так что n-й интеграл H будет также находиться в инволюции с остальными $n-1$ интегралами.

После этого достаточно применить теорему Лиувилля.

§ 8. Примеры

46. Свободная точка, отнесенная к цилиндрическим координатам. Каноническое выражение, имеющее место в этом случае для живой силы

$$(T)=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2+p_z^2\right),$$

явно не зависит от азимутальной координаты φ, так что если точка находится в поле консервативной силы, симметричном относительно оси z, и, следовательно, соответствующий (единичный) потенциал U тоже не зависит от φ, то эта координата является игнорируемой, и имеет место интеграл

$$p_\varphi=r^2\dot{\varphi}=c,$$

который, естественно, истолковывается как интеграл момента количества движения относительно оси z или как интеграл площадей относительно полюса в плоскости $z=0$.

Приведенная каноническая система (п. 42), имеющая только две степени свободы (относительно переменных r и z), имеет в этом случае характеристическую функцию вида

$$\overline{H}=\frac{1}{2}(p_r^2+p_z^2)+\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}-U(r,z),$$

которую можно истолковать как соответствующую некоторому движению в меридианной плоскости под действием силы, являющейся производной от потенциала

$$U(r,z)-\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}.$$

47. Задача $n+1$ тел: каноническая форма Пуанкаре для уравнений относительного движения. Значительно более важная иллюстрация общих рассуждений предыдущего параграфа дается в задаче $n+1$ тел (или вообще $n+1$ свободных точек, находящихся исключительно под действием внутренних сил), когда стараются получить решение из интегралов количеств движения (или количества движения центра тяжести)

$$Q_1=c_1,\quad Q_2=c_2,\quad Q_3=c_3,$$

которые, как это отмечалось в п. 24,а, находятся в инволюции.

В случае взаимных ньютонианских притяжений, которыми мы здесь ограничимся, соответствующий потенциал (гл. V, п. 32) зависит

только от разностей

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_1 - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (92)$$

между *абсолютными координатами* (т. е. между координатами относительно галилеевой системы отсчета) любой точки P_i и координатами заданной точки P_0 системы (центральное тело).

Это обстоятельство подсказывает, что удобно принять за лагранжевы параметры системы вместо $3(n+1)$ абсолютных координат $n+1$ тел $3n$ относительных координат n из них относительно центрального тела P_0 и абсолютные координаты ξ_0, η_0, ζ_0 этого последнего; действительно, координаты ξ_0, η_0, ζ_0 по отношению к характеристической функции $H = (T) - U$ задачи представляют собой игнорируемые координаты, и три соответствующих интеграла количеств движения (п. 4) будут тождественны с Q_1, Q_2, Q_3, так что последующее приведение системы будет сводиться к элементарному случаю п. 42.

Для этой цели заметим сначала, что к указанной замене переменных, когда вместо ξ_i, η_i, ζ_i подставляются выражения (92) и ξ_0, η_0, ζ_0, надо присоединить, конечно, и замену сопряженных переменных (п. 24,а)

$$\pi_i = m_i\dot{\xi}_i, \quad \chi_i = m_i\dot{\eta}_i, \quad \rho_i = m_i\dot{\zeta}_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

так что в общей сложности преобразование между двумя парами рядов из $3(n+1)$ переменных

$$\begin{pmatrix} \xi_i \eta_i \zeta_i \\ \pi_i \chi_i \rho_i \end{pmatrix} \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} x_i y_i z_i \xi_0 \eta_0 \zeta_0 \\ p_i q_i r_i p_0 q_0 r_0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

будет каноническим. Теперь ясно, что для этого достаточно, чтобы каноническими были преобразования между парами из $n+1$ переменных, соответствующих отдельным осям; так что на основании второго примера из п. 13 мы непосредственно будем иметь, что за переменные, сопряженные с x_i, y_i, z_i, ξ_0, η_0, ζ_0, должны быть соответственно приняты

$$\left.\begin{aligned} & p_i = \pi_i, \quad q_i = \chi_i, \quad r_i = \rho_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ & p_0 = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = Q_1, \quad q_0 = \sum_{i=1}^{n} \chi_i = Q_2, \quad r_0 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i = Q_3. \end{aligned}\right\} \quad (93)$$

Таким образом (замечание Пуанкаре), в задаче $n+1$ тел за сопряженные переменные можно принять, наряду с относительными координатами n тел по отношению к центральному телу и проекциями соответствующих количеств движения, абсолютные координаты центрального тела и проекции количества движения центра инерции.

