линия L будет получаться из вполне определенной линии L_0, геометрического места начальных значений p_0, q_0, которая тоже будет необходимо замкнутой и поэтому доступной для параметрического представления

$$p_h^0 = p_h^0(\sigma), \quad q_h^0 = q_h^0(\sigma) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где, если σ обозначает длину дуги, функции в правых частях будут периодическими с периодом, равным длине s всей линии L_0.

Параметрические уравнения субстанциальной линии L будут получены в функциях от t и параметра σ, если мы в равенства (66′) вместо p^0, q^0 подставим только что указанные их выражения, а интеграл J, который надо распространить на эту линию, по выполнении выкладок представится как вполне определенная функция времени. Таким образом, для вычисления dJ/dt достаточно взять производную под знаком интеграла, принимая во внимание, что так как дифференциалы от q относятся к параметру σ, не зависящему от t, то производная по t от любого dq будет тождественна с соответствующим $d\dot{q}$. Таким образом, получим

$$\frac{dJ}{dt} = \int_L \sum_{h=1}^{n} (\dot{p}_h dq_h + p_h d\dot{q}_h),$$

или, применяя интегрирование по частям и замечая, что вследствие замкнутости линии интегрирования проинтегрированная часть обращается в нуль,

$$\frac{dJ}{dt} = \int_L \sum_{h=1}^{n} (\dot{p}_h dq_h - \dot{q}_h dp_h);$$

теперь достаточно принять во внимание, что p, q удовлетворяют канонической системе (5), чтобы убедиться, что выражение под знаком интеграла тождественно с полным дифференциалом от $-H$ по p, q, т. е. вычисленным в предположении постоянства t. Таким образом, сохраняя все время предположение о замкнутости линии интегрирования, заключаем

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

§ 6. Метод интегрирования Гамильтона — Якоби

35. Общий случай. Выяснив в предыдущих параграфах 3—5 основные понятия об интеграле или инварианте, об инвариантном соотношении и инвариантной системе (соотношений) и об интегральном инварианте, рассмотрим теперь, хотя бы в краткой форме, задачу действительного интегрирования (общего или частного) канонических систем; начнем с классического метода Гамильтона — Якоби, который

еще и сегодня дает все, что является наиболее общим в этом вопросе. Этот метод приводит интегрирование какой угодно канонической системы порядка $2n$ к определению так называемого *полного интеграла* уравнения с частными производными первого порядка (общего вида) с $n+1$ независимыми переменными.

Здесь естественно отметить, что хотя речь идет об определении для этого последнего уравнения только интеграла частного типа, однако этот метод с теоретической точки зрения не представляет собой шага вперед, так как он заменяет задачу, относящуюся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, более сложной с точки зрения анализа задачей, относящейся к уравнению с частными производными. Все же надо отметить, что метод Гамильтона — Якоби имеет большое значение, в частности, в приложениях к небесной механике, благодаря той форме, в которой получается общее решение канонической системы; а с другой стороны, устанавливая совершенную эквивалентность между указанными выше задачами анализа, он дает возможность решить обратную задачу: привести интегрирование какого-нибудь уравнения с частными производными первого порядка к интегрированию соответствующей канонической системы.

Мы, однако, не будем останавливаться здесь на этих, хотя и важных, вопросах анализа; ограничимся лишь установлением прямого предложения.

Итак, пусть дана каноническая система

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_h &= -\frac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \end{aligned}\right\} \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где p в функции H рассматриваются как символы частных производных некоторой неизвестной функции V от q и t, т. е.

$$p_h = \frac{\partial V}{\partial q_h} \qquad (h=1, 2, \ldots, n); \tag{71}$$

рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка (Гамильтона — Якоби) относительно неизвестной функции V

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0. \tag{72}$$

Как известно, полным интегралом уравнения (72) называется всякая функция V от q, t и от n произвольных постоянных π_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$, которая обладает следующими двумя свойствами: а) содержит n постоянных π существенным образом; этим мы хотим сказать, что не будет тождественно равен нулю смешанный функциональный определитель

$$\nabla = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial \pi_i} \right\| \qquad (h,\ i=1, 2, \ldots, n); \tag{73}$$

б) тождественно удовлетворяет уравнению (72) относительно q, t, π, т. е. при всяком возможном выборе значений этих переменных внутри некоторой области.

