движения, т. е. к пространству, в котором переменные Лагранжа q, $\dot{q}$ истолковывались как декартовы прямоугольные координаты. Теперь на основании соотношений (2) или эквивалентных им соотношений (2′) мы имеем одно-однозначное соответствие между этим пространством A_{2n} и фазовым пространством Φ_{2n}; если примем во внимание, что свойство какой-нибудь функции иметь минимум остается инвариантным по отношению ко всякому такому соответствию, то увидим, что синтетическое доказательство теоремы Дирихле, указанное в пп. 6,17 гл. VI, можно повторить без существенных изменений относительно координат p, q.

§ 2. Канонические преобразования

8. Определение. Пусть задана какая-нибудь система дифференциальных уравнений первого порядка в нормальном виде

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \quad (15)$$

выполним над неизвестными функциями x какое-нибудь преобразование, возможно, заключающее в себе и t,

$$y_j = y_j(x \mid t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (16)$$

подчиненное одному только существенному условию обратимости. Мы предполагаем, таким образом, что для функций (16) могут быть однозначно определены, по крайней мере в некоторой области значений y и t, обратные функции

$$x_i = x_i(y \mid t),$$

для чего, как известно, необходимо и достаточно, чтобы в этой области не был тождественно равен нулю якобиан от y по x.

Так как полная производная от y по t равна

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_j}{dt} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

то непосредственно ясно, что система, получившаяся в результате преобразования системы (15), будет также нормальной.

Так, в частности, если начальная система была канонической, то преобразованная система будет во всяком случае нормальной. Но, вообще говоря, эта новая система не будет канонической.

Будем называть *каноническим* всякое преобразование n пар переменных p и q в новые n пар переменных π и $\varkappa$, которое, будучи, возможно, зависимым от t и обратимым, преобразовывает *всякую*

каноническую систему (5) переменных p, q в каноническую систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{\pi}_h &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_h}, \\ \dot{x}_h &= \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_h} \end{aligned}\right\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где новая функция Гамильтона Φ может быть какой угодно (не обязательно равной преобразованной из первоначальной функции H).

С. Ли[1]) полностью определил все канонические преобразования посредством одного дифференциального[2]) условия, которое мы укажем, пользуясь исследованиями, принадлежащими Морера[3]), в ближайшем п. 10, причем ограничимся лишь подтверждением достаточности. Для этого здесь необходимо предпослать некоторые вспомогательные рассуждения.

9. О пфаффианах и их союзных системах. Пусть дан любой пфаффиан с переменными x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} X_i \, dx_i,$$

где X_i обозначают n произвольных функций от x (конечно, правильных в некоторой области). Как и в п. 57 гл. V, рассмотрим вместе с дифференциалами dx другую систему независимых дифференциалов δx

---

[1]) Марий Софус Ли родился в 1842 г. в Нордфиорде в Норвегии, умер в 1899 г., в Осло. После одного года преподавания в шведском университете в Лунде, он перешел в 1872 г. в университет в Осло, из которого в 1886 г. был приглашен заменить Клейна в Лейпцигском университете. Здесь в течение двенадцати лет он собрал вокруг себя большую группу учеников разных национальностей. В 1898 г., когда здоровье его было уже подорвано болезнью, приведшей его к могиле, он с большими почестями был приглашен на родину на кафедру теории групп преобразований, созданную им в университете в Осло. Он любил связывать свои работы с работами Понселе и Плюккера с одной стороны, и с работами Галуа — с другой. Но благодаря смелой новизне взглядов, силе геометрической интуиции и независимости мысли, неподчиняющейся чьему бы то ни было влиянию, С. Ли занимает в истории математики совершенно самостоятельное место. Благодаря новой принадлежащей ему концепции задачи интегрирования дифференциальных уравнений он пришел, с одной стороны, к открытию преобразований прикосновения и к теории инвариантов этих преобразований, а с другой стороны, к теории конечных непрерывных групп преобразований, которая благодаря совершенной полноте, изяществу методов и результатов и неисчерпаемой возможности приложений остается вечным памятником его имени.

[2]) Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen, *Arch. for Math.*, т. II, 1877, стр. 129—156; *Gesamm. Abhandl.*, т. III; Leipzig-Kristiania, Teubner-Aschehoug, 1922, стр. 295—317.

[3]) G. Morera, Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton, *Rend. Acc. Lincei*, т. XII, 1° sem. 1903, стр. 113—122.

и введем билинейный ковариант χ пфаффиана ψ, определяемый равенством

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} (\delta X_i \, dx_i - dX_i \, \delta x_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i \, \delta x_j.$$

Если, оставляя явными δx и полагая для краткости

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

напишем этот билинейный ковариант в виде

$$\chi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \, \delta x_j,$$

то станет ясно, что для того чтобы он был равен нулю тождественно относительно δx (т. е. при каких угодно значениях этих дифференциалов), необходимо и достаточно, чтобы dx удовлетворяли N уравнениям

$$\psi_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (17)$$

Эта система n уравнений Пфаффа называется *союзной* с данным пфаффианом ψ; легко видеть, что, как и билинейный ковариант, она инвариантна по отношению к преобразованию переменных.

