гамильтона, Грассмана и Беллавитиса возникло менее полное, но более элементарное понятие о векторах, которое теперь всюду в употреблении. Классическими являются и вклады Гамильтона в геометрическую оптику, в дифференциальную геометрию систем прямых, в теорию уравнений с частными производными и в аналитическую механику, на основе которой он построил теорию распространения света.

*) Гамильтон исследовал более частный случай, когда функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ не зависит от t. Излагаемые ниже преобразования принадлежат М. В. Остроградскому.

Остроградский Михаил Васильевич родился в 1801 г. в деревне Пашенной, Кобелякского уезда, Полтавской губернии, умер в 1861 г. в Москве. Обучался в Харьковском университете, а затем в Париже, где и началась его педагогическая и научная деятельность. В 1830/31 гг. вернулся на родину и был избран сначала адъюнктом, а затем вскоре действительным членом

тона выражается через функцию Лагранжа в виде

$$H = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathfrak{L} \tag{3}$$

и была уже введена нами в п. 43 гл. V (*полная энергия* в динамическом случае); только здесь она должна рассматриваться выраженной через p, q, t посредством уравнений (2), (2′); для того чтобы лучше выявить это обстоятельство, мы можем представить ее в виде

$$H(p \mid q \mid t) = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - \mathfrak{L}(q \mid \dot{q} \mid t), \tag{3'}$$

истолковывая здесь $\dot{q}$ как символы соответствующих функций от p, q, t, определяемых уравнениями (2′).

Чтобы убедиться, что правые части как уравнений (1′), так и уравнений (2′) можно выразить очень просто посредством функции H, достаточно применить следующий классический способ, принадлежащий самому Гамильтону. Будем рассматривать величины p, q, t как независимые переменные, а $\dot{q}$ — как функции от них, выраженные равенствами (2′); считая t постоянным, придадим величинам p, q произвольные бесконечно малые приращения δp, δq, благодаря чему функция H получит приращение

$$\delta H = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_h} \delta p_h + \frac{\partial H}{\partial q_h} \delta q_h \right). \tag{4}$$

С другой стороны, на основании соотношения (3′) то же самое приращение можно написать в виде

$$\delta H = \sum_{h=1}^{n} \left\{ \dot{q}_h \delta p_h - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} \delta q_h + \left(p_h - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) \delta \dot{q}_h \right\},$$

Петербургской Академии Наук, где занимал кафедру прикладной математики.

Труды М. В. Остроградского посвящены общим вопросам аналитической механики и решению ряда частных задач. Он обобщил принцип возможных перемещений на случай освобождающих связей, а также указал на его применение к вопросам удара.

Каноническую форму уравнений движения и теорему о характеристической функции он распространил на случай механических систем, связи которых явно зависят от времени.

В своей работе об изопериметрах он изложил начало наименьшего действия с точки зрения более общей, чем это было сделано до него Гамильтоном.

Хотя направление научного творчества М. В. Остроградского связано главным образом с общими проблемами механики, но ему принадлежит также ряд весьма ценных работ по гидродинамике, теории притяжения, теории упругости и баллистике. Оценка работ М. В. Остроградского, сделанная Н. Е. Жуковским, напечатана в „Математическом сборнике“ за 1902 г., т. XXII. (*Прим. ред.*)

или, принимая во внимание уравнения (2) и подставляя u_h вместо $\dot{q}_h$,

$$\delta H = \sum_{h=1}^{n} \left\{ u_h \delta p_h - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} \right)_{\dot{q}=u} \delta q_h \right\};$$

из сравнения двух выражений, полученных таким образом для δH, в силу произвольности приращений δp_h, δq_h, получим

$$u_h(p, q, t) = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \qquad -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} \right)_{\dot{q}=u} = \frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому системе первого порядка (1′), (2′), эквивалентной лагранжевой системе (1), можно придать упомянутую выше гамильтонову форму

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_h &= -\frac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \end{aligned}\right\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5)$$

Всякая система дифференциальных уравнений первого порядка этого вида, какова бы ни была функция $H(p \mid q \mid t)$, называется *канонической* или *гамильтоновой* системой; переменные p и q называются *каноническими переменными*, причем величины p называются переменными первой серии (это те функции, производные которых в выражении посредством H имеют явно знак минус), а величины q — переменными второй серии; ясно, конечно, что речь идет о различии совершенно несущественном, так как обе серии переменных обменяются местами, если изменить знак у функции Гамильтона.

