достаточно сложить по частям эти соотношения с соответствующими соотношениями (64), чтобы получить равенства

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\alpha} + \{\overline{H}, \varphi_\alpha\} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \{H, \varphi_\alpha\} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\left[\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\alpha} - \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}\right]$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

сводящиеся, если принять во внимание соотношения (61), (62), к следующим:

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\alpha} + \{\overline{H}, \varphi_\alpha\} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m). \qquad (65)$$

Эти последние соотношения, которые, будучи не зависимыми от p_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, тождественно удовлетворяются по отношению ко всем аргументам, входящим в них, позволяют доказать наше утверждение.

Действительно, условие (60), имеющее место для всех виртуальных перемещений, удовлетворяющих соотношениям (59′), равносильно уравнению $\delta\overline{H} = 0$, сохраняющему свое значение при произвольных бесконечно малых приращениях его аргументов, т. е. в явной форме равносильно уравнениям

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_{m+j}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_{m+j}} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-m),$$
$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

а эти последние m уравнений в силу равенств (65) являются следствиями первых $2(n-m)$ уравнений.

§ 5. Интегральные инварианты

31. Субстанциальные многообразия. Во многих исследованиях, в частности в небесной механике, наряду с рассмотрением интегралов и инвариантных соотношений, оказывается полезным исследование других образований инвариантного типа относительно любой системы дифференциальных уравнений первого порядка (36). Речь идет о так называемых *интегральных инвариантах*, о которых здесь уместно дать некоторое понятие.

Приведем сначала некоторые вспомогательные соображения. Для обычной системы дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (36)$$

в которых функции X удовлетворяют, по крайней мере в некоторой области, обычным условиям правильности, рассмотрим решение

$$x_i = x_i(t \mid x^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (66)$$

где функции x_i в заданный момент t_0 принимают любые n значений x_i^0. Обращаясь к обычному кинематическому истолкованию в n-мерном пространстве S_n переменных x, мы можем сказать, что решения (66) определяют движение точки P, которая, подчиняясь закону скорости, выраженному уравнениями (36), в момент t_0 выходит из положения $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Предположим, что это начальное положение движущейся точки выбирается в некоторой n-мерной области, в которой осуществляются условия, требуемые теоремой существования и единственности интегралов системы (36); предположим, кроме того, что промежуток изменения t выбран так, что указанные только что условия продолжают выполняться.

Рассматривая функциональный определитель от $x_i(t \mid x^0)$ по x^0

$$\mathfrak{D} = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right\| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

примем во внимание, что результат дифференцирования по любому x^0 и подстановки $t = t_0$ не зависит от порядка выполнения этих операций, т. е.,

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}\right)_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial x_j^0}(x_i)_{t=t_0} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда можно заключить, что определитель $\mathfrak{D}$ в начальный момент t_0 принимает значение 1 и потому остается отличным от нуля и положительным во всем промежутке времени, начиная с момента t_0. Если условимся ограничить изменение t этим промежутком, то в нем будет обеспечена непрерывность и одно-однозначность соответствия, которое уравнения (66) определяют между начальными положениями P_0 движущейся точки и положениями, достигаемыми ею в любой момент t; отсюда почти очевидно (можно было бы доказать это и вполне строго), что в пределах указанного выше изменения t всякому многообразию V^0 с каким угодно числом измерений (линия, поверхность и др.) соответствует на основании уравнений (66) в любой момент времени вполне определенное многообразие V с тем же числом измерений — геометрическое место соответствующих положений P движущейся точки, и обратно.

Многообразие V из S_n, которое рассматривается в этом смысле зависящим от t, обыкновенно называется *субстанциальным многообразием*, так как, если представим себе точки S_n материализованными, оно будет во всякий момент состоять из одних и тех же частиц, т. е. из частиц, какие вначале образовывали V^0.

32. Интегральные инварианты порядка, равного порядку системы. Обратимся к частному случаю, когда начальное многообразие образует некоторую область (n-мерную) S^0 пространства S_n и пусть S есть соответствующая область в любой момент t.

