§ 7. Понижение порядка при наличии известных интегралов

41. Общие соображения. Если задана система (нормальная) обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x|t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (36)$$

то наличие некоторого числа интегралов позволяет, как на это уже указывалось (гл. II, п. 1) в случае уравнений движения одной свободной точки, понизить порядок системы. Действительно, если известны m независимых между собой интегралов, то из них можно получить выражение для m неизвестных, например для $x_1, x_2, \ldots, x_m$, в функциях от остальных неизвестных и от m произвольных постоянных, после чего, подставляя вместо этих $x_1, x_2, \ldots, x_m$ их выражения в остальные $n-m$ уравнений (36), мы получим *приведенную систему* порядка $n-m$

$$\frac{dx_{m+j}}{dt} = \overline{X}_{m+j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-m),$$

где функции $\overline{X}$ получаются из первоначальных функций X посредством указанной подстановки и зависят только от $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ и, конечно, от m произвольных постоянных известных интегралов. Если мы примем во внимание, что интегрирование приведенной системы введет $n-m$ произвольных постоянных, то увидим, что, присоединяя к общему интегралу этой системы m известных интегралов системы (36), мы придем к ее общему решению, так что можно сказать, что наличие m независимых интегралов допускает понижение на m единиц порядка операций интегрирования.

Необходимо отметить, что если для данной системы известны не первые интегралы, а только m инвариантных соотношений, независимых между собой, то из них можно получить выражения для m из неизвестных x и, как и выше, исключить эти m неизвестных из последних $n-m$ уравнений (36); но приведенная система (36), которая таким образом получится, не будет содержать в себе произвольных постоянных, так что интегрирование этой системы порядка $n-m$ даст уже не общий интеграл данной системы, а только некоторый класс ∞^{n-m} решений, т. е. именно тех решений, которые удовлетворяют указанным инвариантным соотношениям.

В ближайших пунктах мы будем применять эти соображения к каноническим системам, главным образом для того, чтобы выявить наибольшее число приведений, которые допускаются частным видом таких систем по сравнению с системами общего вида.

42. Элементарный случай понижения ранга канонических систем. Предположим, что каноническая система (5) имеет m *игнорируемых* координат, т. е. соответствующая характеристическая функция H

не зависит от m из q координат, например от $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Тогда мы будем иметь m интегралов обобщенных количеств движения

$$p_r = \text{const} = p_r^0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \quad (83)$$

равносильных m уравнениям $\dot{p}_r = 0$ канонической системы. Остальные $2n - m$ уравнений можно разделить на две группы: первую, состоящую из $2(n - m)$ уравнений

$$\dot{p}_{m+j} = -\frac{\partial H}{\partial q_{m+j}}, \quad \dot{q}_{m+j} = \frac{\partial H}{\partial p_{m+j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-m), \quad (5_a)$$

и вторую — из остальных m уравнений

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \quad (5_б)$$

Если примем во внимание уравнения (83) и то обстоятельство, что H не зависит от $q_1, q_2, \ldots, q_m$, то увидим, что уравнения (5_a) составляют каноническую систему относительно одних только переменных p_{m+j}, q_{m+j} $(j = 1, 2, \ldots, n - m)$, содержащую в виде параметров m постоянных p_r^0; после того как для этой системы определится ее общее решение, зависящее, помимо p_r^0, и от остальных $2(n - m)$ произвольных постоянных, правые части уравнений ($5_б$), при помощи подстановки этого решения и интегралов (83), приведутся к известным функциям от одного только переменного t (и от $2n - m$ введенных произвольных постоянных), так что остальные неизвестные функции q_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ получатся посредством m квадратур, которые введут m остальных произвольных постоянных.

Таким образом, наличие m интегралов (83) дает возможность понизить порядок канонической системы на $2m$ единиц, а не на m, как это было в общем случае.

43. Понижение порядка канонической системы при помощи интеграла энергии. Другой замечательный случай приводимости канонических систем мы будем иметь, когда характеристическая функция H не зависит явно от t и поэтому, как мы знаем из п. 4, существует интеграл энергии

$$H = \text{const} = E. \quad (6)$$

Таким образом, при наличии интеграла (6) *интегрирование канонической системы* (5) *порядка* $2n$ *можно свести к интегрированию другой системы, тоже канонической, порядка* $2(n - 1)$ *и к последующей квадратуре.*

Действительно, заметим прежде всего, что если исключить возможные статические решения (в которых все p и q остаются постоянными), то для всякого другого решения с заданной канонической системы, по крайней мере, один из аргументов p и q действительно

зависит от t; если таким аргументом является, например, q_n, то всегда можно будет для t определить промежуток изменения, в котором производная $\dot{q}_n = dq_n/dt$ будет оставаться отличной от нуля.

