

Так как этот потенциал, так же как и живая сила, зависит исключительно от угла нутации  $\theta^1$ ), то имеют место оба первых интеграла:

$$p_\varphi = \text{const}, \quad p_\psi = \text{const};$$

на основании известного следствия из теоремы Лиувилля мы заключаем, что *вековые действия притяжения отдаленного тела на движение Земли вокруг ее центра тяжести можно представить в квадратурах*.

Если на движение Земли влияют несколько тел, то потенциал притяжения, зависящий от каждого из них, вычисляется тем же способом. Так как речь идет об отдаленных телах, то вместо потенциала (101') надо подставить сумму стольких аналогичных членов, сколько имеется тел, создающих потенциал; для такой суммы также будут иметь место высказанные выше заключения, относящиеся к интегрированию дифференциальных уравнений движения Земли вокруг центра тяжести, в частности, и то заключение, что для определения вековых действий мы приходим к квадратурам.

Заметим наконец, что слагаемое, прибавляемое к потенциальному от каждого из тел, создающих потенциал и предполагаемых отдаленными, согласно равенству (101) будет прямо пропорционально массе  $m$  тела и обратно пропорционально кубу расстояния  $r$  от  $O$ ; если принять это во внимание, то окажется, что в конкретном случае Земли можно пренебречь действием других планет и рассматривать только два тела: Солнце — вследствие его большой массы и Луну — вследствие ее относительно малого расстояния.

### § 9. Определение частных решений, если известны первые интегралы или инвариантные соотношения <sup>2)</sup>

**51. Стационарные решения.** В двух предыдущих параграфах мы изучили в соответствии с общими соображениями п. 41 наибольшее понижение порядка, необходимое для определения общего решения канонической системы, которое возможно в случае знания некоторого числа интегралов (произвольных или специального вида).

Здесь мы остановимся на более скромной, но в то же время очень интересной (в смысле ее широкой приложимости) задаче отыскания минимальных аналитических средств, достаточных для определения некоторого класса частных решений, когда эти решения можно получить на основании знания интегралов или инвариантных соотношений.

При этом существенное значение будут иметь рассуждения пп. 27, 28 об инвариантности условий стационарности; с механической точки

<sup>1)</sup> См. с этой целью упражнения 14 и 15 гл. VIII.

<sup>2)</sup> Levi-Civita, Мемуар, цитированный на стр. 281; см. также Virgatii, Rend. Acc. Lincei (5), т. 11, 1902<sub>1</sub>, стр. 309—314.

зрения наиболее важный случай будет тот, когда полная энергия  $H$  имеет стационарное значение в абсолютном смысле или в зависимости от инвариантных соотношений или каких-либо интегралов. Решения, к которым мы таким образом приходим, мы будем называть, следуя Раусу, *стационарными*.

**52. СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ.** Чтобы начать с простого, но не лишенного, однако, интереса случая, возьмем снова каноническую систему, характеристическая функция которой не зависит от  $t$ . В этом случае существует интеграл  $H = \text{const}$ , и, согласно следствию п. 27, соответствующее условие стационарности  $\delta H = 0$  позволяет написать  $2n$  инвариантных соотношений

$$\frac{\partial H}{\partial p_h} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (104)$$

которые приводят каноническую систему к виду  $\dot{p}_h = \dot{q}_h = 0$  и показывают, что решения, при которых удовлетворяется условие  $\delta H = 0$ , все являются как раз такими, при которых отдельные  $p$  и  $q$  сохраняют постоянные значения. Следовательно, мы имеем дело со статическим решением в узком смысле п. 17 гл. VI; так как число  $2n$  уравнений (104) как раз равно числу постоянных  $\dot{p}^0, \dot{q}^0$ , то эти уравнения, за исключением случаев несовместности и неопределенности, пригодны для определения искомых решений.

На любое из этих решений σ распространяется замечание, вытекающее из теоремы Дирихле для динамического случая, а именно, что возможно указать чисто качественное условие устойчивости, т. е. условие, выражаемое посредством одних только соотношений неравенства. Действительно, таким является в силу уравнений (104) условие, что  $H$  имеет для решения σ действительный максимум или минимум (см. п. 7 и гл. VII,пп. 5—6, 17); замечание о лагранжевых системах с кинетическим потенциалом, не зависящим от времени, в конце упомянутого п. 17, гл. VI, таким образом, будет вполне оправдано, так как, как это непосредственно следует из п. 1 той же самой главы, всякая такая лагранжева система определяет каноническую систему с характеристической функцией, не зависящей от  $t$ , и обратно.

**53. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В ИНВОЛЮЦИИ.** Переходя после этого к более общим предположениям, докажем, что если для указанной канонической системы порядка  $2n$  с характеристической функцией, не зависящей от времени, известны  $m < n$  инвариантных соотношений, находящихся в инволюции и разрешимых относительно  $m$  переменных  $p$ , то можно определить  $\infty^m$  частных решений данной системы посредством интегрирования приведенной системы дифференциальных уравнений порядка  $m$ .