Если μ обозначает какую-нибудь правильную функцию от положения и, возможно, от времени, то интеграл

$$I = \int_S \mu \, dS \tag{67}$$

имеет вполне определенный смысл в любой момент времени и потому представляет собой вполне определенную функцию от t, принимающую в начальный момент t_0 значение

$$I_0 = \int_{S^0} \mu_0 \, dS^0.$$

В качестве предварительной формулы найдем производную по t от интеграла I, принимая при этом во внимание уравнения (36).

Если бы при выполнении этого дифференцирования мы исходили непосредственно из выражения (67) интеграла I, то надо было бы принять во внимание, что интегрирование должно быть распространено на область, изменяющуюся вместе с t; поэтому для упрощения вычислений удобно привести область интегрирования к такой области, которая не зависит от времени, выполняя предварительно замену переменных, определяемую равенствами (66).

В силу этого, согласно известному правилу преобразования интегралов по области, получим

$$I = \int_{S^0} \mu \mathfrak{D} \, dS^0, \tag{67'}$$

где вместо $|\mathfrak{D}|$ можно писать прямо $\mathfrak{D}$, потому что этот определитель, как отмечалось в предыдущем пункте, остается положительным во всем рассматриваемом промежутке изменения t.

Так как теперь область интегрирования не зависит от t, то можно применить правило дифференцирования под знаком интеграла, и мы получим

$$\frac{dI}{dt} = \int_{S^0} \frac{d}{dt} (\mu \mathfrak{D}) \, dS^0,$$

где, конечно, полная производная от $\mu\mathfrak{D}$ должна быть взята, принимая во внимание, что x_i зависят от t в силу уравнений (36). Но прежде чем выполнять это дифференцирование, удобно снова перевести последний интеграл из области S^0 в область S, соответствующую любому моменту t, выполняя преобразование переменных,

обратное преобразованию (66). Так как определитель этого преобразования есть $\mathfrak{D}^{-1}$ и потому тоже положителен, то искомую производную можно будет написать в виде

$$\frac{dI}{dt}=\int\limits_S \mathfrak{D}^{-1}\frac{d}{dt}(\mu\mathfrak{D})\,ds; \tag{68}$$

теперь все сведется к нахождению полной производной от определителя $\mathfrak{D}$.

Если, положив

$$\mathfrak{D}=\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0 \end{pmatrix},$$

примем во внимание равенства (36), то по известному правилу дифференцирования определителей будем иметь

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{D}_i,$$

где

$$\mathfrak{D}_i=\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{i-1} X_i x_{i+1} \ldots x_n \\ x_1^0 \ldots x_{i-1}^0 x_i^0 x_{i+1}^0 \ldots x_n^0 \end{pmatrix} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Но так как

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j^0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j^0} \qquad (i,\ j=1, 2, \ldots, n), \tag{69}$$

то достаточно разложить $\mathfrak{D}_i$ в сумму n определителей, соответственно n слагаемым каждого члена (69) из i-ой строки, чтобы получить

$$\mathfrak{D}_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{i-1} x_k x_{i+1} \ldots x_n \\ x_1^0 \ldots x_{i-1}^0 x_i^0 x_{i+1}^0 \ldots x_n^0 \end{pmatrix} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

а так как определитель, который появляется здесь в виде множителя при $\partial X_i/\partial x_k$, равен нулю при $k\neq i$ и совпадает с $\mathfrak{D}$ при $k=i$, то предыдущая формула приводится к следующей:

$$\mathfrak{D}_i=\mathfrak{D}\frac{\partial X_i}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Если обратимся теперь к равенству (68), то найдем

$$\frac{dI}{dt}=\int\limits_S \nu\, dS, \tag{68'}$$

где для краткости положено

$$\nu = \frac{d\mu}{dt} + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu X_i).$$

Заметив это, мы назовем интеграл I типа (67) *интегральным инвариантом* относительно системы дифференциальных уравнений (36), если при изменении t он сохраняет постоянное значение, какова бы ни была область интегрирования в начальный момент t_0 и, следовательно, в любой момент t.

Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, очевидно, чтобы в любой момент было

$$\frac{dI}{dt} = 0,$$

а при заданной произвольности S легко убедиться на основании равенства (68′), что это условие будет выполнено только тогда, когда во всякий момент времени и во всякой точке P области правильности, т. е. при всяком выборе переменных x и t, будем иметь

$$\nu = \frac{d\mu}{dt} + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu X_i) = 0. \tag{70}$$

Действительно, если $\nu = 0$, то в силу равенства (68′) непосредственно имеем $dI/dt = 0$, каково бы ни было S, и, обратно, если эта полная производная тождественно равна нулю, то ν, как непрерывная функция, не может быть отличной от нуля в какой-нибудь точке P и в какой-нибудь момент t, без того чтобы оставаться такой же и с тем же знаком в некоторой окрестности S^* точки P и в некотором промежутке времени, содержащем t; но в таком случае, вопреки предположению, был бы отличен от нуля также и интеграл

$$\int_{S^*} \nu \, dS^*.$$

Из общих теорем существования интегралов уравнений с частными производными следует, что для всякой системы дифференциальных уравнений (36) существует бесконечно много функций μ положения и времени, удовлетворяющих равенству (70). Такие функции называются *множителями* системы (36), потому что по отношению к этой системе они обладают свойствами, аналогичными тем, которые для одного обыкновенного дифференциального уравнения имеет интегрирующий множитель Эйлера. Понятие об этих множителях и название их принадлежит Якоби, который выявил их важность для интегрирования системы (36); мы не будем останавливаться здесь на этом и ограничимся лишь, следуя Пуанкаре[1]), замечанием, что *функция под*

знаком интегрального инварианта порядка, равного порядку системы, является якобиевым множителем и обратно.

В виде непосредственного следствия получим, что для системы (36), для которой имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0,$$

или, как обычно говорят, для *системы* (36) *с нулевой дивергенцией* уравнение (70) множителя удовлетворяется значением $\mu = \text{const}$, откуда вытекает инвариантность интеграла

$$\int_S dS,$$

т. е. инвариантность объема произвольной области S. Так, например, в случае обыкновенного пространства ($n = 3$), если рассматриваются внутри области правильности системы все те точки, которые в момент t_0 заключены в некоторой области S^0 с объемом v_0, то они во всякий другой момент t будут заполнять некоторую область S, которая, вообще говоря, будет иметь другую форму, но сохранит неизменным объем v_0 (движение несжимаемой жидкости).

33. Замечание Лиувилля. Предыдущее следствие находит интересное применение в случае канонической системы (5). Мы имеем здесь систему порядка $2n$, в которой неизвестные функции представляются двумя рядами сопряженных величин p_h, q_h, а соответствующие X определяются выражениями $-\partial H/\partial q_h$, $\partial H/\partial p_h$, так что дивергенция при любом H обращается в нуль. Поэтому при любом движении, определяемом канонической системой, *протяженность* или *объем* в фазовом пространстве p, q будут инвариантными.

Это свойство канонической системы, замеченное Лиувиллем[2]), имеет основное значение в *статистической механике* и в ее при-

---

[1]) Анри Пуанкаре родился в Нанси в 1854 г., умер в Париже в 1912 г. Ограничиваясь здесь механикой (в ее традиционных пределах), отметим, что его Méthodes nouvelles de la mécanique céleste (Париж, т. I (1892), т. II (1893), т. III (1899)) и исследования о фигурах равновесия жидкой вращающейся массы (Acta Math., т. VII, 1885, и Leçons sur les figures d'equilibre..., Париж, 1902) открыли новые горизонты в астрономии и космогонии, позволяя пользоваться более высокими методами современного анализа.

А. Пуанкаре был профессором в Парижском университете, в Политехнической школе и др. и состоял членом Парижской академии наук, а также членом многих других академий.

[2]) Жозеф Лиувилль родился близ Кале в 1809 г., умер в Париже в 1882 г., был профессором в Политехнической школе, в College de France, в Сорбонне и непременным секретарем Академии наук в Париже. Сильный аналист, он известен, помимо замечательных результатов, достигнутых им в аналитической механике, еще и своими исследованиями по арифметике и алгебре, а также благодаря теореме о конформных преобразованиях пространств с $n \geqslant 3$ измерениями. В 1836 г. основал „*Journal de mathématiques pures et appliquées*" и руководил им до 1874 г.

ложениях к кинетической теории газов, к термодинамике и т. д.[1]). Оно имеет особенное значение еще и потому, что, как мы видели в п. 16, объем в фазовом пространстве выражает в некотором роде внутренние свойства канонических переменных, так как он остается неизменным по отношению ко всякому вполне каноническому преобразованию.

