§ 4. Инвариантные соотношения

25. Определения и характеристические свойства. Конечное соотношение между x и t

$$f(x \mid t) = 0 \tag{47}$$

называется инвариантным по отношению к заданной обыкновенной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{36}$$

если все решения системы, которые удовлетворяют этому соотношению вначале, т. е. при частном значении t, будут удовлетворять ему также и при всяком другом значении этого переменного.

Такое соотношение, поскольку оно в отличие от интеграла не содержит произвольных постоянных, определяет некоторое свойство, принадлежащее только части решений системы, т. е. решениям, начальные значения которых подчиняются тому же соотношению. Очень простой пример инвариантного соотношения представляет собой всякий интеграл $f = \text{const}$, в котором произвольной постоянной приписывается какое-нибудь частное значение; поэтому, как и в аналогичном случае систем дифференциальных уравнений второго порядка (гл. VIII, п. 58), инвариантные соотношения называются также *частными интегралами*. Если мы обратимся к представлению в пространстве x, t графиков движения, то из самого определения увидим, что всякое инвариантное соотношение (47) определяет в нем гиперповерхность, образованную ∞^{n-1} графиков движения (или интегральных кривых) системы (36); но в данном случае мы имеем отдельную гиперповерхность, в то время как первый интеграл определял ∞^1 таких гиперповерхностей, заполняющих все пространство $n+1$ измерений.

Далее, подобно тому, как это было сделано в п. 20 для первых интегралов, укажем прежде всего формальные условия, характеризующие уравнение (47) как инвариантное соотношение.

Для того чтобы соотношение было инвариантным, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x \mid t)$ оставалась равной нулю при изменении t для всех тех решений системы (36), начальные значения которых обращают эту функцию в нуль. Это равносильно тому, чтобы сказать, что для всех этих решений полная производная от f по t, взятая в предположении, что x удовлетворяют уравнениям (36),

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{48}$$

должна быть тождественно равна нулю; мы докажем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $f(x \mid t)$, рассматриваемая как функ-

ция от $n+1$ независимых переменных x и t, удовлетворяла линейному дифференциальному уравнению в частных производных вида

$$\frac{df}{dt}=\lambda f, \tag{49}$$

где df/dt означает выражение (48), а λ есть некоторая функция от x, t, которая остается правильной в рассматриваемой области.

Действительно, обратимся к области значений для x, t, в которой вместо одного из x, например вместо x_n, можно подставить f. После выполнения подстановки df/dt станет функцией от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, f и t; если предположим, что она разложена по степеням переменной f, то можем представить ее в виде

$$\frac{df}{dt}=\gamma+\lambda f,$$

где γ зависит только от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t$, но не от f, и так же, как и λ, остается правильной в рассматриваемой области. Для того чтобы производная df/dt исчезала вместе с f, необходимо и достаточно, чтобы равенство $f=0$ влекло за собою $\gamma=0$, а так как γ не зависит от f, то мы видим, что γ может исчезать только тождественно, т. е. при каком угодно выборе ее аргументов; мы заключаем отсюда, что, действительно, левая часть какого-нибудь инвариантного соотношенбия определяется уравнением вида (49).

Отметим еще, что в обычном случае, когда уравнение (47) получается из какого-нибудь интеграла путем приписывания частного значения произвольной постоянной, имеет место (п. 20) уравнение $df/dt=0$, т. е. функция λ тождественно равна нулю.

Определение инвариантного соотношения и соответствующее характеристическое дифференциальное уравнение (49) допускают естественное обобщение. Какая-нибудь система из $m+1\leqslant n$ конечных соотношений между x и t

$$f_r(x\,|\,t)=0 \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{50}$$

называется *инвариантной* относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений (36), если она будет удовлетворяться при каком угодно значении t всяким решением $x_i(t)$ системы (36), начальные значения которого (т. е. соответствующие частному значению t_0 переменного t) ей удовлетворяют. Мы всегда будем предполагать, что $m+1$ уравнений (50) являются независимыми между собою относительно переменных x, для чего, как известно, необходимо и достаточно, чтобы ранг якобиевой матрицы от f по x был равен $m+1$; при этом предположении уравнения (50) определяют в пространстве x, t $n+1$ измерений некоторое многообразие $n-m$ измерений, образованное ∞^{n-m-1} интегральных кривых системы (36), из которых одна и только одна проходит через данную точку многообразия.