Далее, если мы выразим в этих переменных характеристическую функцию $H = (T) - U$, то ξ_0, η_0, ζ_0 явно в нее не войдут, потому

что они не входят, как это отмечалось с самого начала, ни в потенциал U, ни в выражение (T), которое, как это было отмечено в п. 6, б, зависит исключительно от π, χ, ρ или на основании равенства (93) от p, q, r. Соответственно этим трем игнорируемым параметрам найдем три интеграла

$$p_0 = c_1, \quad q_0 = c_2, \quad r_0 = c_3, \tag{94}$$

и достаточно принять во внимание равенства (93), чтобы видеть, что мы имеем дело как раз с первоначальными интегралами количества движения центра тяжести.

Благодаря наличию этих трех интегралов согласно п. 12 можно понизить число степеней свободы канонической системы на три или, что одно и то же, понизить число переменных на шесть. Вследствие этого мы придем к так называемой *канонической форме Пуанкаре* для уравнений относительного движения (относительно центрального тела) в задаче $n+1$ тел. Мы знаем (п. 42), что когда проинтегрированы эти уравнения, то игнорируемые координаты ξ_0, η_0, ζ_0 центрального тела определяются простыми квадратурами.

Далее, характеристическая функция этих канонических уравнений относительного движения определится, естественно, уравнением $H = (T) - U$, в котором потенциал U предполагается выраженным через относительные координаты x_i, y_i, z_i, и, согласно равенствам (93), в равенстве п. 6, б

$$(T) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{m_i} (\pi_i^2 + \chi_i^2 + \rho_i^2)$$

вместо π_i, χ_i, ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ подставлены соответственно p_i, q_i, r_i, а вместо π_0, χ_0, ρ_0 — величины

$$c_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i, \quad c_2 - \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad c_3 - \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Относительно последней подстановки надо сделать одно важное замечание. Три интеграла (94) в силу их значения выражают постоянство скорости центра тяжести системы, а так как все предшествующее имеет силу для произвольной галилеевой системы осей, то мы можем прямо взять одну такую систему с началом в центре тяжести, благодаря чему придется положить $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Таким образом, для характеристической функции получаем окончательное выражение

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} (p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) +$$

$$+ \frac{1}{2m_0} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \right)^2 \right\} - U, \tag{95}$$

которое в случае $n=2$ для трех тел принимает вид

$$H=\frac{1}{2m_1}(p_1^2+q_1^2+r_1^2)+\frac{1}{2m_2}(p_2^2+q_2^2+r_2^2)+$$
$$+\frac{1}{2m_0}\left\{(p_1+p_2)^2+(q_1+q_2)^2+(r_1+r_2)^2\right\}-U. \qquad (96)$$

В этом последнем случае явное выражение потенциала, относящегося к взаимному притяжению трех тел, определяется равенством

$$U=f\left\{\frac{m_0m_1}{\Delta_1}+\frac{m_0m_2}{\Delta_2}+\frac{m_1m_2}{\Delta}\right\}, \qquad (97)$$

где m_0, m_1, m_2 суть массы трех тел и

$$\Delta_1=P_0P_1, \quad \Delta_2=P_0P_2, \quad \Delta=P_1P_2.$$

48. Тело, закрепленное в одной точке. Частный случай тяжелого твердого тела. В случае движения твердого тела, закрепленного в одной точке, каноническое выражение живой силы, как мы видели в п. 6, в, есть

$$(T)=\frac{1}{2}\left\{\frac{(p_\theta\cos\varphi+\sigma\sin\varphi)^2}{A}+\frac{(p_\theta\sin\varphi-\sigma\cos\varphi)^2}{B}+\frac{p_\varphi^2}{C}\right\},$$

где

$$\sigma=\frac{p_\psi-p_\varphi\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Координата ψ явно в него не входит, так что всякий раз, когда и потенциал U активных сил окажется не зависящим от ψ, эта координата будет игнорируемой, а для соответствующей задачи о движении будет существовать первый интеграл $p_\psi=\text{const}$, в котором, если вспомним (п. 6, в), что p_ψ равно $Ap\gamma_1+Bq\gamma_2+Cr\gamma_3$, мы узнаем интеграл момента количеств движения относительно неподвижной оси ζ.