2. В предыдущем пункте мы видели, что при условии $\Delta \neq 0$ уравнения

$$p_h = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

разрешимы относительно $\dot{q}$ в виде

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где $H(p \mid q \mid t)$ означает функцию, определяемую равенством (3′). Отметим здесь, что и, обратно, эти последние уравнения разрешимы относительно p и, следовательно, эквивалентны уравнениям (2), если отличен от нуля гессиан функции H

$$\Delta_1 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \, \partial q_k} \right\|.$$

Если, допустив эту обратимость соотношений, связывающих p с $\dot{q}$, продифференцируем любое из переменных p по любому другому из них, рассматривая его как сложную функцию через посредство $\dot{q}$, то получим тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_h}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_l} = \delta_{hl} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где, как обычно, δ_{hl} означает единицу, если индексы h и l равны между собой, и нуль, если они различны; достаточно принять во внимание выражения для p и $\dot{q}$ соответственно через H и $\mathfrak{L}$, чтобы предыдущим тождествам можно было придать вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_l} = \delta_{hl} \qquad (h, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, мы видим, что элементы гессиана Δ_1 функции H взаимны (т. е. равны алгебраическим дополнениям, деленным на определитель) с элементами гессиана Δ функции $\mathfrak{L}$, откуда, в частности, имеем тождество

$$\Delta\Delta_1 = 1;$$

из этого тождества следует, что если один из гессианов (функции $\mathfrak{L}$ по $\dot{q}$ или функции H по p) конечен и отличен от нуля, то то же можно сказать и о другом.

Отсюда легко вывести, что как при $\Delta \neq 0$ любую лагранжеву систему можно преобразовать в каноническую систему, так и, обратно, любую каноническую систему, характеристическая функция H которой имеет отличный от нуля гессиан Δ_1, можно рассматривать как преобразованную из лагранжевой системы.

Это доказывается путем, обратным тому, которым мы от лагранжевой системы (1) перешли к канонической системе (5). Именно, отметив, что в силу предположения $\Delta_1 \neq 0$ вторая группа уравнений (5)

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

разрешима относительно p в виде

$$p_h = v_h(q \mid \dot{q} \mid t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

мы введем функцию

$$\mathfrak{L} = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - H,$$

которая, если принять во внимание только что указанные выражения для p, выразится через q, $\dot{q}$, t. Это и есть, как это легко проверить, лагранжева функция системы, которая порождает заданную каноническую систему.

3. При изучении канонических систем прибегают к геометрическому представлению, аналогичному тому представлению, которое дается пространством A_{2n} состояний движения для решений лагранжевой системы (гл. VI. п. 2). $2n$ канонических переменных p, q истолковываются как декартовы прямоугольные координаты линейного пространства Φ_{2n} $2n$ измерений, которое, следуя Джиббсу[1]), называют *фазовым пространством*.

В пространстве Φ_{2n} всякое решение $p=p(t)$, $q=q(t)$ канонической системы изображается кривой (интегральной), которая, ввиду того, что параметр t представляет собой меру времени, часто называется траекторией. Соответственно возможному выбору $2n$ произвольных координат, от которых зависит общий интеграл канонической системы, имеется ∞^{2n} траекторий, из которых одна и только одна проходит через данную точку фазового пространства Φ_{2n}.

4. Интегралы. Для канонической системы (а также, как известно, и для всякой другой системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка) *интегралом* называется соотношение вида

$$f(p\,|\,q\,|\,t)=\text{const},$$

которое тождественно удовлетворяется всяким решением системы. Само собой разумеется, что постоянной в правой части надо приписать для всякого отдельного решения подходящее значение, а именно: если p_0, q_0, t_0 являются соответствующими начальными значениями величин p, q, t, то эта постоянная должна быть положена равной $f(p_0\,|\,q_0\,|\,t_0)$. Иногда интегралом системы называется также сама функция $f(p\,|\,q\,|\,t)$; однако такую функцию точнее называть *инвариантом* по той причине, что в фазовом пространстве функция $f(p\,|\,q\,|\,t)$ сохраняет постоянное значение вдоль всякой траектории.