Мы утверждаем, что знание одного такого полного интеграла V позволяет построить в конечной форме общее решение данной канонической системы (5): если мы введем n новых аргументов $\varkappa$ посредством равенств

$$\varkappa_j = \frac{\partial V}{\partial \pi_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (74)$$

и будем рассматривать равенства (71), (74) как уравнения для определения $2n$ переменных p, q через t и π, $\varkappa$ (что, конечно, можно сделать в силу предположения $\nabla \neq 0$, ср. п. 11), то $2n$ функций

$$\left.\begin{aligned} p_h &= p_h(\pi \mid \varkappa \mid t), \\ q_h &= q_h(\pi \mid \varkappa \mid t) \end{aligned}\right\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (75)$$

определенных таким образом, дадут общее решение канонической системы (5), если только π, $\varkappa$ будут считаться в нем произвольными постоянными.

Для доказательства этого достаточно вспомнить заключения п. 11, из которых следует, что равенства (75), если их рассматривать как формулы преобразования, зависящие от t, переменных p, q в переменные π, $\varkappa$, определят каноническое преобразование и что характеристическая функция преобразованной канонической системы уравнений (5) определится выражением

$$H + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Так как здесь на основании предположения, что V есть интеграл (полный) уравнения (72), эта характеристическая функция тождественно равна нулю, то преобразованная каноническая система, принимающая в данном случае вид $\dot{\pi}_h = 0$, $\dot{\varkappa}_h = 0$, будет иметь общим интегралом $\pi_h = \text{const}$, $\varkappa_h = \text{const}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, откуда, возвращаясь к первоначальной системе (5), мы и заключаем, что ее общий интеграл определяется уравнениями (75) или эквивалентными им уравнениями (71), (74), если π, $\varkappa$ рассматриваются в них как произвольные постоянные.

Существенное достоинство этого метода интегрирования заключается в той его особенности, что выражения (71), (74) или (75) для общего решения автоматически вводят произвольные постоянные π, $\varkappa$ в канонической форме, в том смысле, что зависимости, которые они устанавливают между p, q и π, $\varkappa$, образуют каноническое преобразование.

Наконец, нужно добавить, что, каков бы ни был принятый метод интегрирования, выражения общего решения

$$p_h = p_h(t \mid p^0 \mid q^0), \quad q_h = q_h(t \mid p^0 \mid q^0), \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \quad (76)$$

в которых за постоянные интегрирования приняты координаты p^0, q^0 начальной фазы, всегда определяют между величинами p^0, q^0 и p, q преобразование (вполне) каноническое (поскольку t рассматривается в них как произвольный параметр).

Действительно, всегда можно предположить, что предыдущие формулы получены путем исключения π, $\varkappa$ из уравнений (75) и из уравнений того же вида, относящихся к моменту t_0,

$$\left.\begin{aligned} p_h^0 &= p_h(\pi \mid \varkappa \mid t_0), \\ q_h^0 &= q_h(\pi \mid \varkappa \mid t_0). \end{aligned}\right\} \tag{75'}$$

Теперь в силу равенств (75), (75′) имеем

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\,dq_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h\,d\varkappa_h - \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + d\left(V - \sum_{h=1}^{n} \varkappa_h \pi_h\right),$$

$$\sum_{h=1}^{n} p_h^0\,dq_h^0 = \sum_{h=1}^{n} \pi_h\,d\varkappa_h - \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{t=t_0} dt_0 + d\left(V_0 - \sum_{h=1}^{n} \varkappa_h \pi_h\right);$$

достаточно рассматривать t и t_0 как постоянные параметры и вычесть эти равенства почленно, чтобы получить тождество

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\,dq_h = \sum_{h=1}^{n} p_h^0\,dq_h^0 + d\,(V - V_0),$$

что и доказывает утверждение, как это следует из п. 11.