Действительно, можно заметить, что если вследствие определенного преобразования переменных x_i в переменные $\bar{x}_i$ пфаффиан ψ перейдет в пфаффиан

$$\bar{\psi} = \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i \, d\bar{x}_i,$$

то билинейный ковариант χ по выполнении преобразования выразится суммой

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \left(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial \bar{X}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) d\bar{x}_i \, \delta \bar{x}_j,$$

так что если положим

$$\bar{\psi}_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial \bar{X}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) d\bar{x}_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

то новая союзная система уравнений, т. е. система уравнений, дающая необходимое и достаточное условие для того, чтобы билинейный

ковариант χ обращался тождественно относительно $\delta\bar{x}$ в нуль, будет иметь вид

$$\bar{\psi}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (17')$$

Если примем теперь во внимание, что в силу линейности и обратимости соотношений, связывающих $\delta\bar{x}$ с δx, произвольность одних величин влечет за собой произвольность других, то заключим, что система (17′), по крайней мере с точностью до замены переменных, эквивалентна системе (17), т. е., как это и утверждалось выше, система (17′) эквивалентна преобразованной из системы (17).

Кроме того, нужно заметить, что если к пфаффиану ψ присоединить полный дифференциал $d\Omega$, то союзная система останется неизменной, так как оба пфаффиана ψ и $\psi + d\Omega$ имеют один и тот же билинейный ковариант.

10. Достаточное условие для обеспечения канонической природы преобразования. После этого отступления возьмем снова любую каноническую систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_h &= -\frac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \end{aligned}\right\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5)$$

и заметим прежде всего, что она, по существу, не отличается от системы, союзной с пфаффианом

$$\psi = \sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h - H\, dt.$$

Действительно, соответствующему билинейному коварианту

$$\chi = \sum_{h=1}^{n} (\delta p_h\, dq_h - dp_h\, \delta q_h) - \delta H\, dt + dH\, \delta t,$$

развертывая δH, можно придать вид

$$\chi = \sum_{h=1}^{n} \left\{ -\left(dp_h + \frac{\partial H}{\partial q_h} dt\right) \delta q_h + \left(dq_h - \frac{\partial H}{\partial p_h} dt\right) \delta p_h \right\} + \\ + \left(dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt\right) \delta t,$$

так что, полагая равными нулю коэффициенты при δp, δq, δt и деля в полученных таким образом уравнениях обе части на dt, мы получим систему, союзную с пфаффианом ψ, в виде

$$\frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Первые $2n$ из этих уравнений составляют как раз данную каноническую систему, а последнее, как мы видели в п. 4, является их необходимым следствием.

После этого можно утверждать, что обратимое преобразование

$$\left.\begin{aligned} p_h &= p_h(\pi \mid \varkappa \mid t), \\ q_h &= q_h(\pi \mid \varkappa \mid t) \end{aligned}\right\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

между n парами переменных p, q, и π, $\varkappa$ будет каноническим, если будет удовлетворяться тождественно уравнение вида

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h\, d\varkappa_h + H_0\, dt + d\Omega, \tag{19}$$

где H_0 и Ω обозначают две функции, a priori какие угодно, от $4n+1$ переменных p, q, π, $\varkappa$ и t.

Действительно, тождество между пфаффианами (19), если из обеих частей равенства вычесть Hdt, можно написать в виде

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h - H\, dt = \sum_{h=1}^{n} \pi_h\, d\varkappa_h - (H - H_0)\, dt + d\Omega;$$

поэтому союзной системой с пфаффианом в левой части будет как раз каноническая система (5), а союзной системой с пфаффианом в правой части, так как полный дифференциал $d\Omega$ ничего к ней не прибавляет (предыдущий пункт), будет та каноническая система относительно π, $\varkappa$, которая имеет характеристической функцией $H - H_0$, причем эта функция предполагается выраженной при помощи уравнений (18) посредством одних только π, $\varkappa$, t. Тождественность двух пфаффианов, по меньшей мере с точностью до преобразования переменных (18), влечет за собой аналогичную тождественность соответствующих систем, т. е. двух только что названных канонических систем; поэтому заключаем, что система, получающаяся после преобразования посредством формул (18) какой-нибудь канонической системы (5) с характеристической функцией H, является не только нормальной (п. 8), но и канонической, и имеет в качестве характеристической функции $H - H_0$.

Не будет лишним отметить, что всякий раз, когда имеет место тождество (19) в написанной форме, величины π для преобразованной системы составляют первый ряд переменных, величины $\varkappa$ — второй.

11. Канонические преобразования, зависящие от произвольной функции от $2n+1$ аргументов. Мы придем к одному классу канонических преобразований, который, как увидим ниже (§ 4), находит замечательные применения, если введем какую-нибудь произвольную функцию V, зависящую от нескольких первоначальных переменных и от

такого же числа преобразованных переменных, например от q и от π, а также, возможно, от t.