Предполагая соотношения (50) независимыми, мы найдем только что указанным для $m=0$ способом условие, необходимое и достаточное для того, чтобы система (50) была инвариантной; оно заключается в том, что функции f_r, рассматриваемые как функции от независимых переменных x, t, должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$\frac{df_r}{dt}=\sum_{s=0}^{m}\lambda_{rs}f_s \qquad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ m), \tag{51}$$

где полные производные в левой части должны быть взяты согласно уравнению (48) и λ_{rs} обозначают правильные функции в рассматриваемой области значений x и t.

26. Виртуальные перемещения. Когда известно одно соотношение или одна инвариантная система, то из нее можно получить в некоторых случаях новую инвариантную систему. Чтобы объяснить способ, который при надлежащих условиях приводит к такому результату, необходимо предпослать одно определение и некоторые вспомогательные соображения[1]).

При рассмотрении любого решения $x_i(t)$ системы (36) мы будем называть *виртуальным перемещением* (совместным с (36)) для этого решения всякие n бесконечно малых функций δx_i от t, таких, чтобы $x_i+\delta x_i$ удовлетворяли, так же как и x_i, системе (36). Подставляя эти функции в уравнения (36), мы увидим, что функции δx_i определяются системой

$$\frac{d\delta x_i}{dt}=\delta X_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\delta x_j \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{52}$$

где подразумевается, что в частные производные $\partial X_i/\partial x_j$ должны быть подставлены вместо x_i функции $x_i(t)$ рассматриваемого решения, так что коэффициенты при δx_i в правой части являются функциями только от t.

Уравнения (52) суть не что иное, как уравнения в вариациях заданной системы (36), соответствующие заданному решению $x_i(t)$ (гл. VI, п. 19); они могут быть написаны в более сжатой форме

$$\frac{d\delta x_i}{dt}=\delta\frac{dx_i}{dt} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{52'}$$

откуда видно, что знаки виртуальных перемещений и знаки производных по времени можно переставлять.

---

[1]) Levi-Civita, Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires. *Prac matematyczno—fizycznych*, Warszawa, т. XXII, 1906.

Отсюда следует более общий случай, что для всякой функции $f(x \mid t)$ от x и, возможно, от t имеем

$$\frac{d}{dt}\delta f = \delta \frac{df}{dt}, \tag{53}$$

где, как обычно, d/dt обозначает полную производную, взятую принимая во внимание уравнения (36); эта производная явно определяется посредством равенства (48).

Отметим, наконец, что для всякого решения системы (36) существует ∞^n виртуальных перемещений, так как для соответствующих уравнений в вариациях можно произвольно задать начальные значения n функций δx_i, которые им удовлетворяют.

27. Инвариантность условий стационарности инвариантного соотношения. Предполагая для системы (36) инвариантное соотношение

$$f(x \mid t) = 0 \tag{47}$$

известным, присоединим к нему символическое соотношение

$$\delta f = 0, \tag{54}$$

которое получается путем приравнивания нулю вариации, получаемой функцией f, когда в ней x_i получают некоторые виртуальные приращения, соответствующие любому из решений системы (36) и удовлетворяющие уравнению (47). Вследствие произвольности начальных значений величин δx_i это символическое соотношение равносильно n уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{54'}$$

которые вместе с уравнением (47) образуют систему, в общем случае несовместную относительно n аргументов x, если t произвольно. Но если эта система (47), (54) или, в явной форме, система (47), (54′) совместна (мы увидим, что это будет иметь место в некоторых интересных конкретных случаях), то легко видеть, что речь идет об инвариантной системе.

Действительно, если будем исходить из тождества (предыдущий пункт)

$$\frac{d}{dt}\delta f = \delta \frac{df}{dt} \tag{53}$$

и подставим вместо δf его явное выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i$$

и вместо df/dt тождественное ему произведение λf (п. 25), то получим, таким образом, тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\lambda \, \delta x_i - \frac{d \delta x_i}{dt} \right) + f \, \delta \lambda, \tag{55}$$

откуда, принимая во внимание уравнения (47), (54′), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0,$$

а это символическое соотношение в силу произвольности начальных значений δx_i равносильно n уравнениям

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

которые и доказывают инвариантный характер системы уравнений (47), (54′).