36. О теореме взаимности Гельмгольца[1]). Из последнего замечания предыдущего пункта почти непосредственно вытекают некоторые интересные механические следствия.

---

[1]) Герман Гельмгольц родился в Потсдаме в 1821 г., умер в 1894 г. в Берлине, начал свою карьеру военным врачом. В 1847 г., будучи еще врачом, он прочитал в Берлинском обществе (основанном за два года до этого) свой знаменитый мемуар Über die Erhaltung der Kraft, в котором впервые дается энергетическая формулировка интеграла живых сил с распространением принципа сохранения энергии на все другие виды явлений природы. (Попутно заметим, что в 1842 г. эквивалентность между теплотой и работой была установлена Р. Майером и экспериментально подтверждена Джоулем.)

Исключительные заслуги молодого врача были признаны благодаря влиянию А. Гумбольдта. В 1849 г. он был приглашен преподавать анатомию и физиологию в Кенигсберг, затем в Бонн и Гейдельберг, где с 1858 по 1871 г. его многообразная научная деятельность достигла наивысшего развития. В 1871 г. был приглашен в Берлин, где с 1874 г. состоял президентом Немецкого физико-технического общества.

В области механики его наиболее известные исследования относятся к гидро- и аэродинамике (теория вихрей, жидких струй, атмосферной циркуляции, звуковых колебаний в органных трубах). Ученые мемуары были собраны им самим в три тома (Leipzig, 1882—1885); два других тома содержат публичные лекции и популярные статьи. Заботами его учеников был опубликован в шести томах целый цикл лекций по математической физике, читанных им в Берлине.

Возьмем снова для канонической системы (5) уравнения общего решения (76), которые мы перепишем здесь, выставляя в правых частях на вид также и начальное значение t_0 независимой переменной:

$$p_h = p_h(t \mid p^0 \mid q^0 \mid t_0), \quad q_h = q_h(t \mid p^0 \mid q^0 \mid t_0) \quad (h = 1, 2, \ldots, n). \quad (76')$$

Если в промежутке изменения t, в котором сохраняют свое значение эти уравнения (76′), мы фиксируем какой-нибудь момент (отличный от t_0), который обозначим через t и назовем *конечным моментом*, то уравнения (76′) при таких значениях t_0 и t определят, по крайней мере, в некоторой области одно-однозначное соответствие между координатами p^0, q^0 начальной фазы и p, q конечной фазы. Это соответствие, как мы только что видели, образует каноническое преобразование между двумя рядами переменных.

Отвлекаясь временно от этого последнего обстоятельства, заметим, что характер одно-однозначности соответствия обеспечивает на основании теоремы о единственности интеграла то, что для определения решения гамильтоновой системы достаточно будет фиксировать безразлично или начальные значения p^0, q^0 (т. е. значения в момент t_0), или конечные значения p, q (т. е. значения в момент t).

Установив это, рассмотрим любое частное решение, определенное, например, путем фиксирования начальных значений p^0, q^0. Обращаясь к представлениям решений в фазовом пространстве Φ_{2n}, сравним соответствующее движение M с двумя другими движениями M', M'', тоже определяемыми гамильтоновой системой (5) и бесконечно близкими к M, т. е., как обычно говорят, с двумя *варьированными движениями* (по отношению к M). Если через $p^0 + \delta' p^0$, $q^0 + \delta' q^0$ и $p + \delta' p$, $q + \delta' q$ обозначим начальные и соответственно конечные импульсы и координаты в M', а через $p^0 + \delta'' p^0$, $q^0 + \delta'' q^0$ и $p + \delta'' p$, $q + \delta'' q$ — аналогичные начальные и конечные значения в M'', то каждое из этих двух варьированных движений можно определить независимо от другого; если фиксировать произвольно бесконечно малые приращения обобщенных координат q и обобщенных импульсов p для движения H, относящиеся к начальному (δq^0 и δp^0) или к конечному (δq и δp) моменту времени, то на основании уравнений (76′) можно однозначно определить соответствующие бесконечно малые приращения соответственно для начального или конечного момента.

