которое мы уже встречали как характеристическое для вполне канонических преобразований.

Таким образом, мы приходим к заключению, что вполне канонические преобразования при присоединении уравнения $\zeta = z' - \Omega(p \mid q)$ оказываются тождественными с преобразованиями прикосновения типа (35). Если, в частности, Ω сводится к постоянной, то дифференциальное тождество (19′) принимает вид (19″) (п. 12), и мы получаем так называемые однородные преобразования прикосновения. Эти преобразования находят важное применение в оптике, как мы покажем это в упражнениях.

В аналогичном смысле общие канонические преобразования являются не чем иным, как преобразованиями прикосновения (35), в которые в виде параметра входит t; как противоположный крайний случай, вполне канонические преобразования частного вида, к которым мы пришли в конце п. 12, заранее произвольно задавая обратимое и не зависящее от t преобразование между q и $\varkappa$, сводятся к расширенным точечным преобразованиям.

§ 3. Интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

19. Линейные дифференциальные операторы и их альтернаты. Основной задачей в теории канонических систем является, конечно, задача интегрирования, о чем мы дадим краткое понятие в §§ 6—12. Но предварительно мы остановимся в этом и в двух следующих параграфах (§§ 4 и 5) на некоторых вспомогательных понятиях, которые выясним вообще для систем дифференциальных уравнений первого порядка произвольного вида, применять же их будем всякий раз только к случаю канонических систем. Начнем с напоминания некоторых совсем элементарных понятий.

Введя N независимых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_N$, рассмотрим совокупность функций $f(z_1, z_2, \ldots, z_N)$, правильных, по крайней мере, в некоторой области, т. е. конечных, непрерывных и дифференцируемых столько раз, сколько будет необходимо. Назовем *линейным оператором* (первого порядка) всякую операцию, после применения которой к какой-нибудь функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ мы получаем выражение типа

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu},$$

где α_ν представляют собою N определенных функций указанной выше совокупности. Это выражение обозначается символом Af, причем A (как это ясно само собою) есть не величина, а знак оператора. В соот-

ветствии с этим соглашением можно написать

$$A = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}.$$

Применяя линейный оператор к сумме двух функций f_1, f_2, к их произведению или, вообще, к какой-нибудь сложной функции $F(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, составленной из m функций f_μ от N аргументов z, мы непосредственно можем убедиться, что всякий линейный оператор ведет себя как символ дифференцирования, т. е. имеют место основные тождества

$$A(f_1+f_2) = Af_1 + Af_2, \quad A(f_1, f_2) = f_1Af_2 + f_2Af_1,$$

$$AF(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial f_\mu} Af_\mu.$$

Если затем, рассматривая второй оператор

$$B = \sum_{\rho=1}^{N} \beta_\rho \frac{\partial}{\partial z_\rho},$$

где β так же, как и α, суть функции от z, мы выполним операторное умножение B на A или A на B, т. е. применим последовательно оба оператора в том или другом порядке, то придем к двум новым операторам (второго порядка) AB и BA.

Представляя в развернутом виде результат первой операции, найдем

$$ABf = \sum_{\rho=1}^{N} A\beta_\rho \frac{\partial f}{\partial z_\rho} + \sum_{\rho=1}^{N} \beta_\rho A \frac{\partial f}{\partial z_\rho} = \sum_{\rho=1}^{N} A\beta_\rho \frac{\partial f}{\partial z_\rho} + \sum_{\substack{\nu=1\\ \rho=1}} \alpha_\nu\beta_\rho \frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial z_\rho};$$

аналогично в результате второй операции получим

$$BAf = \sum_{\rho=1}^{N} B\alpha_\rho \frac{\partial f}{\partial z_\rho} + \sum_{\substack{\nu=1\\ \rho=1}}^{N} \alpha_\nu\beta_\rho \frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial z_\rho};$$

мы видим, таким образом, что ABf, BAf, вообще говоря, не совпадают друг с другом или, как обычно говорят, два линейных оператора A, B, в общем случае, некоммутативны; но операторы AB, BA всегда имеют одинаковую часть второго порядка, так что их разность сводится к оператору первого порядка. Этот последний оператор называется

альтернатом операторов A и B и обозначается символом (AB) т. е. (по определению)

$$(AB) = AB - BA = \sum_{\rho=1}^{N} (A\beta_\rho - B\alpha_\rho) \frac{\partial}{\partial z_\rho}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$(AB) = -(BA).$$