Мы будем называть уравнения (54′), выведенные из соотношения (54), условиями стационарности функции $f(x \mid t)$.

Если функция $f(x \mid t)$ действительно есть частный интеграл, то, как мы знаем, будет $\lambda = 0$, так что на основании тождества (55) условия стационарности (54′) образуют инвариантную систему, если даже ее рассматривают отдельно, т. е. независимо от соотношения (47); надо заметить, что так как число этих условий не превосходит n, то они всегда совместны относительно x при каком угодно значении t, а с другой стороны, уравнению (47) в этом случае можно всегда удовлетворить, распоряжаясь подходящим образом произвольной постоянной, которую можно представить себе включенной в $f(x \mid t)$.

28. Распространение на инвариантные системы. Рассмотрим вообще $m+1$ соотношений

$$f_r(x \mid t) = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, m), \tag{50}$$

система которых является инвариантной относительно уравнений (36), для чего, как мы знаем, необходимо и достаточно, чтобы f_r удовлетворяли системе дифференциальных уравнений вида

$$\frac{df_r}{dt} = \sum_{s=0}^{m} \lambda_{rs} f_s \qquad (r = 0, 1, \ldots, m). \tag{51}$$

Мы обобщим здесь теорему предыдущего пункта, доказав, что по отношению к уравнениям (36) инвариантной будет также (в предположении совместности) и система, которая получится путем присо-

единения к уравнениям (50) символического условия стационарности одного из этих уравнений, например

$$\delta f_0 = 0, \tag{56}$$

для всех виртуальных перемещений, соответствующих любому решению системы (36) и удовлетворяющих не только уравнению $f_0 = 0$, но и остальным m соотношениям

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_m = 0. \tag{57}$$

Для этой цели заметим прежде всего, что если, как это соответствует природе вопроса, мы предположим, что m функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ независимы между собой относительно x, то можно будет, не нарушая общности, принять их за новые независимые переменные вместо стольких же переменных, например $x_1, x_2, \ldots, x_m$, в силу чего система (36) преобразуется в эквивалентную ей систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_u}{dt} &= \Xi_u \qquad (u = 1, 2, \ldots, m), \\ \frac{dx_v}{dt} &= \Xi_v \qquad (v = m+1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{36'}$$

где функции $\Xi(f_1, f_2, \ldots, f_m, x_{m+1}, \ldots, x_n \mid t)$ по отношению к их аргументам ведут себя так же, как и X относительно первоначальных переменных; все сводится к доказательству, что система уравнений (50), (56) инвариантна относительно этой новой системы дифференциальных уравнений (36′). Условимся обозначать через $\bar{F}$ функцию, в которую обратится какая-нибудь функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid t)$, когда она *приводится* посредством уравнений (57).

Докажем сначала, что приведенное уравнение

$$\bar{f}_0 = 0$$

является инвариантным относительно частичной *приведенной* системы

$$\frac{dx_v}{dt} = \bar{\Xi}_v \qquad (v = m+1, \ldots, n). \tag{58}$$

Действительно, возьмем снова первое из тождеств (51), которое, принимая во внимание только последние $n - m$ уравнений (36′), можно написать в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial f_0}{\partial f_u} \frac{df_u}{dt} + \sum_{v=m+1}^{n} \frac{\partial f_0}{\partial x_v} \Xi_v = \sum_{s=0}^{m} \lambda_{0s} f_s;$$

положим в обеих частях $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$ и, замечая, с одной стороны, что на основании равенств (51) имеем

$$\overline{\frac{df_u}{dt}} = \bar{\lambda}_{u0} \bar{f}_0 \qquad (u = 1, 2, \ldots, m),$$