Теперь вспомним, что уравнения (76′) при заданных значениях t_0 и t определяют между p^0, q^0 и p, q каноническое преобразование. Это значит, как это напоминалось также и в конце предыдущего пункта, что два пфаффиана

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \, dq_h, \quad \sum_{h=1}^{n} p_h^0 \, dq_h^0,$$

вычисленные для бесконечно малых приращений координат (начальных и конечных), которые позволяют перейти от любого движения M к какому-нибудь движению, варьированному по отношению к нему,

различаются между собой в силу уравнений (76′) только на полный дифференциал. Отсюда следует, что соответствующие билинейные коварианты (п. 9 и гл. V, п. 57), вычисленные для двух независимых систем бесконечно малых приращений, позволяющих перейти от движения M к двум каким угодно варьированным движениям, в силу уравнений (76′) будут тождественны между собой; поэтому, вводя вариации δ' и δ'', определяющие переход от M к двум варьированным движениям M' и M'', мы получим тождество

$$\sum_{h=1}^{n} (\delta'' p_h \delta' q_h - \delta' p_h \delta'' q_h) = \sum_{h=1}^{n} (\delta'' p_h^0 \delta' q_h^0 - \delta' p_h^0 \delta'' q_h^0). \qquad (77)$$

Это и есть соотношение взаимности, полученное Гельмгольцем *) и выведенное здесь при более общих предположениях. Но чтобы извлечь из него какие-нибудь определенные и наглядные заключения, необходимо выбрать соответствующим образом варьированные движения M' и M''.

Предположим, например, что движение M' определено по отношению к движению M путем приравнивания нулю всех начальных приращений $\delta' p^0$, $\delta' q^0$, кроме одного; пусть таким приращением будет $\delta' q_i^0$. Тем самым из уравнений (76′) однозначно определятся все конечные приращения $\delta' p$, $\delta' q$. Для движения M'', наоборот, положим равными нулю все конечные приращения $\delta'' p$, $\delta'' q$, за исключением приращения $\delta'' p_j$; и в этом случае из уравнений (76′) определятся все $\delta'' p^0$, $\delta'' q^0$. При указанных здесь предположениях тождество (77) примет вид

$$\delta'' p_j \delta' q_j = \delta'' p_i^0 \delta' q_i^0,$$

откуда, в частности, следует, что если два произвольных приращения $\delta' q_i^0$, $\delta'' p_j$, определяющих два варьированных движения M', M'', берутся равными, то такими же будут и определяемые ими вариации $\delta' q_j$, $\delta'' p_i^0$. Таким образом, *если два варьированных движения получаются из одного и того же движения, одно исключительно путем варьирования начального значения одной координаты, другое исключительно путем варьирования конечного значения одного количества движения, и если обе эти вариации равны между собой, то будут также равны и определяемые ими вариации, соответственно конечная и начальная, координаты, сопряженной с варьированным количеством движения, и количества движения, сопряженного с варьированной координатой.*

Таким образом мы имеем одну из так называемых *теорем взаимности Гельмгольца*; ясно, что к другим аналогичным теоремам

*) Это соотношение значительно раньше использовано Остроградским для вывода всех теорем механики. См. Жуковский Н. Е., Ученые труды М. В. Остроградского по механике, Полное собрание сочинений, т. IX, 1937. (*Прим. ред.*)

(с возможным изменением знака) мы придем, предполагая при переходе от M к M' и M'' варьирование или двух координат, или двух количеств движения вместо одной координаты и одного количества движения.

Гельмгольц указал такие физически интересные задачи, в которых эти теоремы находят применение, и показал, что вариации, о которых мы говорили выше чисто теоретически, могут быть действительно осуществлены посредством малых позиционных возмущений, если речь идет о координатах, или посредством малых импульсов, если речь идет о количествах движения.

37. Общий интеграл в динамическом случае. Вернемся временно к общим рассуждениям п. 35. В особенно интересном случае, когда каноническая система, которую надо интегрировать, вытекает из динамической задачи о движении голономной системы, в которой параметры q являются лагранжевыми координатами, основной целью будет определение изменения координат q в функциях от t и постоянных интегрирования.