Действительно, пусть известные инвариантные соотношения даны в разрешенном виде

$$p_r = \varphi_r(p_{m+1}, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) \quad (r = 1, 2, \dots, m); \quad (105)$$

как мы знаем из п. 30, если наложим на функцию  $H$  условие стационарности, имея в виду эти  $m$  соотношений (т. е. если мы исключим из  $H$  величины  $p_1, p_2, \dots, p_m$  посредством равенств (105) и, обозначив через  $\bar{H}$  приведенную таким образом функцию, положим  $\delta\bar{H} = 0$ ), то явные уравнения, эквивалентные этому условию стационарности, сведутся к  $2(n-m)$  уравнениям

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial p_{m+j}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_{m+j}} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-m), \quad (106)$$

так как из них непосредственно следует, что остальные производные  $\partial\bar{H}/\partial q_r$ , ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) обращаются в нуль.

Если, обращаясь к условиям, образующим нормальный случай, предположим, что уравнения (106) разрешимы относительно  $p_{m+j}, q_{m+j}$  ( $j = 1, 2, \dots, n-m$ ), то эти уравнения и равенства (105) позволяют полностью выразить все  $p$  и  $q_{m+1}, \dots, q_n$  через  $q_1, \dots, q_m$ .

С другой стороны, если первоначальную каноническую систему представим себе разбитой на две частичные системы

$$\left. \begin{array}{l} \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_{m+j} = \frac{\partial H}{\partial p_{m+j}} \end{array} \right\} \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (5')$$

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad (r = 1, 2, \dots, m), \quad (5'')$$

то уравнения (5') будут обязательно удовлетворяться только что указанными  $2(n-m)$  разрешенными уравнениями; а в силу тех же явных выражений  $p_h$  и  $q_{m+j}$  равенства (5'') сводятся к системе  $m$  уравнений относительно  $q_1, \dots, q_m$ , т. е. к системе порядка  $m$ . Интегрирование этой системы введет  $m$  произвольных постоянных; соответствующие уравнения интегралов, присоединенные к равенствам (105) и (106), как раз дадут искомый класс  $\infty^m$  решений для заданной канонической системы. Один частный случай, заслуживающий упоминания, в котором  $m = n$ , получен на основании замечания п. 40, так как форма уравнений (71), позволяет видеть, что речь идет о системе, находящейся в инволюции.

Естественно, что общность решений, к которой мы приходим таким способом, возрастает, когда какое-нибудь из известных инвариантных соотношений (105) является истинным интегралом и поэтому содержит произвольную постоянную; поэтому если при приведении мы прямо используем  $m$  интегралов, находящихся попарно в инволюции, то придем к классу  $\infty^{2m}$  частных решений,

54. Движение по Раусу. Результат предыдущего пункта находит важное применение, когда каноническая система имеет  $m$  игнорируемых координат  $q_1, q_2, \dots, q_m$ . Как мы уже знаем (п. 42), в этом случае существуют  $m$  интегралов обобщенных количеств движения

$$p_r - p_r^0 = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m); \quad (83)$$

соответствующая приведенная характеристическая функция  $\tilde{H}$  является не чем иным, как первоначальной функцией  $H$ , в которой вместо каждого  $p_r$  подставлено соответствующее постоянное значение  $p_r^0$ . Если теперь сопоставим условия стационарности (106) с каноническими уравнениями

$$\dot{p}_{m+j} = -\frac{\partial H}{\partial q_{m+j}}, \quad \dot{q}_{m+j} = \frac{\partial H}{\partial p_{m+j}} \quad (j = 1, 2, \dots, n-m), \quad (5_a)$$

то увидим, что искомые стационарные решения будут *меростатическими* (см. гл. VI, п. 24); точнее, каждое такое решение состоит из решения уравнений (5<sub>a</sub>), статического относительно  $p_{m+j}, q_{m+j}$ , к которому надо присоединить постоянные значения также и для  $p_r$ , а  $q_r$  на основании остальных уравнений

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (5_b)$$

будут линейными функциями от  $t$ .

Этот тип семейств  $\infty^{2m}$  стационарных решений был изучен Раусом в частном предположении динамического случая; и поэтому движения, которые определяются этими решениями, называются *движениями по Раусу*.

55. Заслуживает внимания то обстоятельство, что с теоретической точки зрения рассмотренный в п. 53 случай оказывается только более общим случаем Рауса, разобранным в предыдущем пункте. Действительно, как это доказывается в теории преобразований прикосновения, инвариантные соотношения (105), находящиеся в инволюции, можно всегда привести надлежащим (вполне) каноническим преобразованием переменных  $p, q$  к простейшему виду

$$p_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m); \quad (105')$$

эти инвариантные соотношения подразумеваются выполненными в случае Рауса.

Это замечание приводит к почти непосредственному доказательству результата п. 30. Достаточно заметить, что, когда выполнено преобразование, приводящее равенства (105) к виду (105'), инвариантность этих последних соотношений в силу канонических уравнений

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

влечет за собой то, что  $m$  производных  $\partial H/\partial q_r$  должны тождественно обращаться в нуль в силу равенств (105'), откуда, полагая преобразование выполненным в обратном порядке, мы прямо увидим, что условия стационарности характеристической функции  $H$ , соответственно равенствам (105), выражаются только посредством  $2(n-m)$  соотношений (106).