Единственным существенным предположением является лишь то, чтобы смешанный функциональный определитель

$$\nabla = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \, \partial \pi_i} \right\| \qquad (h,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

не был тождественно равен нулю.

При этом предположении легко подтвердить прежде всего, что равенства

$$p_h = \frac{\partial V}{\partial q_h}, \quad \varkappa_i = \frac{\partial V}{\partial \pi_i} \qquad (h,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (20)$$

действительно определяют преобразование между p, q и π, $\varkappa$. В самом деле, вторые n уравнений (20), так как якобиан от $\partial V/\partial \pi_i$ по q, как тождественный с ∇, будет отличен от нуля, разрешимы относительно q в виде

$$q_h = q_h(\pi \mid \varkappa \mid t) \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

достаточно присоединить эти уравнения к уравнениям, которые выводятся из первых n из уравнений (20), чтобы получить преобразование (18) общего типа.

Нетрудно доказать, что мы имеем здесь каноническое преобразование, для чего достаточно проверить, что уравнения (20) удовлетворяют (при надлежащем выборе двух функций H_0, Ω) тождеству (19).

Для этой цели заметим, что из уравнений (20) следует соотношение

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \, dq_h + \sum_{h=1}^{n} \varkappa_h \, d\pi_h = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial V}{\partial \pi_h} d\pi_h \right);$$

в то время как правая часть есть не что иное, как

$$dV - \frac{\partial V}{\partial t} dt,$$

вторую сумму в левой части можно написать в виде

$$d \sum_{h=1}^{n} \pi_h \varkappa_h - \sum_{h=1}^{n} \pi_h \, d\varkappa_h,$$

так что в качестве следствия из соотношений (20) мы находим тождество

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \, dq_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h \, d\varkappa_h - \frac{\partial V}{\partial t} dt + d\left(V - \sum_{h=1}^{n} \pi_h \varkappa_h \right).$$

Таким образом, утверждение будет доказано, если положим

$$H_0 = -\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \Omega = V - \sum_{h=1}^{n} \pi_h \varkappa_h;$$

поэтому заключаем, что всякое преобразование типа (20), в предположении $\nabla \neq 0$, является каноническим, причем вместо характеристической функции H входит в этом случае функция

$$H + \frac{\partial V}{\partial t},$$

выраженная, естественно, через π, $\varkappa$, t.

12. Вполне канонические преобразования. Если функция V явно не зависит от t, то преобразование (20), примененное к какой-нибудь канонической системе, не только сохранит ее типичный вид, но и оставит неизменной ее характеристическую функцию, в том смысле, что преобразованная каноническая система будет иметь характеристической функцией преобразованную из первоначальной функции H.

Преобразование, обладающее этим двойным свойством, называется *вполне каноническим.*

Из заключения п. 10 следует, что в совокупности определенных там преобразований вполне каноническими будут только преобразования, удовлетворяющие тождеству (19) при $H_0 = 0$, т. е. тождеству

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \, dq_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h \, d\varkappa_h + d\Omega. \tag{19'}$$

Легко убедиться, что к этому классу (вполне) канонических преобразований мы придем всякий раз, когда будем искать преобразование (18), не зависящее от t и удовлетворяющее общему тождеству (19).

Действительно, если общее тождество (19) напишем в виде

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \, dq_h - \sum_{h=1}^{n} \pi_h \, d\varkappa_h = H_0 \, dt + d\Omega \tag{21}$$

и представим себе, что величины p, q выражены только через π, $\varkappa$ при помощи предполагаемого преобразования, не зависящего от t, то увидим, что левая часть не зависит ни от t, ни от dt. Так как она должна быть тождественна с правой частью по отношению к $2n+1$ аргументам π, $\varkappa$, t, то заключаем, что прежде всего должно удовлетворяться тождественно равенство

$$H_0 + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0;$$

с другой стороны, $\partial\Omega/\partial\pi_h$, $\partial\Omega/\partial\varkappa_h$ должны быть независимыми от t. Поэтому Ω будет вида $\Omega_1 + T$, где Ω_1 не зависит от t, а T является

функцией этого единственного аргумента; равенство (21) примет тогда вид

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h\, d\varkappa_h + d\Omega_1,$$

т. е. совпадет с равенством (19′), что мы и хотели доказать.

Еще более частным случаем вполне канонических преобразований являются так называемые *однородные преобразования*, т. е. обратимые и не зависящие от t преобразования n пар p, q в π, $\varkappa$, удовлетворяющие дифференциальному тождеству

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h\, d\varkappa_h; \tag{19''}$$

мы придем к одному интересному специальному классу таких преобразований, задавая произвольно при одном только предположении обратимости преобразование, не зависящее от t, между n первоначальными переменными, принадлежащими одному ряду, и n преобразованными переменными, тоже принадлежащими одному ряду, например между q и $\varkappa$

$$q_h = q_h(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

В этом случае все сведется к тому, чтобы найти, какие уравнения типа

$$p_h = p_h(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n; \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

надо присоединить к равенствам (22), чтобы тождественно удовлетворить (19″); для этого достаточно подставить в него выражения (22) и приравнять в обеих частях коэффициенты при произвольных дифференциалах $d\varkappa_h$, чтобы однозначно получить уравнения

$$\pi_h = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial \varkappa_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

Эти уравнения будут линейными относительно π, p с коэффициентами, зависящими только от $\varkappa$, и однозначно разрешимыми относительно p, если на основании предполагаемой обратимости уравнений (22) якобиан $\|\partial q_i/\partial \varkappa_h\|$ не равен тождественно нулю.