Применяя к этому случаю следствие из теоремы Лиувилля, указанное в п. 45, мы заключаем, что достаточно найти еще один интеграл, который не зависел бы от t и был бы отличен от интеграла $H=\text{const}$ энергии и, кроме того, находился бы в инволюции с p_ψ (т. е. не содержал явно ψ), чтобы задача о движении твердого тела вокруг закрепленной точки была разрешена только посредством квадратур.

Чтобы разъяснить важность этого заключения, полезно истолковать допущенное выше существенное условие $\partial U/\partial\psi=0$. Из толкования, данного в п. 5 гл. IV для обобщенных сил, действующих на твердое тело и соответствующих эйлеровым углам, следует, что это условие характеризует тот механический факт, что результирующий момент M активных сил относительно неподвижной точки O перпендикулярен к неподвижной оси ζ. Это обстоятельство по отношению к неподвижной вертикальной оси имеет место в том случае, когда активная сила

представляет собой вес, как это видно из прямых геометрических соображений, а также и из известного выражения потенциала (гл. VIII, п. 21)

$$U = P(\gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0 + \gamma_3 z_0),$$

где x_0, y_0, z_0 суть координаты центра тяжести и

$$\gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta. \tag{98}$$

Мы теперь в состоянии доказать утверждение п. 24 гл. VIII, что задача о движении тяжелого твердого тела вокруг закрепленной точки будет разрешима при помощи только квадратур во всех тех случаях, когда для уравнений Эйлера—Пуассона удается указать один интеграл, не зависящий от t и отличный от интегралов моментов количеств движения ($p_\psi = \text{const}$) и энергии ($H = \text{const}$). Действительно, такой интеграл, поскольку он относится к уравнениям Эйлера—Пуассона, может зависеть только от аргументов p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3, выражения которых через канонические переменные $\begin{pmatrix} p_\theta p_\varphi p_\psi \\ \theta\ \varphi\ \psi \end{pmatrix}$, даваемые равенствами (14′) п. 6 и (98), не содержат ψ. Поэтому необходимо будет иметь место равенство $\partial f/\partial\psi = 0$, так что речь идет об интеграле, находящемся в инволюции с интегралом $p_\psi = \text{const}$, и потому непосредственно будет применимо следствие из теоремы Лиувилля п. 45.

49. Тело гироскопической структуры. Если предположить, что $A = B$, то выражение живой силы, упомянутое в предыдущем пункте, получает вид

$$(T) = \frac{1}{2}\left\{\frac{p_\theta^2 + \sigma^2}{A} + \frac{p_\varphi^2}{C}\right\}$$

и, как мы видим, не зависит не только от ψ, но также и от φ, так что если то же самое справедливо и для потенциала U (который в этом предположении будет зависеть только от θ), то наряду с первым интегралом $p_\psi = \text{const}$ будем иметь еще один первый интеграл $p_\varphi = \text{const}$, который в силу второго из равенств (14) п. 6 равносилен $r = \text{const}$, т. е. выражает постоянство проекции угловой скорости твердого тела на ось симметрии. Так как оба этих интеграла не зависят от t, отличны от H и находятся в инволюции, то можно прямо утверждать на основании следствия из теоремы Лиувилля (п. 45), что задача разрешима в одних только квадратурах. Классический пример мы имеем в случае Лагранжа — Пуассона (тяжелый гироскоп, гл. VIII, § 6), когда упомянутое уже выражение потенциала приводится к виду $U = Pz_0\gamma_3 = Pz_0 \cos\theta$; утверждение п. 27 главы VIII, таким образом, доказано.

Другая важная задача того же типа будет разобрана в следующем пункте.

50. Движение Земли вокруг ее центра тяжести под действием притяжения отдаленным телом. В п. 31 гл. XI т. I мы видели, что потенциал притяжения V каким-нибудь телом (например, Землею), масса которого m_0, какой-нибудь отдаленной точки P с массою m с достаточным приближением можно принять равным

$$V = \frac{fm_0m}{\rho} + \frac{fm}{\rho^3}\left(\mathfrak{M} - \frac{3}{2}J\right), \tag{99}$$

где f обозначает, как обычно, постоянную всемирного тяготения, ρ — расстояние точки P от центра тяжести O Земли, $\mathfrak{M}$ — полярный момент инерции Земли относительно O (полусумма трех главных моментов инерции) и I — осевой момент инерции относительно OP. Для нас существенно отметить, что потенциал V можно истолковать так же, как потенциал полного притяжения, которое точка P оказывает на Землю, поскольку это справедливо относительно отдельных элементарных потенциалов, суммой которых является V.