Это доказательство оказывается, несомненно, более простым, чем доказательство п. 30; нужно, однако, заметить, что оно опирается на теорию преобразований прикоснения, которую мы здесь не затрагивали. Во всяком случае, даже если мы отвлечемся от этого несущественного обстоятельства, теоретическая возможность сведения  $m$  инвариантных соотношений, находящихся в инволюции (105), к соотношениям (105') не лишает интереса рассуждения, которые мы развили в пп. 28, 30, относя систему к совершенно общим координатам.

Существенная цель нашего исследования состояла в определении некоторых классов решений простыми средствами, или, по крайней мере, более простыми, чем полное интегрирование заданной системы дифференциальных уравнений, каковым является интегрирование приведенной системы порядка  $m < 2n$ . Далее, определение преобразования прикоснения, пригодного для приведения случая п. 53 к случаю Рауса, вообще говоря, требует операций порядка более высокого, чем  $m$ , так что его нельзя рассматривать как полезное орудие для вычисления, хотя совершенно законно и даже удобно пользоваться им как средством для доказательства.

**56. Замечания о действительном построении стационарных решений.** Чтобы выразить условия стационарности функции  $f_0$  соответственно некоторому числу  $m$  соотношений

$$f_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m), \quad (107)$$

инвариантных относительно заданной системы дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка (96), нет нужды строго следовать способу, указанному в наших теоретических выкладках в п. 30, т. е. прежде всего разрешать систему (107) относительно  $n$  аргументов и после исключения этих аргументов из  $f_0$  приравнивать нулю виртуальную вариацию приведенной таким образом функции  $\bar{f}_0$ . Наоборот, как известно из анализа, можно избежать предварительного решения уравнения (107), прибегая к классическому *методу множителей*.

Этот метод состоит, как известно, в присоединении к уравнениям (107) символического уравнения

$$\delta f_0 + \sum_{r=1}^n \mu_r \delta f_r = 0, \quad (108)$$

где  $\delta f_0$ ,  $\delta f_r$  обозначают виртуальные вариации, а множители  $\mu$  должны рассматриваться как вспомогательные неизвестные. Исключая эти

множители  $\mu$  из  $n$  уравнений, объединенных в уравнении (108), и присоединяя уравнения, которые таким образом получатся, к уравнениям (107), мы придем к системе, эквивалентной системе, состоящей из уравнений (107) и из уравнения  $\delta f_0 = 0$ .

Другими словами, можно сказать, что уравнения (107), (108), по существу, содержат две группы уравнений ( $A$ ) и ( $B$ ), из которых уравнения ( $A$ ) составляют систему, инвариантную относительно заданной системы дифференциальных уравнений с одними только  $x$ , а уравнения ( $B$ ) дают определение множителей  $\mu$  в функциях от  $x$ . Отсюда следует, что если продифференцируем по  $t$  систему уравнений (107), (108) или эквивалентную ей систему ( $A$ ), ( $B$ ) и примем, конечно, во внимание систему (36), то частичная система ( $A$ ) в силу своего инвариантного характера не дает места никакому новому соотношению, тогда как система ( $B$ ) приведет к такому же числу уравнений ( $B'$ ), которые определят производные от множителей  $\mu$  в функциях от  $x$ . Таким образом, можно также сказать, что система (107), (108), как и эквивалентная ей система ( $A$ ), ( $B$ ), инвариантна относительно расширенной системы дифференциальных уравнений с  $n+m$  неизвестными  $x$  и  $\mu$ , которая получается путем присоединения к уравнениям (36) уравнений ( $B'$ ), так как, дифференцируя уравнения ( $A$ ) и ( $B$ ) и принимая во внимание уравнения (36), ( $B'$ ), мы не придем к какому-нибудь соотношению между  $x$ ,  $\mu$ ,  $t$ , отличному от уравнений (107), (108).

Это и есть результат, от которого следует исходить при фактическом приведении системы дифференциальных уравнений и идти к определению стационарных решений, о которых идет речь.

Необходимо признать, что, с теоретической точки зрения, способ множителей как способ, преобразующий первоначальную задачу, сводящуюся к системе дифференциальных уравнений с  $n$  неизвестными, в аналогичный вопрос, связанный с системой уравнений с  $n+m$  неизвестными, не представляет преимуществ по сравнению с первоначальным способом. Однако вместе с указанным выше преимуществом, заключающимся в том, что его применение позволяет избежать предварительного решения уравнений (107), он соединяет еще достоинство особенной алгоритмической ясности, которая, как мы увидим, будет цenna в механических приложениях, так как допускает прямое и изящное истолкование природы движения.

## § 10. Примеры

**57. Свободная точка, находящаяся под действием консервативных сил, обладающих осевой симметрией.** Иллюстрируем теперь общие рассуждения предыдущего параграфа, применяя их к некоторым частным задачам, которые в свою очередь связаны с примерами, изложенными в § 8. Рассмотрим прежде всего свободную точку (масса которой равна 1), находящуюся под действием такой консервативной