Следует отметить, что для этой цели достаточно только n уравнений (74) и нет нужды присоединять к ним уравнения (71), характеризующие только закон изменения с временем количеств движения, имеющих вспомогательный характер в первоначальной постановке задачи.

С этим согласуется положение, заключающееся в том, что, найдя полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, соответствующий динамической задаче (консервативной), можно найти общее решение уравнений движения Лагранжа из равенств

$$x_i = \frac{\partial V}{\partial \pi_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{74}$$

38. Случай характеристической функции, не зависящей от времени. При этом предположении для уравнения Гамильтона—Якоби можно искать полный интеграл в виде

$$V = -Et + W, \tag{78}$$

где E есть постоянная, которую мы будем выбирать надлежащим образом, и W — неизвестная функция, зависящая только от q и n постоянных $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ и не зависящая от t.

Уравнение (72) принимает вид

$$H = E \tag{72'}$$

в том предположении, конечно, что в H вместо p подставлены выражения (71), которые в данном случае имеют вид

$$p_h = \frac{\partial W}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n); \tag{71'}$$

условие того, чтобы функция была полным интегралом ($\nabla \neq 0$), выразится в том, что смешанный функциональный определитель ∇_1 от

функции W по q_h, π_j не должен обращаться в нуль. Если примем во внимание, что постоянная E произвольна, то увидим, что, по существу, все сводится к отысканию интеграла $W(q, \pi)$ (удовлетворяющего условию $\nabla_1 \neq 0$) дифференциального уравнения с частными производными

$$H = \text{const}, \tag{72''}$$

где правая часть представляет постоянную относительно переменных q и t, т. е. некоторую функцию от π, которую надо принять за выражение коэффициента E при t в функции V.

После определения такого полного интеграла W уравнения (72″) общее решение (74) канонической системы на основании выражения (78) функции V можно написать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \pi_j} = \omega_j t + \varkappa_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{74'}$$

где для краткости положено

$$\omega_j = \frac{\partial E}{\partial \pi_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots n). \tag{79}$$

Предыдущее приведение задачи, которым пользовался Пуанкаре, симметрично относительно постоянных π. Якоби, наоборот, выделял одну из постоянных π, например π_n, принимая ее прямо за E; вследствие этого функцию W в уравнении (78) надо рассматривать как неизвестную функцию, которая не зависит от t, а зависит только от q, E и остальных $n-1$ произвольных постоянных $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}$.

В этом случае условие того, чтобы функция V была полным интегралом, может быть упрощено, по крайней мере в предположении, очевидно, выполняющемся всякий раз, когда мы имеем динамическую задачу, что какое-нубудь p, например p_n, действительно входит в H[1]). Положив

$$\nabla' = \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial \pi_j} \right\| \qquad (h, j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

можно написать смешанный функциональный определитель функции V в виде

$$\nabla = \frac{1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_n}} \begin{vmatrix} & & & \dfrac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial E} \\ & \nabla' & & \dfrac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial E} \\ & & & \vdots \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\dfrac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \pi_1} & \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\dfrac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \pi_2} & \cdots & \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\dfrac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial E} \end{vmatrix};$$

[1]) Частный случай, когда H не зависит от всех p, не представляет интереса, так как в этом предположении каноническая система (5) непосредственно интегрируется, поскольку из второй группы n уравнений следует $q_h = \text{const}$, а первая дает $\dot{p}_h = \text{const}$, так что p будут линейными функциями с постоянными (произвольными) коэффициентами при t.