С другой стороны, к тому же результату можно прийти, разрешая предварительно уравнения (22) относительно $\varkappa$

$$\varkappa_h = \varkappa_h(q_1, q_2, \ldots, q_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{22'}$$

и подставляя в уравнения (19″); после этого сравнение коэффициентов при dq однозначно приведет к равенствам

$$p_h = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \frac{\partial \varkappa_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{24'}$$

Уравнения (24), (24′) делают очевидным тот факт, который можно было предвидеть заранее на основании тождества (19″), что переменные p и π преобразуются одни в другие как частные производные первого порядка от одной и той же функции переменных q или, соответственно, переменных $\varkappa$, подвергнутых преобразованию (22) или (22′), т. е., как говорят, в *абсолютном дифференциальном исчислении*, преобразуются *ковариантно*.

13. Линейные вполне канонические преобразования. Если функция V п. 11 не зависит от t и линейна относительно своих $2n$ аргументов q и π, то и соответствующее вполне каноническое преобразование будет линейным (и однородным). В общем случае, если предположить, что уравнения (20) разрешены относительно новых переменных π, $\varkappa$, эти последние будут выражаться (линейно) через $2n$ первоначальных переменных p, q.

Особого рассмотрения заслуживают те вполне канонические преобразования, при помощи которых вместо n переменных одного из первоначальных рядов, например q, вводятся n наперед заданных их линейных однородных независимых комбинаций с постоянными коэффициентами

$$\varkappa_h = \sum_{i=1}^{n} b_{hi} q_i \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Способ предыдущего пункта приводит к однозначному определению таких n линейных относительно p форм, тоже с постоянными коэффициентами (которые должны быть приняты за новые переменные π), чтобы полученное преобразование было (вполне) каноническим. Для этого достаточно разрешить уравнения (25) относительно q и затем применить равенства (24).

Но в этом случае к результату можно прийти быстрее, замечая, что, так как уравнения (25) имеют постоянные коэффициенты, существуют такие же соотношения между дифференциалами dq и $d\varkappa$; поэтому тождество (19″) можно здесь заменить конечным соотношением

$$\sum_{h=1}^{n} p_h q_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h \varkappa_h, \tag{26}$$

которое выражает, что две системы линейных подстановок (с постоянными коэффициентами), которые надо выполнить над переменными p, q, должны оставить неизменной так называемую унитарную *билинейную форму*. В простых случаях, которые чаще всего приходится рассматривать в конкретных задачах, равенство (26) позволяет вывести одну из этих двух систем подстановок, когда задана другая.

Так, например, если при $n = 3$ требуется выполнить над переменными q подстановки

$$\varkappa_1 = q_1, \quad \varkappa_2 = q_1 - q_2, \quad \varkappa_3 = q_2 - q_3,$$

то на основании соотношения (26), исключая все q, получим тождество

$$\pi_1\varkappa_1+\pi_2\varkappa_2+\pi_3\varkappa_3=p_1\varkappa_1+p_2(\varkappa_1-\varkappa_2)+p_3(\varkappa_1-\varkappa_2-\varkappa_3),$$

которое непосредственно дает

$$\pi_1=p_1+p_2+p_3,\quad \pi_2=-p_2-p_3,\quad \pi_3=-p_3.$$

Аналогично, если в случае какого угодно числа сопряженных переменных p_i, $q_i (i=0, 1, \ldots, n)$ требуется сохранить одну из переменных q неизменной, полагая, например,

$$\varkappa_0=q_0,$$

и подставить вместо остальных $q_h (h>0)$ разности

$$\varkappa_h=q_h-q_0 \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

то найдем

$$\pi_0=\sum_{i=0}^{n} p_i,\quad \pi_h=p_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n).$$

14. Вполне канонические бинарные преобразования. В случае вполне канонического преобразования, производимого только над двумя сопряженными переменными p, q, тождество (19′), принимающее здесь вид

$$pdq=\pi\, d\varkappa+d\Omega,$$

можно истолковать наглядно. Действительно, развертывая dq, можно написать это тождество в виде

$$p\frac{\partial q}{\partial \pi}d\pi+\left(p\frac{\partial q}{\partial \varkappa}-\pi\right)d\varkappa=d\Omega,$$

и условие, необходимое и достаточное для того, чтобы левая часть была полным дифференциалом, выражается равенством