34. Линейные интегральные инварианты. Пуанкаре[2]) не ограничился введением интегральных инвариантов типа (67), область интегрирования которых имеет размерность, равную порядку системы; он показал, что полезно ввести в рассмотрение более общие инварианты, определяемые интегралами, распространенными на многообразия с каким угодно числом измерений, меньшим порядка системы (линейные, поверхностные и другие интегралы).

Чтобы показать особенно простой пример таких инвариантов, остановимся на случае (в некотором смысле противоположном рассмотренному в п. 32), в котором многообразие интегрирования имеет наименьшее число измерений, т. е. сводится к линии; точнее, обращаясь исключительно к каноническим системам, докажем, что для всякой такой системы будет инвариантом интеграл

$$J = \int\limits_L \sum_{h=1}^{n} p_h \, dq_h,$$

распространенный на замкнутую линию L фазового пространства и, конечно, субстанциальный в смысле, разъясненном в п. 31. Обычно такой интегральный инвариант называют *относительным*, подчеркивая этим названием то обстоятельство, что его характер инвариантности, по существу, подчинен условию, что линия интегрирования замкнута.

Инвариантность интеграла J устанавливается аналогично тому, как это делалось в случае п. 32, проверкой того, что полная производная dJ/dt будет равна нулю всякий раз, как линия L будет замкнутой. Для этой цели примем прежде всего во внимание, согласно тому, что было отмечено в п. 31, что общее решение канонической системы, которое здесь соответствует уравнениям (66),

$$p_h = p_h(t \mid p^0 \mid q^0), \quad q_h = q_h(t \mid p^0 \mid q^0) \quad (h = 1, 2, \ldots, n) \quad (66'),$$

определяет одно-однозначное соответствие между координатами p, q фазового пространства, относящимися к произвольному моменту t, и их начальными значениями p^0, q^0. При такой одно-однозначности

---

[1]) См. J. H. Jeans, The dynamicat Theory of gases, 2-ое изд., Cambridge Univ. Press, 1921.

[2]) Poincaré, Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Paris, 1899; т. III, гл. XXII — XXV. Картан, Интегральные инварианты, 1940.

линия L будет получаться из вполне определенной линии L_0, геометрического места начальных значений p_0, q_0, которая тоже будет необходимо замкнутой и поэтому доступной для параметрического представления

$$p_h^0 = p_h^0(\sigma), \quad q_h^0 = q_h^0(\sigma) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где, если σ обозначает длину дуги, функции в правых частях будут периодическими с периодом, равным длине s всей линии L_0.

Параметрические уравнения субстанциальной линии L будут получены в функциях от t и параметра σ, если мы в равенства (66′) вместо p^0, q^0 подставим только что указанные их выражения, а интеграл J, который надо распространить на эту линию, по выполнении выкладок представится как вполне определенная функция времени. Таким образом, для вычисления dJ/dt достаточно взять производную под знаком интеграла, принимая во внимание, что так как дифференциалы от q относятся к параметру σ, не зависящему от t, то производная по t от любого dq будет тождественна с соответствующим $d\dot{q}$. Таким образом, получим

$$\frac{dJ}{dt} = \int_L \sum_{h=1}^{n} (\dot{p}_h dq_h + p_h d\dot{q}_h),$$

или, применяя интегрирование по частям и замечая, что вследствие замкнутости линии интегрирования проинтегрированная часть обращается в нуль,

$$\frac{dJ}{dt} = \int_L \sum_{h=1}^{n} (\dot{p}_h dq_h - \dot{q}_h dp_h);$$

теперь достаточно принять во внимание, что p, q удовлетворяют канонической системе (5), чтобы убедиться, что выражение под знаком интеграла тождественно с полным дифференциалом от $-H$ по p, q, т. е. вычисленным в предположении постоянства t. Таким образом, сохраняя все время предположение о замкнутости линии интегрирования, заключаем

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

§ 6. Метод интегрирования Гамильтона — Якоби

35. Общий случай. Выяснив в предыдущих параграфах 3—5 основные понятия об интеграле или инварианте, об инвариантном соотношении и инвариантной системе (соотношений) и об интегральном инварианте, рассмотрим теперь, хотя бы в краткой форме, задачу действительного интегрирования (общего или частного) канонических систем; начнем с классического метода Гамильтона — Якоби, который