Для уточнения постановки задачи уподобим Землю гироскопу, имеющему осью полярную ось Oz $(A = B)$, и обозначим через θ, φ, ψ углы Эйлера неподвижной в теле системы осей $Oxyz$ относительно осей неизменного направления. Если представим себе, что нам известны как абсолютное движение центра тяжести O Земли, так и движение отдаленной точки P, то расстояние ρ и направляющие косинусы u_1, u_2, u_3 направленной прямой OP относительно неподвижных осей нужно рассматривать как известные функции времени. С другой стороны, так как $\mathfrak{M} = A + C/2$ есть постоянная, то из основного соотношения (16) гл. X т. I мы имеем

$$I = A(\alpha^2 + \beta^2) + C\gamma^2 = A + (C - A)\gamma^2,$$

где α, β, γ обозначают направляющие косинусы полупрямой OP относительно осей, неподвижных в теле. Наконец, последний косинус γ зависит от двух троек направляющих косинусов u_1, u_2, u_3 прямой OP и α_3, β_3, γ_3 оси Oz (относительно неподвижной системы осей):

$$\gamma = \alpha_3 u_1 + \beta_3 u_2 + \gamma_3 u_3;$$

принимая во внимание, что

$$\alpha_3 = \sin\psi \sin\theta, \quad \beta_3 = -\cos\psi \sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta,$$

выражение для γ можно написать в виде

$$\gamma = \sin\theta\,(u_1 \sin\psi - u_2 \cos\psi) + u_3 \cos\theta. \tag{100}$$

Заметим теперь, что члены потенциала V, не зависящие от обобщенных координат θ, φ, ψ (но зависящие все же от времени), ничего не прибавят в формулах, выражающих канонические уравнения движения.

Поэтому в выражении (99) для потенциала V мы можем пренебречь как двумя первыми слагаемыми

$$\frac{fm_0m}{\rho}, \quad \frac{fm\mathfrak{M}}{\rho^3},$$

так и членом

$$-\frac{3}{2}\frac{fmA}{\rho^3},$$

входящим на основании выражения для I в третье слагаемое, так что за потенциал можно принять функцию

$$U = -\frac{3}{2}\frac{fm}{\rho^3}(C-A)\gamma^2, \tag{101}$$

зависящую, кроме времени, еще и от углов Эйлера согласно равенству (100).

Для постановки динамической задачи о движении Земли около ее центра тяжести под действием притяжения отдаленной точки P необходимо, помимо потенциала (фиктивного), еще и выражение для живой силы. Здесь нам пригодится замечание п. 2 гл. VIII, на основании которого (поскольку действие силы зависит только от ориентировки Земли относительно неподвижных осей) вращательное движение определяется уравнениями (лагранжевыми и, следовательно, каноническими), составляемыми в предположении, что центр тяжести неподвижен. Следовательно, для живой силы Земли здесь надо принять выражение (T) в канонических переменных, приведенное в предыдущем пункте. При помощи выражений (T) для живой силы и (101) для потенциала U мы можем получить явное представление характеристической функции $H = (T) - U$.

Введем дальнейшее упрощение в задачу, предполагая, что движение отдаленной точки P известно; с этой целью ограничимся наиболее замечательным случаем, в котором движение точки P можно строго или, по крайней мере, приближенно рассматривать так, как если бы эта точка притягивалась только одной Землей. Тогда, если имеются в виду отдаленные тела, мы приходим к задаче двух тел, одно из которых есть точка P, а другое — Земля, масса которой m_0 предполагается сосредоточенной в центре тяжести O; в пп. 4 и 21 гл. III мы видели, что при таких условиях всегда возможны круговые движения (частный случай так называемого кеплерова движения), угловая скорость которых n связана с радиусом орбиты соотношением

$$n^2 = f\frac{m+m_0}{\rho},$$

откуда получаем

$$\frac{fm}{\rho^3} = \frac{n^2}{1+\frac{m_0}{m}}. \tag{102}$$

Предположим, что точка P совершает именно такое равномерное движение по окружности.