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial \pi} & \dfrac{\partial p}{\partial \varkappa} \\ \dfrac{\partial q}{\partial \pi} & \dfrac{\partial q}{\partial \varkappa} \end{vmatrix}=1.$$

Если как первоначальные переменные p, q, так и преобразованные переменные π, $\varkappa$ мы будем истолковывать как декартовы ортогональные координаты на плоскости, то увидим, что вполне канонические бинарные преобразования представляют собой так называемые *эквивалентные преобразования*, т. е. преобразования плоскости, оставляющие неизменными площади. В дальнейшем (п. 16) мы увидим, что и вполне канонические преобразования с $2n$ переменными тоже будут *эквивалентными* в том смысле, что в фазовом пространстве Φ_{2n}, в котором p, q истолковываются как прямоугольные декартовы координаты, сохраняется неизменным объем ограниченных фигур $2n$

измерений. Однако только в рассмотренном здесь случае, когда $n=1$, имеет место и обратное предложение, в силу которого всякое эквивалентное преобразование может рассматриваться как вполне каноническое.

Замечательное бинарное преобразование мы получим, если будем рассматривать p, q как декартовы ортогональные координаты и введем соответствующие полярные координаты ρ, θ, связанные с ними известными соотношениями

$$p=\rho\cos\theta, \quad q=\rho\sin\theta.$$

В этом случае переменные $\pi=\rho^2/_2$, $\varkappa=\theta$ будут каноническими, так как якобиан от $p=\sqrt{2\pi}\cos\varkappa$, $q=\sqrt{2\pi}\sin\varkappa$ равен 1.

Это замечание допускает переход от всякой пары сопряженных переменных, имеющих характер декартовых координат на плоскости, к какой-нибудь паре, тоже сопряженной, имеющей характер полярных координат, или обратно.

Другое бинарное вполне каноническое преобразование, еще более элементарное, состоит в умножении одной из двух сопряженных переменных на произвольную постоянную n и в одновременном делении на n другой. Ясно, что для такого преобразования определитель Якоби будет равен 1.

В более общем случае можно поставить вопрос, какова должна быть функция L от p, q, представляющая собой каноническую переменную, которую надо присоединить к некоторой переменной l вида

$$l=nq,$$

где n уже не является более постоянной, а есть какая-нибудь наперед заданная функция от аргумента p. Имея в виду соотношение (19″), мы тотчас же заключаем, что для этого достаточно взять какую-нибудь функцию от одного только p, удовлетворяющую условию

$$l\,dL=q\,dp,$$

т. е. на основании заданного для l выражения

$$dL=\frac{dp}{n(p)}.$$

Если далее будет иметь место то обстоятельство (которое встретится нам в п. 68), что величины p и n выражаются посредством какого-нибудь параметра a, то определяющее L дифференциальное соотношение может быть написано в виде

$$dL=\frac{dp}{da}\frac{da}{n(a)}. \tag{27}$$

15. Уравнения вполне канонического преобразования в разрешенном виде. Скобки Лагранжа. Вернемся теперь к общим рассуждениям

п. 12, чтобы вывести из них в явной форме условия, при которых какое-нибудь преобразование

$$\pi_h = \varphi_i(p|q), \quad \varkappa_h = \psi_i(p|q) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

связывающее $2n$ переменных p, q со столькими же переменными π, $\varkappa$, было бы вполне каноническим.

Возьмем снова для этой цели характеристическое условие полной каноничности

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h\, d\varkappa_h + d\Omega, \tag{19'}$$

которое словами можно выразить так: *для того чтобы преобразование* (28) *было каноническим, необходимо и достаточно*, чтобы пфаффиан $\sum_{h=1}^{n} \pi_h\, d\varkappa_h$, выраженный через p, q посредством преобразования (28), отличался от пфаффиана $\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h$ только на полный дифференциал от некоторой функции Ω от тех же переменных p, q. Но мы уже знаем, что полные дифференциалы характеризуются тем, что для них билинейный ковариант тождественно равен нулю. Таким образом, мы заключаем непосредственно, что для того, чтобы преобразование (28) было вполне каноническим, необходимо и достаточно, чтобы равенство между билинейными ковариантами пфаффианов $\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h$ и $\sum_{h=1}^{n} \pi_h\, d\varkappa_h$

$$\sum_{h=1}^{n} (\delta p_h\, dq_h - dp_h \delta q_h) = \sum_{h=1}^{n} (\delta \pi_h\, d\varkappa_h - d\pi_h \delta \varkappa_h) \tag{29}$$

обращалось в тождество, когда вместо дифференциалов $\delta\pi_h$, $d\varkappa_h$, $d\pi_h$, $\delta\varkappa_h$ подставляются выражения

$$\left.\begin{aligned} \delta\pi_h &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial p_i}\,\delta p_i + \frac{\partial\varphi_h}{\partial q_i}\,\delta q_i\right), \\ d\varkappa_h &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\psi_h}{\partial p_i}\, dp_i + \frac{\partial\psi_h}{\partial q_i}\, dq_i\right) \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Для того чтобы представить равенство (29) в явном виде, нужно ввести символ, известный под названием *скобок Лагранжа*, и отнести его к $2n$ функциям φ, ψ, полагая их зависящими от каких-нибудь двух из $2n$ аргументов; эти два аргумента могут быть взяты или оба из p, или оба из q, или, наконец, один из p и другой из q.