20. Интегралы и инварианты системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и определяемое ими уравнение с частными производными первого порядка. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и ранга n, т. е. систему, состоящую из n уравнений с n неизвестными функциями x от одного независимого переменного t; мы сразу же будем предполагать, что система приведена к *нормальному виду*, т. е. разрешена относительно производных:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{36}$$

В дальнейшем для удобства выражения мы часто будем под независимой переменной t понимать *время*; в соответствии с этим вместо решений системы (36) мы будем говорить о *движении*, определяемом этой системой в абстрактном пространстве n измерений x, которое, по аналогии с динамическим случаем, можно называть *пространством конфигураций* или *пространством траекторий*. Наряду с этим пространством иногда удобно рассматривать пространство $n+1$ измерений x и t, в котором всякое решение системы (36) представится кривой (интегральной), называемой *графиком* *) соответствующего движения. В этом пространстве, соответственно ∞^n решений уравнений (36), имеется столько же графиков движения, из которых через каждую точку проходит один и только один график.

Известно (см. п. 4), что *интегралом* системы (36) называется всякое конечное соотношение между x и t вида

$$f(x \mid t) = \text{const}, \tag{37}$$

которое тождественно удовлетворяется каждым решением системы, конечно, при подходящем значении постоянной в правой части. С геометрической точки зрения, всякий интеграл (37) в пространстве x, t $n+1$ измерений определяет ∞^1 гиперповерхностей или многообразий n измерений, заполняющих пространство в том смысле, что одна и только одна из гиперповерхностей проходит через каждую

*) В случае $n+1=2$ эта кривая в элементарной кинематике называется *графиком*; мы сохранили для нее такое же название и для случая $n+1>2$. Авторы называют рассматриваемую кривую *curva oraria*. (*Прим. перев.*)

точку; эти гиперповерхности таковы, что на каждой из них лежит целиком однозначно определенный график движения, проходящий через какую-нибудь ее точку. Другими словами, каждая из ∞^1 гиперповерхностей (37) составляется ∞^{n-1} кривых из всех ∞^n графиков движения.

Иногда, как уже указывалось в случае канонических систем, сама функция $f(x \mid t)$ в левой части уравнения (37) называется *интегралом*. Эта функция называется также *инвариантом* системы (36), так как для всякого решения системы она сохраняет постоянное значение, как бы ни изменялось время t.

Мы покажем здесь, что интегралы или инварианты $f(x \mid t)$ системы (36) можно определить как решения некоторого вполне определенного линейного уравнения с частными производными первого порядка относительно x и t.

Для этой цели заметим, что, для того чтобы уравнение (37) определяло интеграл системы (36), необходимо и достаточно, чтобы всякий раз, когда в него вместо x подставляются функции от t, удовлетворяющие уравнениям (36), само уравнение (37), при подходящем значении постоянной, сводилось к тождеству. Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось тождественно, как следствие уравнения (37), уравнение, которое выводится из него дифференцированием по t,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0,$$

или, так как x определяются уравнениями (36),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{38}$$

Это и есть то уравнение с частными производными, на которое мы указывали выше; при этом существенно необходимо добавить одно замечание.

В действительности процесс дифференцирования, посредством которого мы вывели уравнение (38) из (37), позволяет лишь утверждать, что уравнение (38) справедливо только для тех систем значений x и t, которые удовлетворяют уравнению (37).

Но достаточно принять во внимание, что уравнение (37) тождественно удовлетворяется (при подходящем значении постоянной) какими угодно решениями x_i уравнений (36), чтобы видеть, что уравнение (38) в силу того же самого удовлетворяется тождественно, т. е. при произвольно выбранных значениях, в некоторой подходящей области переменных x и t, от которых зависит f. Действительно, мы уже знаем, что как бы ни задавались (в области, в которой для системы (36) имеет место теорема существования общего интеграла)

$n+1$ значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0$, всегда существует одно и только одно решение $x_i(t)$ уравнений (36), для которого имеем $x_i(t_0)=x_i^0$. Далее, уравнение (38) остается справедливым при подстановке в него этого решения, каково бы ни было t; таким образом, если мы положим в этом решении, в частности, $t=t_0$, то уравнение (38) будет удовлетворяться при заданных выше произвольно значениях x_i^0 и t_0.