В таком промежутке времени рассматриваемое решение σ определяет между t и q_n одно-однозначное соответствие, так что за независимое переменное можно будет принять q_n вместо t.

С другой стороны, в силу последнего из уравнений (5) вместе с производной $\dot{q}_n$, отличной от нуля в этом промежутке, надо принять отличной от нуля и производную $\partial H/\partial p_n$, так что интеграл (6) можно разрешить относительно p_n в виде

$$p_n = K(p_1, \ldots, p_{n-1};\ q_1, \ldots, q_n, E). \tag{6'}$$

Заметив это, разделим почленно первые $2(n-1)$ уравнений (5) на последнее

$$\frac{\partial q_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n}; \tag{84}$$

принимая во внимание, что на основании уравнения (6)

$$\frac{\partial K}{\partial u} = -\frac{\partial H}{\partial u} : \frac{\partial H}{\partial p_n},$$

где u — один из аргументов

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, q_1, q_2, \ldots, q_n,$$

придем к уравнениям

$$\frac{dq_h}{dq_n} = -\frac{\partial K}{\partial p_h}, \quad \frac{dp_h}{dq_n} = \frac{\partial K}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{85}$$

образующим каноническую систему с $2(n-1)$ неизвестными функциями p_h, q_h $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ от q_n, характеристическая функция которой K, помимо этих $2(n-1)$ аргументов, зависит еще от нового независимого переменного q_n (и от произвольной постоянной E).

Теперь легко убедиться, что, после того как будет проинтегрирована система (85) порядка $2(n-1)$, достаточно одной квадратуры для того, чтобы получить решение первоначальной системы (5). Действительно, интегралы системы (85) позволят выразить p_h, q_h при $h = 1, 2, \ldots, n-1$ в функциях от q_n и от $2(n-1)$ постоянных интегрирования, кроме E, которое входит явно в виде параметра в K; с другой стороны, сама функция K, когда в нее вместо $2(n-1)$ аргументов p_h, q_h подставляют только что указанные выражения, на основании равенств (6') дает p_n, так что тем самым в фазовом пространстве Φ_{2n} будут определены ∞^{2n-1} траекторий любого движения, определяемого системой (5). Поэтому остается только определить закон движения, для чего достаточно обратиться к уравнению (84), которым мы уже

пользовались для исключения t из системы (5). Если напишем это уравнение в виде

$$dt = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}$$

и заметим, что правую часть можно выразить в функции от q_n (и от $2n-1$ введенных до сих пор произвольных постоянных), то увидим, что интегрирование задачи дополнится еще одной квадратурой, которая введет последнюю произвольную постоянную.

44. Теоремы С. Ли и Лиувилля. Результаты, полученные в двух предыдущих пунктах, являются частными случаями основной теоремы теории канонических систем, которая формулируется следующим образом (теорема С. Ли): *если для канонической системы порядка $2n$ известны m интегралов, независимых между собой, находящихся в инволюции* и разрешимых относительно стольких же переменных p, то *ранг системы, от которого зависит определение общего решения, понижается на $2m$ единиц (вместо m) и интегрирование данной системы сводится к интегрированию другой системы, тоже канонической, с $n-m$ парами сопряженных переменных.*

С точки зрения применения к конкретным задачам особую важность имеет случай, когда $m=n$, или случай, когда интегрирование канонической системы может быть сведено к операции нулевого порядка, т. е. к конечным операциям и к квадратурам. Мы ограничимся здесь доказательством теоремы С. Ли для этого частного случая, который известен под названием случая Лиувилля [1]) *).

При доказательстве существенным образом будем опираться на метод интегрирования Гамильтона — Якоби, а именно на результат п. 35, согласно которому, чтобы иметь интеграл канонической системы (5) в конечном виде, достаточно получить полный интеграл V уравнения с частными производными

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0. \tag{72}$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что наличие n интегралов системы (5)

$$f_r(p \mid q \mid t) = \text{const} = \pi_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{86}$$

---

[1]) Доказательство теоремы С. Ли в общем случае см., например, Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre; 2-ое изд.; Paris, 1921, гл. VIII.

*) Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка, 1934 г.; Имшенецкий В. Г., Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков, 1916 г. (*Прим. ред.*)

независимых между собой, находящихся в инволюции и разрешимых относительно n переменных p, позволяет определить посредством одних только квадратур полный интеграл $V(q \mid \pi \mid t)$ уравнения (72).

Для этой цели напишем уравнения, выражающие предположения о том, что функции f_r являются интегралами уравнений (5) и находятся между собой в инволюции. Первое предположение (п. 21) выразится уравнениями

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} + (H, f_r) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{87}$$

а инволюционный характер интегралов f_r выразится уравнениями

$$(f_r, f_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n), \tag{88}$$

которые здесь, в отличие от того, что мы имеем для инвариантных соотношений, будут существовать сами по себе, т. е. независимо от уравнений (86), так как они должны иметь место при всяком выборе постоянных π_r.

Эти две группы условий (87), (88) формально можно выразить одной схемой, если наряду с p_h, q_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ мы введем еще одну пару сопряженных переменных p_0, $q_0 = t$, где p_0 обозначает вспомогательный аргумент, который не входит ни в H, ни в одну из f, и если для какой-нибудь пары функций u, v от двух сопряженных рядов переменных

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_0 = t & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \tag{89}$$

обозначим через (u, v) скобки Пуассона относительно этих переменных.

Тогда, сохраняя обычное обозначение (u, v) для скобок Пуассона относительно первоначальных переменных p, q, будем иметь

$$(u, v) = \frac{\partial u}{\partial p_0}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial p_0} + (u, v);$$

отсюда следует, в частности, что если обе функции u, v не зависят от p_0, то скобки ( ) будут тождественны с обычными круглыми скобками, и что

$$(p_0 + H, f_r) = \frac{\partial f_r}{\partial t} + (H, f_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Мы видим, таким образом, что равенства (87), (88) можно написать соответственно в виде

$$(p_0 + H, f_r) = 0, \qquad (f_r, f_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. наши предположения можно выразить, говоря, что $n+1$ функций f_r и $p_0 + H$ находятся попарно в инволюции относительно двух рядов (89) сопряженных переменных.

С другой стороны, $n+1$ уравнений $f_r=\pi_r$, $p_0+H=0$ разрешимы относительно $p_0, p_1, \ldots, p_n$, так как первые n уравнений предполагаются в свою очередь разрешимыми относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, после чего уравнение $p_0+H=0$, если воспользоваться полученными таким образом выражениями для $p_1, p_2, \ldots, p_n$, даст выражение для p_0 через q, t и π.

Если мы напишем найденные таким образом решения в виде

$$p_r-\varphi_r(q\,|\,\pi\,|\,t)=0 \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{86'}$$
$$p_0-\varphi_0(q\,|\,\pi\,|\,t)=0,$$

где положено

$$\varphi_0=-(H)_{p_r=\varphi_r},$$

то (п. 29) функции $p_r-\varphi_r$, $p_0-\varphi_0$ будут находиться в инволюции, т. е. будут удовлетворять равенствам

$$(p_r-\varphi_r,\ p_s-\varphi_s)=0 \qquad (r,\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ n);$$

так как φ не зависят от p, то эти равенства примут вид

$$\frac{\partial\varphi_r}{\partial q_s}=\frac{\partial\varphi_s}{\partial q_r} \qquad (r,\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ n), \tag{90}$$

так что они выразят необходимые и достаточные условия для существования такой функции V от q, $q_0=t$ и от постоянных π, что

$$\frac{\partial V}{\partial q_r}=\varphi_r \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{91$_а$}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\varphi_0=-(H)_{p_r=\varphi_r}. \tag{91$_б$}$$

Определение этой функции V, как известно, требует только квадратур; покажем сейчас, что эта функция и представляет собою полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (72).

Что функция V есть интеграл, можно видеть непосредственно из равенства (91$_б$), если принять во внимание равенства (91$_а$), так что остается только подтвердить его полноту. Для этой цели достаточно проверить, что смешанный функциональный определитель от V по q и π (п. 35), т. е. в силу уравнений (91$_а$) якобиан от $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ по π, не будет тождественно равен нулю. Но это есть необходимое и достаточное условие для разрешимости уравнений (86′) относительно π, обеспеченное заранее тем обстоятельством, что эти уравнения эквивалентны первоначальным уравнениям (86), которые как раз и являются разрешенными относительно π.