Если обозначим их через u, v, то соответствующие скобки $[u, v]$ Лагранжа определятся равенством

$$[u, v] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \frac{\partial \psi_i}{\partial v} - \frac{\partial \psi_i}{\partial u} \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \right),$$

откуда непосредственно ясно, что речь идет о таком символе, который в силу самого определения его обладает свойством

$$[u, v] + [v, u] = 0.$$

Введя этот символ, выполним указанную выше подстановку выражений (30) в равенство (29) и приравняем в обеих частях равенства коэффициенты при одинаковых произведениях независимых дифференциалов δp, dq, dp, δq. Этим способом мы получим эквивалентную тождеству (29) систему из $n(2n-1)$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно $2n$ функций φ, ψ (в действительности число этих уравнений равно $2n(2n-1)$, но оно сводится к половине в силу альтернативного свойства скобок)

$$[p_h, p_k] = 0, \quad [q_h, q_k] = 0, \quad [p_h, q_k] = \delta_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{31}$$

где, как обычно, δ_{hk} обозначает единицу или нуль, в зависимости от того, совпадают или не совпадают оба индекса h, k; равенства (31) и представляют собой требуемые явные условия для полной каноничности преобразования (28).

16. Геометрическая интерпретация условий полной каноничности. Рассмотрим функциональный определитель преобразования (28), который символически, очевидно, можно представить в виде

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial p_h} & \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_h} \\ \dfrac{\partial \psi_i}{\partial p_h} & \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_h} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \ h = 1, 2, \ldots, n),$$

где i обозначает номер строки, h — номер столбца.

Выполним в этом определителе порядка $2n$ следующие операции: 1) перестановку каждой из n первых строк со строкою, занимающей то же место между остальными n строками; 2) перестановку каждого из n первых столбцов со столбцом, занимающим то же место между остальными n столбцами; 3) перемену знака у всех элементов первых n строк; 4) перемену знака у всех элементов первых n столбцов. Таким образом, мы получим определитель

$$D^* = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_h} & -\dfrac{\partial \psi_i}{\partial p_h} \\ -\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_h} & \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial p_h} \end{vmatrix}.$$

Но каждая из указанных операций от 1) до 4) (перестановка двух строк или двух столбцов, перемена знака у всех элементов одной строки или одного столбца) производит только перемену знака определителя. Все эти операции, вместе взятые, можно сгруппировать в пары операций одного типа, состоящие из одной операции над строками и другой — над столбцами, причем последующие перемены знаков определителя будут происходить в точности четное число раз. Поэтому имеем $D^* = D$, и, следовательно, квадрат определителя D можно представить как произведение D на D^*. Комбинируя столбцы со столбцами и принимая во внимание определение скобок Лагранжа, получим

$$D^2 = DD^* = \begin{vmatrix} [p_h, q_k] & -[p_h, p_k] \\ [q_h, q_k] & -[q_h, p_k] \end{vmatrix} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n). \quad (32)$$

Все это остается справедливым, каково бы ни было преобразование (28).

Но мы предположили, что преобразование является вполне каноническим, так что если будем предполагать выполненными условия (31), то из соотношения (32) следует

$$D^2 = 1;$$

это соотношение, если обратимся к фазовому пространству Φ_{2n}, в котором p, q так же, как и π, $\varkappa$, истолковываются как декартовы ортогональные координаты, обнаруживает то замечательное обстоятельство, что *вполне канонические преобразования определяют в фазовом пространстве эквивалентные преобразования*, т. е. такие, которые оставляют неизменным объем.

17. Другая явная форма условий полной каноничности. Скобки Пуассона. Из сопоставления двух видов D и D^*, которые можно придать функциональному определителю какого-нибудь преобразования, в случае полной каноничности вытекают другие важные следствия.

Введем прежде всего так называемые *скобки Пуассона*, относящиеся к двум каким угодно функциям u, v от $2n$ аргументов p, q и определяемые тождеством

$$(u, v) = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial p_h} \frac{\partial v}{\partial q_h} - \frac{\partial u}{\partial q_h} \frac{\partial v}{\partial p_h} \right).$$

Эти новые скобки, которыми мы будем широко пользоваться в дальнейшем изложении этой главы, так же как и скобки Лагранжа, являются альтернирующими и представляют собой в известном смысле, который мы сейчас же выясним, их взаимные символы.