а с другой, что, вследствие того, что мы должны переменные $t, x_{m+1}, \ldots, x_m$ принять не зависящими от $f_1, f_2, \ldots, f_m$, найдем тождества

$$\frac{\overline{\partial f_0}}{\partial t} = \frac{\overline{\partial f_0}}{\partial t}, \quad \frac{\overline{\partial f_0}}{\partial x_v} = \frac{\overline{\partial f_0}}{\partial x_v} \qquad (v = m+1, \ldots, n).$$

Таким образом, мы получим тождество

$$\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial t} + \sum_{v=m+1}^{n} \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial x_v} \bar{\Xi}_v = \left(\bar{\lambda}_{00} - \sum_{u=1}^{m} \frac{\overline{\partial f_0}}{\partial f_u} \bar{\lambda}_{u0}\right) \bar{f}_0.$$

Так как левая часть есть не что иное, как полная производная от $\bar{f}_0$, вычисленная на основании уравнений (58), а правая имеет вид $\lambda \bar{f}_0$, это тождество показывает, что соотношение $\bar{f}_0 = 0$ инвариантно относительно системы (58).

Но по теореме предыдущего пункта инвариантной будет и система

$$\bar{f}_0 = 0, \qquad \delta \bar{f}_0 = 0,$$

если только выполняются условия совместности; а теперь уже легко видеть, что именно эта инвариантность влечет за собой то, что мы хотели доказать, т. е. что система, состоящая из уравнений (50) и соотношения $\delta f_0 = 0$, инвариантна относительно системы дифференциальных уравнений (36′) и, следовательно, также и относительно первоначальной системы (36), которой эквивалентна система (36′).

В самом деле, рассмотрим n уравнений, получающихся из символического уравнения $\delta f_0 = 0$,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и обозначим для простоты левые части через $f_{0\,i}$; тогда все сведется к проверке, что полные производные

$$\frac{df_{0\,|\,i}}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

вычисленные на основании уравнений (36′), обращаются в нуль в силу уравнений (50) и соотношений $f_{0\,|\,i} = 0$.

Эти полные производные, если принять во внимание только последние $n - m$ уравнений (36′), можно написать в виде

$$\frac{df_{0\,|\,i}}{dt} = \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial f_{0\,|\,i}}{\partial f_u} \frac{df_u}{dt} + \left\{\frac{\partial f_{0\,|\,i}}{\partial t} + \sum_{v=m+1}^{n} \frac{\partial f_{0\,|\,i}}{\partial x_v} \Xi_v\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

тогда выражения в фигурных скобках в правой части, если положим $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$, сведутся к полным производным $d\bar{f}_{0\,|\,i}/dt$,

вычисленным на основании системы (58); поэтому они обратятся в нуль вместе с $\bar{f}_0, \bar{f}_{0|1}, \ldots, \bar{f}_{0|n}$ в силу только что доказанной инвариантности функций $\bar{f}_0 = 0$, $\delta\bar{f}_0 = 0$ относительно этой системы. Далее, что касается суммы

$$\sum_{u=1}^{m} \frac{\partial f_{0|i}}{\partial f_u} \frac{df_u}{dt},$$

то она будет тоже равна нулю, как следствие уравнений (50), так как в силу уравнений (51) исчезают каждая из df_u/dt в отдельности.

Доказав таким образом теорему, мы выведем из нее, как и в предыдущем пункте, следствие, что если между $m+1$ соотношениями инвариантной системы (50) имеется известное число k действительных интегралов (частных), то в силу этого система, составленная из остальных $m-k+1$ соотношений (50) и условий стационарности этих k интегралов, будет инвариантной.

29. Лемма о соотношениях, выражающих инволюцию. Теорема предыдущего пункта приобретает особый интерес, если ее применить к канонической системе; для этого необходимо обратить внимание на одно вспомогательное замечание.

Рассмотрим систему из $m < n$ соотношений

$$f_r(p \mid q) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \quad (59)$$

между двумя рядами $(2n)$ переменных p и q. Пусть эти соотношения находятся в инволюции, под чем подразумевается, что для них имеют место равенства

$$(f_r, f_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m),$$

и предположим, что соотношения (59) разрешимы относительно m из переменных p, например относительно $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Как известно, это равносильно предположению, что якобиан D от $f_1, f_2, \ldots, f_m$ по $p_1, p_2, \ldots, p_m$ не равен тождественно нулю.