Обратно, легко убедиться, что всякая функция $f(x\,|\,t)$, удовлетворяющая уравнению (38), когда в ней x и t рассматриваются как независимые переменные, будет интегралом или инвариантом системы (36). Действительно, если уравнение (38) удовлетворяется тождественно, оно, в частности, остается справедливым и тогда, когда вместо x_i подставляются n функций, удовлетворяющих уравнениям (36); а так как при этом левая часть уравнения (38) сводится к df/dt, то функция f будет такой, что когда x в ней будут рассматриваться как решения уравнений (36), то будет $df/dt=0$, т. е.

$$f(x\,|\,t)=\text{const}.$$

Таким образом, *для того чтобы какая-нибудь функция $f(x\,|\,t)$ была интегралом или инвариантом системы* (36), *необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла линейному уравнению с частными производными* (38) *относительно $n+1$ независимых переменных x и t.*

Далее, из анализа известно, что это уравнение имеет n независимых между собой решений $f_i(x\,|\,t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Из предыдущего следует, что эти решения определяют (для системы (36)) столько же различных интегралов

$$f_i(x\,|\,t)=c_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

где c_i обозначают n произвольных постоянных; эти n уравнений, так как из них можно определить каждую из переменных x через t и c, определяют общий интеграл уравнений (36). Обращаясь к геометрической интерпретации в пространстве $n+1$ измерений графиков движения, мы можем сказать, что через произвольную точку x^0, t_0 такого пространства проходит одна и только одна из ∞^1 гиперповерхностей каждого из семейств (39); эти n гиперповерхностей, уравнения которых имеют вид

$$f_i(x\,|\,t)=f_i(x^0, t_0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

пересекаются вдоль графика движения, представляющего то решение уравнений (36), в котором x_i при $t=t_0$ принимают значения x_i^0.

Отметим, наконец, что если рассматривать совместно не все n интегралов (39), а только некоторое число их $m<n$, то система

$$f_i(x\,|\,t)=c_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

определит в соответствии с возможным выбором m постоянных c_i разделение точек пространства на ∞^m многообразий $n-m$ измере-

ний, каждое из которых, очевидно, можно рассматривать как образованное ∞^{n-m-1} графиков движения.

21. Интегралы и инварианты канонической системы. В случае канонической системы ранга $2n$

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

уравнение (38) с частными производными, определяющее инварианты или интегралы $f(p \mid q \mid t)$, принимает вид (предыдущий пункт)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial q_h} - \frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} \right) = 0;$$

если вспомним определение скобок Пуассона (п. 17), то это уравнение можно написать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (H, f) = 0. \tag{40}$$

Так как в уравнение с частными производными, имеющее очевидную важность для теории канонических систем, входят скобки Пуассона, остановимся немного на свойствах этих скобок.

22. О скобках Пуассона. Если из двух функций u и f от $2n$ переменных p и q будем рассматривать первую как заданную, а вторую как произвольную, то соответствующую скобку Пуассона

$$(u, f) = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial q_h} - \frac{\partial u}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} \right)$$

можно рассматривать как полученную путем применения к функции линейного оператора

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial p_h} \frac{\partial}{\partial q_h} - \frac{\partial u}{\partial q_h} \frac{\partial}{\partial p_h} \right).$$

Таким образом, из общих свойств линейных операторов, перечисленных в п. 19, для скобок Пуассона вытекают тождества

$$(u, f_1 + f_2) = (u, f_1) + (u, f_2), \quad (u, f_1 f_2) = f_1 (u, f_2) + f_2 (u, f_1),$$

второе из которых дает, в частности, если через c обозначим какую-нибудь постоянную,

$$(u, cf) = c(u, f).$$

Подобным же образом, если $F(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ есть сложная функция, зависящая от p и q через посредство m функций f_j, то из

соответствующего тождества п. 19 непосредственно имеем

$$(u, F) = \sum_{j=1}^{m} (u, f_j) \frac{\partial F}{\partial f_j}.$$

К этому тождеству мы присоединим здесь другое очень важное тождество, относящееся к каким угодно трем функциям u, v, w от p и q (так называемое тождество Пуассона—Якоби),

$$(u, (v, w)) + (v, (w, u)) + (w, (u, v)) = 0. \tag{41}$$

Для доказательства этого тождества заметим сначала, что после выполнения выкладок всякий член в левой части будет состоять из произведения двух первых производных от двух различных из трех функций u, v, w на одну вторую производную от третьей функции. Поэтому для подтверждения, что левая часть равна тождественно нулю, надо показать, что после приведения подобных членов она не будет более содержать производных второго порядка.

Для этой цели обратим внимание на вторые производные от u. Очевидно, в первом слагаемом $(u, (v, w))$ не будет ни одной из них; что же касается двух других слагаемых, то, вводя временно два линейных оператора A и B, определяемых равенствами

$$Af = (v, f), \quad Bf = (w, f),$$

будем иметь

$$(v, (w, u)) = ABu, \quad (w, (u, v)) = -(w, (v, u)) = -BAu$$

и, следовательно,

$$(v, (w, u)) + (w, (u, v) = ABu - BAu = (AB)\, u.$$

Далее, мы знаем, что (AB) есть оператор первого порядка, т. е. $(AB)\, u$ после выполнения выкладок не будет содержать ни одной производной второго порядка, что и доказывает тождество (41).