45. Следствия из теоремы Лиувилля для канонических систем с характеристической функцией, не зависящей от времени. В конкретных задачах, представляющих физический интерес, оправдывается

то обстоятельство, что переменная t не появляется ни в H, ни в одном из известных интегралов (86). При таком предположении теорема Лиувилля позволяет сделать два замечания, которые следует разъяснить.

Прежде всего мы видим, что способ, использованный в предыдущем пункте для установления теоремы Лиувилля, приводит к полному интегралу вида

$$V = -Et + W,$$

где E есть постоянная, а W не зависит от t.

Действительно, так как функции φ_r не содержат t, уравнениям ($91_а$) можно удовлетворить некоторой функцией W, зависящей исключительно от q (и от π), после чего наиболее общее решение этих уравнений определится равенством

$$V = W + T,$$

где T представляет собой некоторую произвольную функцию от t (и от π). Остается еще удовлетворить уравнению ($91_б$), которое дает здесь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varphi_0 = -(H)_{p_r = \varphi_r}; \qquad (91'_б)$$

надо заметить, что, с одной стороны, так как уравнения (90) при $r = 0$, $s > 0$ дают

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial q_s} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

функция φ_0 не зависит от q и, с другой стороны, что она также не зависит и от t, потому что такой же, по предположению, является функция H, и t не может быть введена в нее подстановкой $p_r = \varphi_r$. Поэтому функция φ_0 есть постоянная (зависящая от π), которую мы можем обозначить через $-E$, и из соотношения ($91'_б$) заключаем, что, по крайней мере с точностью до несущественной постоянной,

$$T = -Et.$$

Этот результат надо сопоставить с выводами п. 38.

Перейдем теперь к другому упомянутому следствию из теоремы Лиувилля: *интегрирование канонической системы с характеристической функцией, не зависящей от времени, будет выполнимо (одними только конечными операциями и квадратурами) всякий раз, когда известны $n-1$ ее интегралов $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, которые находятся в инволюции и не содержат t, и функции $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, H$ независимы между собой.*

Действительно, мы замечаем, что а) n-й интеграл определяется уравнением $H = \text{const}$ (п. 4) и б) так как все функции f не зависят от времени, то уравнения (87) приводятся здесь к виду

$$(H, f_r) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

так что n-й интеграл H будет также находиться в инволюции с остальными $n-1$ интегралами.

После этого достаточно применить теорему Лиувилля.

§ 8. Примеры

46. Свободная точка, отнесенная к цилиндрическим координатам. Каноническое выражение, имеющее место в этом случае для живой силы

$$(T)=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2+p_z^2\right),$$

явно не зависит от азимутальной координаты φ, так что если точка находится в поле консервативной силы, симметричном относительно оси z, и, следовательно, соответствующий (единичный) потенциал U тоже не зависит от φ, то эта координата является игнорируемой, и имеет место интеграл

$$p_\varphi=r^2\dot{\varphi}=c,$$

который, естественно, истолковывается как интеграл момента количества движения относительно оси z или как интеграл площадей относительно полюса в плоскости $z=0$.

Приведенная каноническая система (п. 42), имеющая только две степени свободы (относительно переменных r и z), имеет в этом случае характеристическую функцию вида

$$\overline{H}=\frac{1}{2}(p_r^2+p_z^2)+\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}-U(r,z),$$

которую можно истолковать как соответствующую некоторому движению в меридианной плоскости под действием силы, являющейся производной от потенциала

$$U(r,z)-\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}.$$

47. Задача $n+1$ тел: каноническая форма Пуанкаре для уравнений относительного движения. Значительно более важная иллюстрация общих рассуждений предыдущего параграфа дается в задаче $n+1$ тел (или вообще $n+1$ свободных точек, находящихся исключительно под действием внутренних сил), когда стараются получить решение из интегралов количеств движения (или количества движения центра тяжести)

$$Q_1=c_1,\quad Q_2=c_2,\quad Q_3=c_3,$$

которые, как это отмечалось в п. 24,а, находятся в инволюции.

В случае взаимных ньютонианских притяжений, которыми мы здесь ограничимся, соответствующий потенциал (гл. V, п. 32) зависит