множители μ из n уравнений, объединенных в уравнении (108), и присоединяя уравнения, которые таким образом получатся, к уравнениям (107), мы придем к системе, эквивалентной системе, состоящей из уравнений (107) и из уравнения $\delta f_0 = 0$.

Другими словами, можно сказать, что уравнения (107), (108), по существу, содержат две группы уравнений (A) и (B), из которых уравнения (A) составляют систему, инвариантную относительно заданной системы дифференциальных уравнений с одними только x, а уравнения (B) дают определение множителей μ в функциях от x. Отсюда следует, что если продифференцируем по t систему уравнений (107), (108) или эквивалентную ей систему (A), (B) и примем, конечно, во внимание систему (36), то частичная система (A) в силу своего инвариантного характера не дает места никакому новому соотношению, тогда как система (B) приведет к такому же числу уравнений (B'), которые определят производные от множителей μ в функциях от x. Таким образом, можно также сказать, что система (107), (108), как и эквивалентная ей система (A), (B), инвариантна относительно *расширенной* системы дифференциальных уравнений с $n+m$ неизвестными x и μ, которая получается путем присоединения к уравнениям (36) уравнений (B'), так как, дифференцируя уравнения (A) и (B) и принимая во внимание уравнения (36), (B'), мы не придем к какому-нибудь соотношению между x, μ, t, отличному от уравнений (107), (108).

Это и есть результат, от которого следует исходить при фактическом приведении системы дифференциальных уравнений и идти к определению стационарных решений, о которых идет речь.

Необходимо признать, что, с теоретической точки зрения, способ множителей как способ, преобразующий первоначальную задачу, сводящуюся к системе дифференциальных уравнений с n неизвестными, в аналогичный вопрос, связанный с системой уравнений с $n+m$ неизвестными, не представляет преимуществ по сравнению с первоначальным способом. Однако вместе с указанным выше преимуществом, заключающимся в том, что его применение позволяет избежать предварительного решения уравнений (107), он соединяет еще достоинство особенной алгоритмической ясности, которая, как мы увидим, будет ценна в механических приложениях, так как допускает прямое и изящное истолкование природы движения.

§ 10. Примеры

57. Свободная точка, находящаяся под действием консервативных сил, обладающих осевой симметрией. Иллюстрируем теперь общие рассуждения предыдущего параграфа, применяя их к некоторым частным задачам, которые в свою очередь связаны с примерами, изложенными в § 8. Рассмотрим прежде всего свободную точку (масса которой равна 1), находящуюся под действием такой консервативной

силы, что соответствующий потенциал U, отнесенный к цилиндрическим координатам r, φ, z относительно галилеевой системы, не будет зависеть от угла φ.

Мы уже знаем (п. 46), что в этом случае существует интеграл площадей $p_\varphi = c$, так что на основании п. 54 для точки возможны ∞^2 движений Рауса.

Для определения этих движений возьмем прежде всего приведенную характеристическую функцию (п. 46)

$$\overline{H} = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} - U(r, z)$$

и согласно п. 54 присоединим к символическому уравнению $\delta\overline{H} = 0$ условие, заключающееся в том, что игнорируемая координата φ должна зависеть линейно от t.

Как было замечено в п. 46, равенство $\delta\overline{H} = 0$ можно истолковать как характеристическое условие возможных положений равновесия некоторой фиктивной точки, которая имеет одинаковые с заданной точкой координаты r и z в любой меридианной плоскости и находится под действием силы, являющейся производной от потенциала

$$U(r, z) - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2};$$

поэтому значения координат r, z, соответствующих этим положениям равновесия фиктивной точки и, следовательно, движениям Рауса действительной точки, определяются двумя уравнениями

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{c^2}{r^3} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Всякое решение r_0, z_0 этих уравнений определяет окружность (с осью z, радиусом r_0 и высотою z_0), так что мы имеем здесь дело с равномерными круговыми движениями, а именно с ∞^2 таких движений, так как они зависят от двух произвольных постоянных (постоянной c площадей и начального угла φ_0).