прибавляя к элементам последней строки соответствующие элементы из первых $n-1$ строк, умноженные соответственно на $\partial H/\partial p_1, \ldots, \partial H/\partial p_{n-1}$, получим

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial \pi_j} \quad (j=1, 2, \ldots, n-1), \qquad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial E},$$

или на основании уравнений (71′)

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial \pi_j} \quad (j=1, 2, \ldots, n-1), \qquad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial E}.$$

Далее, уравнение (72′), так как оно тождественно удовлетворяется по отношению к аргументам π, E и потому может быть продифференцировано по каждому из них, показывает, что первые $n-1$ элементов этой строки исчезают, а последний равен 1. Поэтому определитель ∇ можно написать в виде

$$\nabla = \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} \nabla',$$

и искомое условие приводится к неравенству

$$\nabla' \neq 0.$$

В этом предположении общее решение канонической системы, как и в общем случае, определяется уравнениями (71), (74); полезно переписать эти уравнения, подставляя в них W вместо V и E вместо π_n.

Что касается уравнений (71), то в них остается только подставить вместо V' его выражение (78), вследствие чего снова найдем написанные выше уравнения (71′); первые $n-1$ из уравнений (74) дадут аналогично

$$\varkappa_j = \frac{\partial W}{\partial \pi_j} \quad (j=1, 2, \ldots, (n-1), \tag{74а}$$

а последнее, если обозначить в нем через $-t_0$ произвольную постоянную $\varkappa_n$, даст

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial E}. \tag{74б}$$

Как и в общем случае, уравнения (74а), (74б), конечно, будут разрешимы относительно q (в функциях от t и от π, E, $\varkappa$, t_0); но здесь мы можем добавить, что при наличии t только в уравнениях (74б) $n-1$ уравнений (74а), рассматриваемые отдельно, определят в изображающем пространстве лагранжевых координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ траектории системы. Так как они тождественно удовлетворяют уравнению (72′), не зависящему от t, то мы видим, что E есть постоянная

величина, которая для любого решения равна значению H вдоль соответствующей траектории; поэтому в динамических случаях постоянная E истолковывается как *полная энергия*.

39. Прямая проверка предыдущих результатов. Результаты, относящиеся к характеристической функции H, не зависящей от t, были выведены в предыдущем пункте как следствия из результатов, полученных в п. 35 при более общем предположении, что функция H зависит явно от t; мы пришли к правилу для определения общего решения канонической системы, вводя только полный интеграл W (с гессианом, не равным нулю) уравнения $H=E$, в которое t не входит. Представляет интерес найти снова эти результаты прямым путем, аналогичным тому, который был использован в п. 35 для общего случая, т. е. обращаясь к каноническому преобразованию, которое в этом случае не будет зависеть от t и потому будет вполне каноническим.

Для этой цели возьмем снова уравнение с частными производными

$$H=\text{const}, \tag{72''}$$

где в H вместо p_h подставлены $\partial W/\partial q_h$, а через W обозначен полный интеграл, зависящий, помимо q, от произвольных постоянных π, таких, что его функциональный определитель ∇_1 (по q и π) не обращается тождественно в нуль в рассматриваемой области. После подстановки в уравнения (72″) производных $\partial W/\partial q_h$ постоянная, стоящая в правой части, будет равна определенной функции от произвольных постоянных π, которую мы обозначим через E.

Далее, предполагая, что $\nabla_1 \neq 0$, найдем, что две системы уравнений

$$p_h=\frac{\partial W}{\partial q_h}, \quad \xi_h=\frac{\partial W}{\partial \pi_h} \qquad (h=1, 2, \ldots, n) \tag{80}$$

определяют на основании п. 12 вполне каноническое преобразование между двумя парами рядов сопряженных переменных

$$\begin{pmatrix} p_1 p_2 \ldots p_n \\ q_1 q_2 \ldots q_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_n \\ \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \end{pmatrix};$$

для того чтобы иметь прямое доказательство теоремы Гамильтона — Якоби для нашего случая, остается только выполнить это преобразование над данной канонической системой. Так как речь идет о вполне каноническом преобразовании, то новая характеристическая функция получится преобразованием функции $H(p, q)$, а для того чтобы вычислить эту преобразованную функцию, достаточно принять во внимание первые n из уравнений (80), так что после выполнения преобразования мы увидим, как это отмечалось с самого начала, что новая характеристическая функция будет как раз равна E, если ее рассматривать