Заметив это, вспомним, что для лагранжевой системы (1), когда функция $\mathfrak{L}$ не зависит от t, имеет место (гл. V, п. 43) обобщенный

---

[1]) Дж. В. Джиббс (Josian Willard Gibbs) родился в 1839 г. в Ньюгавене (Коннектикут), умер там же в 1903 г. Получил степень доктора в своем родном городе, затем некоторое время был в Париже, Берлине и Гейдельберге, где слушал лекции Гельмгольца и Кирхгоффа. С 1871 г. до конца жизни был профессором математической фи ики в университете в Ньюгавене. Он внес важный вклад в термодинамику, в аналитическую механику, которой посвятил специальный том, а также в электромагнитную теорию света и в векторные методы, которые нашли у него изящное применение к вычислению орбит.

Вскоре после его смерти его мемуары были изданы в двух томах (Лондон, 1906 г.).

интеграл энергии

$$H = \text{const}. \tag{6}$$

Указанная выше эквивалентность между всякой лагранжевой системой и соответствующей ей канонической системой заставляет нас предполагать, что если функция Гамильтона не зависит явно от t, то уравнение (6) в предположении, что H выражена в функции от p, q, должно давать интеграл канонической системы.

Полезно дать здесь доказательство этого предложения, потому что оно является прямым следствием одного общего тождества, которое само по себе будет необходимо в дальнейшем. Для того чтобы установить это тождество, заметим, что, какова бы ни была функция H, составляя полную производную этой функции по t, будем иметь

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_h} \dot{p}_h + \frac{\partial H}{\partial q_h} \dot{q}_h \right) + \frac{\partial H}{\partial t};$$

достаточно принять во внимание каноническую систему (5), чтобы убедиться, что для всякого ее решения тождественно имеем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{7}$$

Если мы предположим теперь, что функция Гамильтона не зависит явно от t, то непосредственно найдем, что для канонической системы существует интеграл (6), который можно также называть *обобщенным интегралом энергии*.

Другой элементарный тип интеграла мы будем иметь в том случае, когда характеристическая функция H не будет зависеть от какой-нибудь из переменных q; действительно, если имеем $\partial H / \partial q_r = 0$, то из соответствующего уравнения (5) будет следовать, что существует интеграл

$$p_r = \text{const}.$$

Интегралы этого типа можно называть интегралами *обобщенных кинетических моментов* или интегралами обобщенных количеств движения; отметим еще, что только это указанное обстоятельство совпадает с результатом, полученным в п. 45 гл. V для лагранжевых систем, когда имеются игнорируемые координаты. Действительно, если функция $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q} \mid t)$ лагранжевой системы не зависит от одной координаты q_r, то от этой координаты не будут также зависеть обобщенные импульсы

$$p_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

и производные от обобщенных координат

$$\dot{q}_h = u_h(p \mid q \mid t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{2'}$$

получающиеся в результате решения уравнений (2) относительно q. Отсюда следует, что не будет зависеть от q_r и характеристическая функция $H(p \mid q \mid t)$ соответствующей канонической системы, которая получается после подстановки в выражение

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - \mathfrak{L}(q \mid \dot{q} \mid t)$$

вместо величин $\dot{q}$ их выражений (2').

Обратно, если переменная q_r не входит в характеристическую функцию $H(p \mid q \mid t)$ канонической системы, то она не войдет и в выражения

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

а следовательно, и в выражения

$$p_h = v_h(q \mid \dot{q} \mid t);$$

поэтому соответствующая лагранжева функция $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q} \mid t)$, получающаяся (п. 2) посредством подстановки только что указанных значений p в выражение

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - H(p \mid q \mid t),$$

также не будет зависеть от q_r.

5. Явное выражение функции Гамильтона в динамическом случае. Если функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ составлена для решения задачи о движении голономной системы, находящейся под действием консервативных сил, то, как известно (гл. V, п. 40),

$$\mathfrak{L} = T + U, \tag{8}$$

где

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \tag{9}$$

при

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{h=1}^{n} a_h \dot{q}_h,$$

причем T_0, потенциал U, а также коэффициенты a_{hk}, a_h зависят только от q и, возможно, от времени t.