Мы хотим доказать, что если соотношения (59), действительно разрешенные относительно $p_1, p_2, \ldots, p_m$, принимают вид

$$p_\alpha = \varphi_\alpha(p_{m+1}, \ldots, p_n;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \quad (59')$$

то из уравнений $(f_r, f_s) = 0$ будут следовать уравнения

$$(p_\alpha - \varphi_\alpha, p_\beta - \varphi_\beta) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m);$$

другими словами, система, после того как она разрешена, продолжает оставаться в инволюции.

Действительно, заметим прежде всего, что если через u обозначить какую-нибудь одну из переменных p, q, которая не была бы

одною из переменных $p_1, p_2, \ldots, p_m$, то из уравнений (59) будут следовать уравнения

$$\frac{\partial f_r}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f_r}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

которые могут быть написаны в виде

$$\frac{\partial f_r}{\partial u} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f_r}{\partial p_\alpha} \frac{\partial (p_\alpha - \varphi_\alpha)}{\partial u} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m);$$

надо заметить, что эти уравнения будут справедливы (они сведутся при этом к обыкновенным тождествам) даже тогда, когда u обозначает одну из первых m переменных p.

Тогда непосредственно будем иметь

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_h} \frac{\partial f_s}{\partial p_h} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} \frac{\partial (p_\alpha - \varphi_\alpha)}{\partial q_h} \frac{\partial (p_\beta - \varphi_\beta)}{\partial p_h} \qquad \begin{matrix} (r, s = 1, 2, \ldots, m; \\ h = 1, 2, \ldots, n); \end{matrix}$$

вычитая почленно аналогичное соотношение, получающееся путем перестановки r и s, а также α и β, и суммируя по индексу h, получим тождества

$$(f_r, f_s) = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}^{m} \frac{\partial f_r}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} (p_\alpha - \varphi_\alpha, p_\beta - \varphi_\beta) \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m).$$

Поэтому из соотношений (59) или из эквивалентных им соотношений (59′) будут следовать тождества вида

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f_r}{\partial p_\alpha} \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} (p_\alpha - \varphi_\alpha, p_\beta - \varphi_\beta) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m),$$

которые, если для краткости положить

$$z_\alpha^{(s)} = \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} (p_\alpha - \varphi_\alpha, p_\beta - \varphi_\beta) \qquad (\alpha, s = 1, 2, \ldots, m),$$

примут вид

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f_r}{\partial p_\alpha} z_\alpha^{(s)} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m).$$

Если из этих m^2 уравнений, вытекающих из соотношений (59), рассматривать только те, в которых s имеет постоянное значение, то

получатся m однородных относительно $z_\alpha^{(s)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ соотношений, определитель которых D, по предположению, отличен от нуля. Мы заключаем, таким образом, что необходимо должно быть

$$z_\alpha^{(s)} = \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} (p_\alpha - \varphi_\alpha, p_\beta - \varphi_\beta) = 0 \qquad (\alpha, s = 1, 2, \ldots, m);$$

достаточно провести аналогичное рассуждение относительно m уравнений, получающихся, если фиксировать α, а s изменять от 1 до m, чтобы заключить, что в силу соотношений (59) и для всевозможных пар индексов α, β от 1 до m будет

$$(p_\alpha - \varphi_\alpha, p_\beta - \varphi_\beta) = 0.$$

30. Применение к каноническим системам. Принимая во внимание общие соображения предыдущих пунктов, обратимся к канонической системе (5) и будем предполагать при этом, что ее характеристическая функция H не зависит от времени t; предположим также, что нам известна какая-нибудь инвариантная система, тоже не зависящая от t,

$$f_r(p \mid q) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m), \tag{59}$$

состоящая из m соотношений, находящихся между собой в инволюции и отличных от $H(p \mid q) = \text{const}$.