как функцию от $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$. Таким образом, доказано, что преобразованная каноническая система будет иметь вид

$$\dot{\pi}_h = -\frac{\partial E}{\partial \xi_h}, \quad \dot{\xi} = \frac{\partial E}{\partial \pi_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

или, вспоминая, что E не зависит от ξ, и обозначая через ω_h производную $\partial E/\partial \pi_h$ (зависящую от одних только π),

$$\dot{\pi}_h = 0, \quad \dot{\xi}_h = \omega_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как общим интегралом этой системы будет

$$\pi_h = \text{const}, \quad \xi_h = \omega_h t + \varkappa_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \quad (81)$$

где $\varkappa_h$ обозначают n новых произвольных постоянных, то заключаем, точно так же как и в п. 35, что общее решение первоначальной канонической системы определяется равенствами

$$p_h = \frac{\partial W}{\partial q_h}, \quad \omega_h t + \varkappa_h = \frac{\partial W}{\partial \pi_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

при условии, что π_h и $\varkappa_h$ рассматриваются как произвольные постоянные, а ω_h выражены через π_h посредством уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial \pi_h} = \omega_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Все это имеет место в случае симметричного представления Пуанкаре. Если же, наоборот, мы выделяем один из аргументов π, например π_n, полагая его прямо равным E (как поступал Якоби), то величины $\omega_1 = \partial E/\partial \pi_1, \ldots, \omega_{n-1} = \partial E/\partial \pi_{n-1}$ исчезают, так что на основании уравнений (81) вместе с π постоянными будут также и $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, тождественные с $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$; последняя сопряженная пара состоит из $E = \pi_n$ и $\xi_n = t - t_0$, где через $-t_0$ обозначена постоянная $\varkappa_n$.

Мы имеем, таким образом, полное согласие с предыдущим пунктом. Здесь мы можем добавить, что вместо последних двух сопряженных переменных, E и $t - t_0$, можно подставить, как это указывалось в п. 14, две их канонические комбинации:

$$L = \frac{E}{n}, \quad l = n(t - t_0),$$

где n есть произвольно заданная постоянная; предполагая, что в функцию W введена функция L, и представляя уравнения (80) согласно постановке Якоби, мы заключаем, что (вполне) каноническое преобразование между p, q и двумя рядами сопряженных переменных

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_{n-1} & L \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 & \ldots & \varkappa_{n-1} & l \end{pmatrix}$$

определяется уравнениями

$$p_h = \frac{\partial W}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\varkappa_j = \frac{\partial W}{\partial \pi_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad l = \frac{\partial W}{\partial L}.$$

40. Вывод инвариантных соотношений для одного частного интеграла уравнений Гамильтона — Якоби. Если для уравнения с частными производными

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0 \tag{72}$$

мы знаем одно частное решение $V(q|t)$, не зависящее от какой-либо произвольной постоянной (или даже заключающее некоторые такие постоянные, но не являющееся полным интегралом), то выводы п. 36, на основании которых было получено общее решение канонической системы (5), будут, конечно, неприложимы. Однако, как мы это сейчас докажем, из известного решения $V(q|t)$ можно вывести систему n инвариантных соотношений относительно системы (5), т. е. n уравнений

$$p_h = \frac{\partial V}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{71}$$

Для этого, как мы знаем, необходимо показать, что производные по t от этих уравнений сводятся к тождествам в силу канонической системы и самих этих уравнений.

Напомним сначала, что решение V удовлетворяет уравнению (72), так как в $H(p|q|t)$ вместо каждого p_h подставляется соответствующая производная $\partial V/\partial q_h$, так что, дифференцируя уравнение (72) по отдельным q, мы придем к n тождествам

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial q_h} + \frac{\partial H}{\partial q_h} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial q_h\, \partial q_k} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{82}$$

Если теперь продифференцировать уравнения (71) по t и вместо $\dot{p}$, $\dot{q}$ подставить их выражения, даваемые канонической системой, то получатся равенства

$$-\frac{\partial H}{\partial q_h} = \frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial q_h} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial q_h\, \partial q_k} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

которые в силу равенств (82) удовлетворяются тождественно.