Заметим, что выражение (32), полученное в предыдущем пункте для произведения по столбцам определителей D и D^*, если примем во внимание равенства (31), показывает, что для вполне канонического преобразования матрицы этих определителей являются взаимно обрат-

ными в обычном смысле, т. е. что всякий элемент одной равен алгебраическому дополнению элемента, занимающего то же место в другой, деленному на величину определителя последней. Но в этом случае, как известно, взаимная обратимость дает место характеристическим тождествам не только относительно столбцов, но и относительно строк, т. е. сумма произведений элементов i-й строки определителя D на элементы, занимающие те же места в j-й строке определителя D^*, будет равно 1, если $i=j$, и нулю, если $i \neq j$, так что необходимыми следствиями равенств (31) будут уравнения

$$(\varphi_i, \varphi_j)=0, \quad (\psi_i, \psi_j)=0, \quad (\varphi_i, \psi_j)=\delta_{ij} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n). \tag{31'}$$

Этот вывод обратим: действительно, если квадрат функционального определителя (D^2) преобразования (28) вычисляется умножением D на D^* по строкам вместо столбцов, то, принимая во внимание только что данное определение скобок Пуассона, найдем

$$D^2=D \cdot D^*=\begin{vmatrix} (\varphi_i, \psi_j) & -(\varphi_i, \varphi_j) \\ (\psi_i, \psi_j) & -(\psi_i, \varphi_j) \end{vmatrix} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n). \tag{32'}$$

Достаточно будет предположить, что имеют место равенства (32′), чтобы вывести отсюда при помощи тех же самых рассуждений, которые были применены выше, что справедливы также и соотношения (31).

Поэтому заключаем, что равенства (31′) в новой форме дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование (28) было вполне каноническим.

18. Канонические преобразования и преобразования прикосновения. Хотя это и не имеет прямого интереса для последующего изложения, все же не бесполезно отметить, кстати, внутреннюю связь между вполне каноническими преобразованиями и теми преобразованиями, которые в геометрии носят название *преобразований прикосновения*.

Для определения последних обратимся к пространству (евклидову) $n+1$ измерений S_{n+1}, в котором z, q_1, q_2, $\ldots$, q_n обозначают декартовы ортогональные координаты. Назовем элементом (гиперплоскостным) или элементарной площадкой этого пространства S_{n+1} совокупность какой-либо точки P_0 (центр элементарной площадки) и непосредственно прилегающей к ней области какой-нибудь проходящей через нее гиперплоскости S_n. Если z^0, q^0 суть координаты точки, то уравнение гиперплоскости будет иметь вид

$$z-z^0=\sum_{h=1}^{n} p_h^0 \, (q_h-q_h^0), \tag{33}$$

где p^0 обозначают n вполне определенных постоянных, определяющих положение гиперплоскости; поэтому за координаты элемента можно принять $2n+1$ чисел z^0, q^0, p^0. Таким образом. всякая точка является

центром ∞^n элементов, а все пространство S_{n+1} оказывается совокупностью ∞^{2n+1} элементов z, q, p.

Каждая гиперповерхность V_n

$$z = z(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

во всякой своей точке z^0, q^0 имеет, вообще говоря, вполне определенную касательную гиперплоскость, уравнение которой определяется равенством (33), если положить в нем

$$p_h^0 = \left(\frac{\partial z}{\partial q_h}\right)_{q=q^0} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

так что гиперповерхность V_n оказывается совокупностью ∞^n определенных элементов.

В более общем случае, если задается какое-нибудь многообразие V_m с каким угодно числом измерений $m \leqslant n$, то во всякой его точке P_0 будет определено как касательное какое-нибудь пространство S_m m измерений, а так как этих касательных многообразий будет ∞^m и через каждое из них в пространстве S_{n+1} проходит ∞^{n-m} гиперплоскостей, то мы можем сказать, что и многообразие V_m является совокупностью ∞^n элементов, каждый из которых состоит из точки P_0 гиперповерхности V_m и какой-нибудь из гиперплоскостей, проходящих через S_m и касательных к V_m в точке P_0. Таким образом, соответственно значениям $m = n$, $n-1, \ldots, 2, 1, 0$ мы будем иметь в пространстве S_{n+1} $(n+1)$ категорий многообразий ∞^n элементов, последняя из которых $(m = 0)$ содержит все точки пространства S_{n+1}, рассматриваемые каждая как связка элементов, имеющая в ней свой центр.

Ясно, что одно какое-нибудь многообразие ∞^n элементов, перечисленных выше, обладает тем свойством, что в нем два каких угодно *бесконечно близких* элемента *сопряжены* в том смысле, что гиперплоскость одного проходит через центр другого. Это *условие сопряженности* между двумя бесконечно близкими элементами z, q, p и $z + dz$, $q + dq$, $p + dp$ выражается уравнением Пфаффа

$$dz - p_1\, dq_1 - p_2\, dq_2 - \ldots - p_n\, dq_n = 0; \tag{34}$$

С. Ли доказал, что в пространстве S_{n+1} не существует других многообразий ∞^n элементов, сопряженных друг с другом, помимо многообразий, принадлежащих к $n+1$ только что определенным категориям, которые можно поэтому назвать *многообразиями n измерений сопряженных элементов*.