Если в этом предположении за неподвижную плоскость $\xi\eta$ возьмем плоскость круговой орбиты и обозначим через $w = nt + w_0$ *долготу* точки P, т. е. угол полупрямой OP с осью ξ, то будем иметь

$$u_1 = \cos w, \quad u_2 = \sin w, \quad u_3 = 0,$$

так что равенство (100) принимает вид

$$\gamma = \sin\theta \sin(\psi - w), \tag{100'}$$

а потенциал (101), если примем во внимание равенство (102), будет равен

$$U = -\frac{3}{4}\frac{n^2}{1+\frac{m_0}{m}}(C-A)\sin^2\theta\,[1-\cos 2(\psi - w)]. \tag{101'}$$

Таким образом, мы видим, что, в то время как живая сила (T) зависит (в отношении того, что касается координат) исключительно от угла нутации θ, потенциал U, даже в схематически простом случае, когда движение точки P относительно O предполагается круговым, явно содержит, наряду с θ, угол ψ, а также и время, входящее через посредство долготы w. Поэтому существует один только первый интеграл $p_\varphi = \text{const}$ постоянства угловой гироскопической скорости, а поскольку H зависит через посредство w от времени, то даже интеграл энергии не будет иметь места.

Но мы ограничимся рассмотрением так называемых *вековых действий*, т. е. изучением движения за большой промежуток времени, отвлекаясь от возможных малых колебаний. Для этой цели, как это будет следовать из общих соображений, которые мы изложим в п. 74, приближенно вместо U (или слагаемого из U), зависящего от времени по какому-нибудь периодическому закону, можно подставить его среднее значение за период T или, так как $nT = 2\pi$,

$$[U] = \frac{1}{T}\int_0^T U\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,dw.$$

Далее, в настоящем случае U есть сумма двух членов: одного, не зависящего от времени, и другого, содержащего $\cos 2(\psi - w)$; среднее значение этого последнего члена по отношению к w, очевидно, равно нулю, так что мы пришли к изучению вращательного движения вокруг точки O при наличии потенциала

$$U_1 = -\frac{3}{4}\frac{n^2}{1+\frac{m_0}{m}}(C-A)\sin^2\theta. \tag{103}$$

Так как этот потенциал, так же как и живая сила, зависит исключительно от угла нутации θ [1]), то имеют место оба первых интеграла:

$$p_\varphi = \text{const}, \quad p_\psi = \text{const};$$

на основании известного следствия из теоремы Лиувилля мы заключаем, что *вековые действия притяжения отдаленного тела на движение Земли вокруг ее центра тяжести можно представить в квадратурах.*

Если на движение Земли влияют несколько тел, то потенциал притяжения, зависящий от каждого из них, вычисляется тем же способом. Так как речь идет об отдаленных телах, то вместо потенциала (101′) надо подставить сумму стольких аналогичных членов, сколько имеется тел, создающих потенциал; для такой суммы также будут иметь место высказанные выше заключения, относящиеся к интегрированию дифференциальных уравнений движения Земли вокруг центра тяжести, в частности, и то заключение, что для определения вековых действий мы приходим к квадратурам.

Заметим наконец, что слагаемое, прибавляемое к потенциалу от каждого из тел, создающих потенциал и предполагаемых отдаленными, согласно равенству (101) будет прямо пропорционально массе m тела и обратно пропорционально кубу расстояния ρ от O; если принять это во внимание, то окажется, что в конкретном случае Земли можно пренебречь действием других планет и рассматривать только два тела: Солнце — вследствие его большой массы и Луну — вследствие ее относительно малого расстояния.

§ 9. Определение частных решений, если известны первые интегралы или инвариантные соотношения [2])

51. Стационарные решения. В двух предыдущих параграфах мы изучили в соответствии с общими соображениями п. 41 наибольшее понижение порядка, необходимое для определения общего решения канонической системы, которое возможно в случае знания некоторого числа интегралов (произвольных или специального вида).

Здесь мы остановимся на более скромной, но в то же время очень интересной (в смысле ее широкой приложимости) задаче отыскания минимальных аналитических средств, достаточных для определения некоторого *класса частных решений*, когда эти решения можно получить на основании знания интегралов или инвариантных соотношений.

При этом существенное значение будут иметь рассуждения пп. 27, 28 об инвариантности условий стационарности; с механической точки

---

[1]) См. с этой целью упражнения 14 и 15 гл. VIII.

[2]) Levi-Civita, Мемуар, цитированный на стр. 281; см. также Burgatti, *Rend. Acc. Lincei* (5), т. 11, 1902_1, стр. 309—314.