Так как $H(p \mid q)$ представляет для системы (5) первый интеграл (п. 4), то на основании следствия из теоремы п. 28, присоединяя к соотношениям (59) условия стационарности функции H, выводимые из соотношения

$$\delta H = 0, \tag{60}$$

мы получим новую инвариантную систему для канонической системы (5). Ранее введенные частные предположения о системе дифференциальных уравнений и об инвариантных соотношениях (каноническая форма и независимость H от t для первых и инволюционный характер для вторых) позволяют здесь добавить, что из условия (60) вытекает в этом случае не более чем $2(n - m)$ различных соотношений между p, q, тогда как в общем случае оно заключало бы в себе $2(n - m)$ таких соотношений.

Доказательство этого утверждения получится особенно просто, если допустить несущественное ограничение, что уравнения (59), по предположению независимые, разрешимы относительно m из величин p, например относительно $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Пусть после выполнения решения уравнения принимают вид

$$p_\alpha - \varphi_\alpha(p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \tag{59'}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m);$$

они и в этой форме будут находиться в инволюции (предыдущий пункт), а если для каких угодно двух функций u, v положим

$$\{u, v\} = \sum_{j=1}^{n-m} \left(\frac{\partial u}{\partial p_{m+j}} \frac{\partial v}{\partial q_{m+j}} - \frac{\partial u}{\partial q_{m+j}} \frac{\partial v}{\partial p_{m+j}} \right),$$

то условия $(p_\alpha - \varphi_\alpha, p_\beta - \varphi_\beta) = 0$, выражающие инволюцию, принимают вид

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\alpha} + \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} \equiv 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m), \tag{61}$$

где знак $\equiv$ показывает, что речь идет о тождестве. Действительно, здесь не нужно принимать во внимание равенства (59′), так как левые части равенств (61) не зависят от p_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$.

Заметив это, выразим, что система (59′) инвариантна относительно системы уравнений (5). Если возьмем полные производные от уравнений (59′) по t и примем во внимание уравнения (5), то придем к условиям

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \{H, \varphi_\alpha\} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_\beta} = 0, \tag{62}$$

которые должны удовлетворяться в силу равенств (61).

Если также и здесь через $\overline{H}$ обозначить функцию H, *приведенную* посредством равенств (59′), то производные от функции $\overline{H}(p_{m+1}, \ldots, p_n | q)$ будут связаны с производными от первоначальной функции H равенствами

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_{m+j}} &= \frac{\partial H}{\partial p_{m+j}} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_{m+j}}, \\ \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_{m+j}} &= \frac{\partial H}{\partial q_{m+j}} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_{m+j}} \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-m); \tag{63}$$

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m). \tag{64}$$

Теперь равенства (63) непосредственно дают

$$\{\overline{H}, \varphi_\alpha\} = \{H, \varphi_\alpha\} - \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m);$$

достаточно сложить по частям эти соотношения с соответствующими соотношениями (64), чтобы получить равенства

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\alpha} + \{\overline{H}, \varphi_\alpha\} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \{H, \varphi_\alpha\} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\left[\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\alpha} - \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}\right]$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

сводящиеся, если принять во внимание соотношения (61), (62), к следующим:

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\alpha} + \{\overline{H}, \varphi_\alpha\} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m). \qquad (65)$$

Эти последние соотношения, которые, будучи не зависимыми от p_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, тождественно удовлетворяются по отношению ко всем аргументам, входящим в них, позволяют доказать наше утверждение.

Действительно, условие (60), имеющее место для всех виртуальных перемещений, удовлетворяющих соотношениям (59′), равносильно уравнению $\delta\overline{H} = 0$, сохраняющему свое значение при произвольных бесконечно малых приращениях его аргументов, т. е. в явной форме равносильно уравнениям

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_{m+j}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_{m+j}} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-m),$$
$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

а эти последние m уравнений в силу равенств (65) являются следствиями первых $2(n-m)$ уравнений.

§ 5. Интегральные инварианты

31. Субстанциальные многообразия. Во многих исследованиях, в частности в небесной механике, наряду с рассмотрением интегралов и инвариантных соотношений, оказывается полезным исследование других образований инвариантного типа относительно любой системы дифференциальных уравнений первого порядка (36). Речь идет о так называемых *интегральных инвариантах*, о которых здесь уместно дать некоторое понятие.

Приведем сначала некоторые вспомогательные соображения. Для обычной системы дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (36)$$