Если над точками пространства S_{n+1} мы выполним какое-нибудь преобразование (обратимое), то оно поставит в соответствие двум каким угодно касательным друг к другу гиперповерхностям, т. е. гиперповерхностям, имеющим один общий элемент, две аналогичные гиперповерхности, так что это преобразование над точками (*точечное* преобразование) можно рассматривать как преобразование над элементами (или, как обычно говорят, *расширенное точечное преобразование*).

Легко видеть, что такое *расширенное точечное преобразование* переводит всякое многообразие ∞^n сопряженных элементов в многообразие сопряженных элементов; это аналитически выражается в том, что всякое расширенное точечное преобразование преобразует условие сопряженности (34) само в себя.

Не надо, однако, думать, что и, обратно, всякое преобразование, произведенное над ∞^{2n+1} элементов пространства S_{n+1}, преобразующее само в себя условие сопряженности (34), будет необходимо расширенным точечным преобразованием. С. Ли доказал, что существует бесконечное множество преобразований (зависящих от произвольных функций от $2n+1$ аргументов, вместо $n+1$ аргументов, как это имеет место для точечных преобразований), которые, если обозначить через ζ, $\varkappa$, π координаты преобразованного элемента, имеют вид

$$\zeta = \zeta(z \mid p \mid q),\ \varkappa_h = \varkappa_h(z \mid p \mid q),\ \pi_h = \pi_h(z \mid p \mid q) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

и преобразуют само в себя условие сопряженности (34).

Отсюда следует, что такое преобразование само преобразует одно в другое многообразия ∞^n сопряженных элементов; но по сравнению с расширенными точечными преобразованиями оно обладает существенно отличными свойствами. В то время как расширенное точечное преобразование, примененное к какому-нибудь многообразию ∞^n сопряженных элементов, оставляет неизменным размерность точечного многообразия центров этих ∞^n элементов, преобразование Ли, вообще говоря, изменяет эту размерность, как если бы происходило разъединение многообразия ∞^n сопряженных элементов и одновременно с этим объединение их согласно условию (34) вокруг новых центров, составляющих в своей совокупности точечное многообразие другой размерности. Так, в частности, ∞^n элементов связки т. е. элементов, имеющих общий центр в произвольной точке пространства S_{n+1}, преобразование Ли ставит в соответствие, в зависимости от случая, ∞^n элементов какого-нибудь V_n, или V_{n-1}, ..., или V_1, или связки. При этом если всякой связке из ∞^n элементов соответствует одна аналогичная связка, то преобразование сводится к расширенному точечному.

Эти более общие преобразования элементов из S_{n+1}, удовлетворяющие условию сопряженности (34), как раз и представляют собой, по определению С. Ли, преобразования прикосновения.

Между преобразованиями такого рода С. Ли изучал, в частности, преобразования вида

$$\zeta = z - \Omega(p \mid q),\ \varkappa_h = \psi_h(p \mid q),\ \pi_h = \varphi_h(p \mid q) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \quad (35)$$

и показал, что эти преобразования определяются дифференциальным условием

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h\, d\varkappa_h + d\Omega, \qquad (19')$$

которое мы уже встречали как характеристическое для вполне канонических преобразований.

Таким образом, мы приходим к заключению, что вполне канонические преобразования при присоединении уравнения $\zeta = z' - \Omega(p \mid q)$ оказываются тождественными с преобразованиями прикосновения типа (35). Если, в частности, Ω сводится к постоянной, то дифференциальное тождество (19′) принимает вид (19″) (п. 12), и мы получаем так называемые однородные преобразования прикосновения. Эти преобразования находят важное применение в оптике, как мы покажем это в упражнениях.

В аналогичном смысле общие канонические преобразования являются не чем иным, как преобразованиями прикосновения (35), в которые в виде параметра входит t; как противоположный крайний случай, вполне канонические преобразования частного вида, к которым мы пришли в конце п. 12, заранее произвольно задавая обратимое и не зависящее от t преобразование между q и $\varkappa$, сводятся к расширенным точечным преобразованиям.

§ 3. Интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

19. Линейные дифференциальные операторы и их альтернаты. Основной задачей в теории канонических систем является, конечно, задача интегрирования, о чем мы дадим краткое понятие в §§ 6—12. Но предварительно мы остановимся в этом и в двух следующих параграфах (§§ 4 и 5) на некоторых вспомогательных понятиях, которые выясним вообще для систем дифференциальных уравнений первого порядка произвольного вида, применять же их будем всякий раз только к случаю канонических систем. Начнем с напоминания некоторых совсем элементарных понятий.

Введя N независимых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_N$, рассмотрим совокупность функций $f(z_1, z_2, \ldots, z_N)$, правильных, по крайней мере, в некоторой области, т. е. конечных, непрерывных и дифференцируемых столько раз, сколько будет необходимо. Назовем *линейным оператором* (первого порядка) всякую операцию, после применения которой к какой-нибудь функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ мы получаем выражение типа

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu},$$

где α_ν представляют собою N определенных функций указанной выше совокупности. Это выражение обозначается символом Af, причем A (как это ясно само собою) есть не величина, а знак оператора. В соот-