Для того чтобы перейти к выражению функции Гамильтона H, определяемой равенством (3), заметим прежде всего, что уравнения (2), определяющие обобщенные импульсы p, принимают здесь вид

$$p_h = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_k + a_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Если обозначить, как обычно, через $a^{(hk)}$ величину, взаимную с a_{hk} в дискриминанте $\|a_{hk}\|$ квадратичной формы T_2 (т. е. алгебраическое дополнение элемента a_{hk}, деленное на определитель), то уравнения (10) после разрешения относительно $\dot{q}_h$ дадут

$$\dot{q}_h = \sum_{k=1}^{n} (a^{(hk)} (p_k - a_k) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

С другой стороны, по теореме Эйлера имеем

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = 2T_2, \quad \sum_{h=1}^{n} \frac{dT_1}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = T_1,$$

так что справедливо тождество

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = 2T_2 + T_1,$$

которое в рассматриваемом здесь динамическом случае позволяет придать уравнению (3) вид

$$H = (T_2) - T_0 - U, \tag{11}$$

где (T_2) обозначает функцию от p, q, t, получающуюся из T_2 при помощи подстановки вместо $\dot{q}$ их выражений (10′). Если, в частности, связи не зависят от времени и, следовательно, живая сила T сводится к своей квадратичной части T_2, то имеем просто

$$H = (T) - U, \tag{11′}$$

т. е. функция Гамильтона есть не что иное, как полная энергия системы, как это уже отмечалось в п. 43 гл. V.

Теперь остается только выразить явно через p, q, t квадратичную форму (T_2), а для этой цели заметим, что эту форму можно представить в виде

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \sum_{k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_k;$$

выполняя первое частичное исключение при помощи формул (10), получаем

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h (p_h - a_h);$$

после этого на основании равенств (10′) заключаем, что

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} a^{(hk)} (p_h - a_h)(p_k - a_k) \tag{12}$$

и, в частности, в случае не зависящих от времени связей,

$$(T) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} a^{(hk)} p_h p_k. \tag{12'}$$

Подставляя это выражение для (T) в равенство (11) или соответственно в (11′), мы увидим, что функция Гамильтона представляет собой квадратичную функцию относительно p, вообще говоря, неоднородную, с коэффициентами, зависящими от q и t; она становится однородной с коэффициентами, выражающимися только через q, когда связи не зависят от времени.

Это новое выражение (12) или (12′) в противоположность первоначальному, представленному в переменных q, $\dot{q}$ (и t), называется *канонической формой* квадратичной части T_2 живой силы или полной живой силы T; в этом последнем случае, когда связи не зависят от времени, мы имеем следующее практическое правило: чтобы перейти от выражения T к выражению (T), достаточно написать взаимную с T квадратичную форму, подставляя в нее вместо каждой $\dot{q}_h$ соответствующий момент p_h.

Далее, если живая сила T, выраженная через $\dot{q}$, имеет ортогональный вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \dot{q}_i^2,$$

то, кроме подстановки переменных, все сведется к замене каждого коэффициента a_{ii} его обратным $1/a_{ii}$.

6. Примеры. а) В случае, когда свободная точка с массой, равной единице, отнесена к сферическим координатам ρ, θ, φ, живая сила определяется равенством

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2),$$

так что переменными, сопряженными с ρ, θ, φ, будут соответственно

$$p_\rho = \dot{\rho}, \quad p_\theta = \rho^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \rho^2 \sin^2 \theta \, \dot{\varphi}.$$

Отсюда непосредственно или замечая, что форма T является ортогональной, и применяя только что высказанное правило, получим

$$(T) = \frac{1}{2} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\theta^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right).$$

Аналогично, в цилиндрических координатах r, φ, z (из которых две первые представляют собой не что иное, как полярные коорди-

наты в плоскости $z=0$) имеем

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

и, следовательно,

$$(T)=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2+p_z^2\right).$$

б) В качестве второго примера рассмотрим систему из $N+1$ [1]) свободных точек $P_i\,(i=0, 1, \ldots, N)$ и примем за лагранжевы параметры $3(N+1)$ соответствующих декартовых прямоугольных координат ξ_i, η_i, ζ_i относительно системы осей $\Omega\xi\eta\zeta$. Обозначив через m_i массу точки P_i, будем иметь

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2),$$

так что для сопряженных переменных π_i, χ_i, ρ_i имеют место выражения

$$\pi_i=m_i\dot{\xi}_i,\quad \chi_i=m_i\dot{\eta}_i,\quad \rho_i=m_i\dot{\zeta}_i\qquad (i=0, 1, \ldots, N);$$

эти величины, очевидно, представляют собой проекции количеств движения.