58. Плоская задача трех тел. Обратимся к результатам п. 47, предполагая, что движение трех тел, P_0, P_1, P_2, происходит в плоскости $\xi\eta$. Полагая равными нулю третьи координаты и соответствующие проекции количества движения, мы будем иметь для характеристической функции на основании формулы (96) выражение

$$H = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2m_2}(p_2^2 + q_2^2) + \\ + \frac{1}{2m_0}\{(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2\} - U, \tag{96'}$$

где

$$U = f\left\{\frac{m_0 m_1}{\Delta_1} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right\}. \tag{97}$$

Если речь идет о системе, находящейся под действием только внутренних сил, то, как уже упоминалось в п. 24, останутся в силе не только интегралы количеств движения, которые здесь будут полностью использованы для приведения (согласно п. 47) уравнений относительного движения к канонической форме Пуанкаре, но и интегралы результирующего момента количеств движения $K = \text{const}$. Так как движение происходит в плоскости $\xi\eta$, то достаточно выбрать в ней центр приведения, для того чтобы вектор K был перпендикулярен к этой плоскости, и нам останется только рассмотреть осевой интеграл моментов $K = K_3 = \text{const}$.

Чтобы вычислить осевой кинетический момент K, заметим, что на самом деле интеграл моментов существует только в том случае, если центр приведения моментов берется в точке, неизменно связанной с галилеевой системой отсчета (или в центре тяжести); в нашем случае, когда начало галилеевой системы выбрано в центре тяжести (находящемся в равномерном и прямолинейном движении), имеем $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, поэтому при равенстве нулю результирующей количеств движения выбор центра моментов является совершенно безразличным, и если возьмем этот центр в теле P_0, то для интеграла моментов найдем явное выражение

$$K = \sum_{i=1}^{2} (x_i q_i - y_i p_i) = \text{const}, \tag{109}$$

где x_1, y_1 и x_2, y_2 обозначают координаты точек P_1 и P_2 относительно точки P_0.

Теперь мы в состоянии изучить наиболее простым образом ∞^2 установившихся движений, существование которых при этой постановке задачи согласно п. 53 обеспечено существованием интеграла (109). Эти движения, если ввести множитель ω, который следует рассматривать как неопределенную пока функцию времени, определяются на основании п. 56 символическим уравнением

$$\delta H - \omega \delta K = 0,$$

где ω — неопределенный множитель; если принять во внимание, что в выражении (96′) функции H координаты x_i, y_i входят только в потенциал U, то последнее уравнение эквивалентно восьми уравнениям

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\omega y_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \omega x_i \qquad (i = 1,2), \tag{110}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} + \omega q_i = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} - \omega p_i = 0 \quad (i = 1,2). \tag{111}$$

Далее, на основании канонических уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1,2) \tag{112}$$

уравнения (110) преобразуются в уравнения

$$\dot{x}_i = -\omega y_i, \quad \dot{y}_i = \omega x_i \qquad (i = 1, 2),$$

которые истолковываются непосредственно: обе точки P_1, P_2 движутся по окружностям вокруг точки P_0 с одной и той же угловой скоростью ω.

Отсюда следует, что три расстояния Δ_1, Δ_2, Δ остаются неизменными, т. е. конфигурация трех тел P_0, P_1, P_2 остается неизменной во время движения.

Для определения этой конфигурации надо принять во внимание также и уравнения (111). Если, после того как мы придадим явную форму уравнениям (110) при помощи уравнения (96′), умножим в них обе части на ω и исключим ωp_i, ωq_i при помощи (111), то придем к уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{m_i}{m_0}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + m_i\omega^2 x_i = 0, \tag{112$_а$}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i} + \frac{m_i}{m_0}\left(\frac{\partial U}{\partial y_1} + \frac{\partial U}{\partial y_2}\right) + m_i\omega^2 y_i = 0, \tag{112$_б$}$$

где уравнения (112$_б$) выводятся из (112$_а$) посредством замены x на y; уравнения (112$_а$), выраженные в явной форме на основании выражения (97) функции U, принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\left[f\left(\frac{m_0+m_1}{\Delta_1^3} + \frac{m_2}{\Delta^3}\right) - \omega^2\right] x_1 + f m_2\left(\frac{1}{\Delta_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right) x_2 = 0, \\ &f m_1\left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right) x_1 + \left[f\left(\frac{m_0+m_2}{\Delta_2^3} + \frac{m_1}{\Delta^3}\right) - \omega^2\right] x_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{112′}$$

т. е. сводятся к двум линейным однородным уравнениям относительно x_1, x_2, которые в силу уравнений (112$_б$) должны удовлетворяться также и величинами y_1, y_2.

Таким образом, мы пришли к необходимости различать два случая:

I. Оба решения x_1, x_2 и y_1, y_2 уравнений (112′) различны, т. е. определитель $x_1y_2 - x_2y_1$ отличен от нуля или, если угодно, неизменная конфигурация $P_0P_1P_2$ есть треугольник.