Будем говорить, что две функции от p, q, скобки Пуассона которых равны нулю, находятся в *инволюции*; из тождества Пуассона—Якоби непосредственно следует, что если две функции v, w находятся в инволюции с одной и той же функцией u, то то же будет иметь место и для их скобок Пуассона (v, w).

23. Теорема Пуассона. *Если f_1, f_2 суть два интеграла канонической системы, то и их скобки (f_1, f_2) также будут интегралом.*

Прежде чем доказывать это, заметим, что новый интеграл не будет обязательно независимым от двух других, предполагаемых известными; он может даже оказаться иллюзорным, например, постоянной величиной, и, в частности, нулем (если f_1 и f_2 находятся в инволюции).

Эта теорема является почти непосредственным следствием тождества Пуассона—Якоби. Действительно, предположение, что функции f_1, f_2 являются интегралами канонической системы (5), выражается уравнениями (п. 21)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+(H, f_1)=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}+(H, f_2)=0, \tag{42}$$

а речь идет о том, чтобы доказать, что отсюда вытекает уравнение

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial t}+(H, (f_1 f_2))=0. \tag{43}$$

Из тождества Пуассона—Якоби относительно f_1, f_2, H

$$(f_1, (f_2, H))+(f_2, (H, f_1))+(H, (f_1, f_2))=0$$

на основании равенства (42) получаем

$$\left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right)-\left(f_2, \frac{\partial f_1}{\partial t}\right)+(H, (f_1, f_2))=0, \tag{44}$$

а так как из равенства, определяющего скобки Пуассона

$$(f_1, f_2)=\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_h}\frac{\partial f_2}{\partial q_h}-\frac{\partial f_1}{\partial q_h}\frac{\partial f_2}{\partial p_h}\right),$$

путем дифференцирования по t получаем

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial t}=\left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right)-\left(f_2, \frac{\partial f_1}{\partial t}\right),$$

о мы видим, что уравнение (44) тождественно с уравнением (43).

24. Примеры. а) Для иллюстрации теоремы Пуассона на некоторых особенно простых примерах рассмотрим, во-первых, систему из $n+1$ свободных материальных точек, находящихся исключительно под действием внутренних сил, как это имеет место в так называемой задаче $n+1$ тел (гл. III, п. 22). Для такой системы имеют место два первых интеграла: интеграл количеств движения и интеграл моментов количеств движения (относительно любой галилеевой системы осей), т. е. при принятых нами обозначениях,

$$\boldsymbol{Q}=\text{const}, \quad \boldsymbol{K}=\text{const};$$

из этих равенств после проектирования на оси галилеевой системы $\Omega\xi\eta\zeta$ можно получить шесть скалярных интегралов

$$Q_j=\text{const}, \qquad K_j=\text{const} \qquad (j=1, 2, 3),$$

где для удобства обозначений индексы 1, 2, 3 относятся к проекциям векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ соответственно на три оси ξ, η, ζ.

Если, как и в п. 6, в качестве лагранжевых параметров q мы возьмем декартовы координаты ξ_i, η_i, ζ_i отдельных точек системы, а в качестве сопряженных параметров p — проекции соответствующих количеств движения

$$\pi_i = m_i\dot{\xi}_i, \quad \chi_i = m_i\dot{\eta}_i, \quad \rho_i = m_i\dot{\zeta}_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

то явные выражения Q_j, K_j определятся равенствами

$$Q_1 = \sum_{i=0}^{n} \pi_i, \quad Q_2 = \sum_{i=0}^{n} \chi_i, \quad Q_3 = \sum_{i=0}^{n} \rho_i; \tag{45'}$$

$$K_1 = \sum_{i=0}^{n} (\eta_i\rho_i - \zeta_i\chi_i), \quad K_2 = \sum_{i=0}^{n} (\zeta_i\pi_i - \xi_i\rho_i), \quad K_3 = \sum_{i=0}^{n} (\xi_i\chi_i - \eta_i\pi_i). \tag{45''}$$

Вычисляя частные производные по отношению к переменным, расположенным в двух строках, каждая из которых содержит $3n$ переменных,

$$\begin{Vmatrix} \pi_i & \chi_i & \rho_i \\ \xi_i & \eta_i & \zeta_i \end{Vmatrix} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