В согласии с последним замечанием предыдущего пункта, канонической формой живой силы будет здесь

$$(T)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{m_i}(\pi_i^2+\chi_i^2+\rho_i^2).$$

в) Рассмотрим, наконец, твердое тело, закрепленное в точке O, и примем за лагранжевы координаты углы Эйлера θ, φ, ψ, определяющие положение главных осей инерции относительно точки O, неподвижных в теле, по отношению к любой неподвижной системе $O\xi\eta\zeta$.

Если обозначим, как обычно, через p, q, r проекции (на оси, неподвижные в теле) угловой скорости ω тела и через A, B, C — главные моменты инерции, то живая сила, как мы уже знаем (гл. IV, п. 10), определится равенством

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2). \tag{13}$$

---

[1]) Мы говорим здесь об $N+1$ точках (а не об N, как это могло бы показаться более естественным), потому что в большей части задач небесной механики обычно одна из точек (так называемое центральное тело P_0) имеет преобладающее влияние на движение остальных точек (гл. III, п. 22).

Так как p, q, r связаны с лагранжевыми координатами θ, φ, ψ и с их производными известными соотношениями (т. I, гл. III, п. 32, 33)

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r &= \qquad\qquad\qquad \dot{\theta}\cos\theta + \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

то мы видим, что квадратичная форма T относительно $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ не будет, как в случаях (а) и (б), ортогональной; поэтому для перехода к канонической форме (T) здесь необходимо обратиться к общему приему исключения.

Если введем направляющие косинусы

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

неподвижной оси ζ относительно осей, неподвижных в теле, то переменные p_θ, p_φ, p_ψ, сопряженные с θ, φ, ψ (на основании уравнения (13) и только что приведенных выражений для p, q, r), будут определяться равенствами

$$\left.\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi, \\ p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = Cr, \\ p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

отсюда, полагая для простоты письма

$$\sigma = \frac{p_\psi - p_\varphi\cos\theta}{\sin\theta},$$

получим

$$\left.\begin{aligned} Ap &= \quad p_\theta\cos\varphi + \sigma\sin\varphi, \\ Bq &= -p_\theta\sin\varphi + \sigma\cos\varphi, \\ Cr &= \quad p_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

и по ле подстановки в выражение (13) найдем

$$(T) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(p_\theta\cos\varphi + \sigma\sin\varphi)^2}{A} + \frac{(p_\theta\sin\varphi - \sigma\cos\varphi)^2}{B} + \frac{p_\varphi^2}{C}\right\}.$$

7. Теорема Дирихле. Вернемся на один момент к теореме Дирихле, имея в виду эту теорему как для динамического (гл. VI, п. 5), так и для общего (гл. VI, п. 17) случая.

В синтетических доказательствах этой теоремы, в только что упомянутых пунктах, мы обращались к пространству A_{2n} состояний

движения, т. е. к пространству, в котором переменные Лагранжа q, $\dot{q}$ истолковывались как декартовы прямоугольные координаты. Теперь на основании соотношений (2) или эквивалентных им соотношений (2′) мы имеем одно-однозначное соответствие между этим пространством A_{2n} и фазовым пространством Φ_{2n}; если примем во внимание, что свойство какой-нибудь функции иметь минимум остается инвариантным по отношению ко всякому такому соответствию, то увидим, что синтетическое доказательство теоремы Дирихле, указанное в пп. 6,17 гл. VI, можно повторить без существенных изменений относительно координат p, q.

§ 2. Канонические преобразования

8. Определение. Пусть задана какая-нибудь система дифференциальных уравнений первого порядка в нормальном виде

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \quad (15)$$

выполним над неизвестными функциями x какое-нибудь преобразование, возможно, заключающее в себе и t,

$$y_j = y_j(x \mid t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (16)$$

подчиненное одному только существенному условию обратимости. Мы предполагаем, таким образом, что для функций (16) могут быть однозначно определены, по крайней мере в некоторой области значений y и t, обратные функции

$$x_i = x_i(y \mid t),$$

для чего, как известно, необходимо и достаточно, чтобы в этой области не был тождественно равен нулю якобиан от y по x.

Так как полная производная от y по t равна

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_j}{dt} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

то непосредственно ясно, что система, получившаяся в результате преобразования системы (15), будет также нормальной.

Так, в частности, если начальная система была канонической, то преобразованная система будет во всяком случае нормальной. Но, вообще говоря, эта новая система не будет канонической.

Будем называть *каноническим* всякое преобразование n пар переменных p и q в новые n пар переменных π и $\varkappa$, которое, будучи, возможно, зависимым от t и обратимым, преобразовывает *всякую*