найдем, что скобки Пуассона двух каких угодно функций u, v принимают вид

$$(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial \pi_i}\frac{\partial v}{\partial \xi_i} - \frac{\partial u}{\partial \xi_i}\frac{\partial v}{\partial \pi_i} + \frac{\partial u}{\partial \chi_i}\frac{\partial v}{\partial \eta_i} - \frac{\partial u}{\partial \eta_i}\frac{\partial v}{\partial \chi_i} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u}{\partial \rho_i}\frac{\partial v}{\partial \zeta_i} - \frac{\partial u}{\partial \zeta_i}\frac{\partial v}{\partial \rho_i} \right);$$

достаточно применить эту формулу к шести первым интегралам, чтобы убедиться, что для них имеют место тождества

$$(Q_j, Q_l) = 0 \qquad (j, l = 1, 2, 3), \tag{46'}$$

$$(K_2, K_3) = -K_1, \quad (K_3, K_1) = -K_2, \quad (K_1, K_2) = -K_3; \tag{46''}$$

$$(Q_j, K_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3); \tag{46'''}$$

$$\left.\begin{aligned} (Q_1, K_2) = (K_1, Q_2) = -Q_3, \ (Q_2, K_3) = (K_2, Q_3) = -Q_1, \\ (Q_3, K_1) = (K_3, Q_1) = -Q_2. \end{aligned}\right\} \tag{46^{\mathrm{IV}}}$$

Отсюда прежде всего следует, что в настоящем случае теорема Пуассона не дает ничего нового, так как скобки от двух каких угодно из шести первых интегралов или тождественно равны нулю, или воспроизводят один из тех же самых интегралов; мы видим, таким

образом, что согласно терминологии, введенной С. Ли, эти шесть интегралов определяют *группу функций*[1]).

Отметим еще, кроме того, что каждое из количеств движения Q находится в инволюции с остальными двумя и с моментом K, соответствующим той же оси; достаточно принять во внимание тождества ($46''$), (46^{IV}), чтобы убедиться, что как всякое количество движения Q, так и всякий отдельный момент K находятся в инволюции с квадратом модуля результирующего момента количеств движения

$$K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2.$$

б) В качестве второго примера рассмотрим одну материальную точку, которая находится под действием силы $\boldsymbol{F}$, допускающей один интеграл количества движения и один интеграл момента количества движения, с различными индексами, например Q_1 и K_2. Здесь мы имеем весьма простой пример приложимости теоремы Пуассона, так как из первого из соотношений (46^{IV}) следует, что будет существовать также и интеграл $Q_3 = \text{const}$. Заметим, кроме того, что это заключение с геометрической точки зрения очевидно, так как наличие двух интегралов $Q_1 = m\dot{\xi} = \text{const}$, $K_2 = m(\zeta\dot{\xi} - \xi\dot{\zeta}) = \text{const}$ означает, что сила $\boldsymbol{F}$ для любого положения точки должна быть, с одной стороны, параллельна плоскости $\eta\zeta$, а с другой — компланарна (пересекает или параллельна) с осью η, а отсюда следует, что сила, если она не равна нулю, будет необходимо параллельна оси η и, следовательно, перпендикулярна к оси ζ, что как раз и обеспечивает справедливость интеграла $Q_3 = m\dot{\zeta} = \text{const}$.

в) Имеет место следующая общая теорема Якоби[2]), которую мы здесь только сформулируем: *если голономная система находится под действием таких сил, что существует некоторое число $m \geqslant 2$ первых интегралов, то скобки Пуассона для двух каких угодно из этих интегралов удовлетворяют тем же самым тождествам* ($46'$) — (46^{IV}), *которые имели бы место в случае системы свободных точек.*

---

[1]) *Группой функций* по С. Ли называется всякая совокупность функций от двух сопряженных рядов n переменных, обладающая следующими свойствами: 1) она содержит всякую сложную функцию, составленную из функций той же совокупности; 2) к ней принадлежат скобки Пуассона от двух каких угодно из ее функций. С. Ли доказал, что во всякой группе функций можно определить некоторое число $m \leqslant 2n$ таких независимых функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$, что для всякой пары индексов i, j будем иметь

$$(u_i, u_j) = \psi_{ij}(u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

где ψ_{ij} обозначают определенные функции от соответствующих аргументов, изменяющие знак при перестановке индексов i, j. Группа функций состоит из всех сложных функций (и только из них), составленных из u.

[2]) Jacobi, Werke, т. V, стр. 113. См. также Mathieu, Dynamique analytique (Paris, Gauthier — Villars, 1878), стр. 243; A. Mayer, Math. Annalen, т. 17, 1880, стр. 333.