II. Оба решения совпадают, т. е. три точки $P_0P_1P_2$ остаются на одной прямой линии.

Случай I. Так как уравнения (112′) допускают два различных решения, то все четыре коэффициента при неизвестных должны быть равны нулю, откуда прежде всего имеем

$$\frac{1}{\Delta_1^3} = \frac{1}{\Delta^3}, \quad \frac{1}{\Delta_2^3} = \frac{1}{\Delta^3},$$

так как $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$; после этого остальные два условия, выражающие равенство коэффициентов нулю, принимают один и тот же вид

$$\omega^2 = \frac{fm}{\Delta^3}, \tag{113}$$

где $m = m_0 + m_1 + m_2$. Поэтому мы заключаем, что треугольник $P_0 P_1 P_2$, как уже отмечено, неизменный, будет равносторонним и угловая скорость ω, с которой он вращается, постоянна и связана с длиной Δ стороны треугольника соотношением (113).

Почти излишне добавлять, что, так как центр тяжести системы неподвижен (относительно нашей галилеевой системы отсчета), абсолютное движение треугольника $P_0 P_1 P_2$ представляет собой равномерное вращение вокруг этого центра (ср. гл. III, пример 16).

Следует, однако, отметить, что это движение на самом деле зависит от двух произвольных постоянных: Δ или, если угодно, ω, связанной с Δ уравнением (113), и постоянной, определяющей начальную ориентацию треугольника в его плоскости относительно некоторого неподвижного направления.

Случай II. Если в некоторый момент мы примем за ось x прямую, на которой находятся в этот момент три тела, то будем иметь $y_1 = y_2 = 0$, поэтому нет необходимости более заниматься координатами y. Для определения x можно предположить, не нарушая общности, что точка P_0 заключена между точками P_1 и P_2 и что положительная сторона оси x направлена от P_0 к P_1. Тогда будем иметь $\Delta_1 = x_1$, $\Delta_2 = -x_2$, $\Delta = x_1 - x_2 = \Delta_1 + \Delta_2$, так что уравнения (112′) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1\omega^2 &= f\left(\frac{m_0+m_1}{\Delta_1^2} + \frac{m_2}{(\Delta_1+\Delta_2)^2} - \frac{m^2}{\Delta_2^2}\right), \\ \Delta_2\omega^2 &= f\left(\frac{m_0+m_2}{\Delta_2^2} + \frac{m_1}{(\Delta_1+\Delta_2)^2} - \frac{m_1}{\Delta_1^2}\right); \end{aligned}\right\} \tag{112''}$$

отсюда мы видим, если оставить пока в стороне вопрос о совместности этих двух уравнений и о действительности угловой скорости ω, что эта угловая скорость в силу неизменности величин Δ_1, Δ_2, Δ является и в этом случае постоянной, т. е. и здесь мы имеем равномерное вращение.

Что же касается вопроса о совместности уравнений (112″), то, исключая из них ω^2, мы получим условие

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 & [(m_0+m_1)\Delta_2^2 - m_2\Delta_1^2]\,[\Delta_1+\Delta_2]^2 + m_2\Delta_1^2\Delta_2^2 \\ \Delta_2 & [(m_0+m_2)\Delta_1^2 - m_1\Delta_2^2]\,[\Delta_1+\Delta_2]^2 + m_1\Delta_1^2\Delta_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое будет уравнением пятой степени и однородным относительно Δ_1, Δ_2. Полагая $A = \Delta_2/\Delta_1$, найдем уравнение (Лагранжа)

$$(m_0 + m_1) A^5 + (2m_0 + 3m_1) A^4 + (m_0 + 3m_1) A^3 + \\ + (m_0 + 3m_2) A^2 - (2m_0 + 3m_2) A - (m_0 + m_2) = 0,$$

которое, как это следует из расстановки знаков коэффициентов, допускает один и только один положительный корень (см. гл. III, упражнение 17).

Если отношение расстояний Δ_1, Δ_2 принимается равным этому корню, то уравнения (112″) дают для ω^2 одну и ту же величину, и достаточно сложить их по частям, чтобы получить эту величину в симметричном виде

$$\omega^2 = \frac{f}{\Delta_1 + \Delta_2} \left\{ m_0 \left(\frac{1}{\Delta_1^2} + \frac{1}{\Delta_2^2} \right) + \frac{m_1 + m_2}{(\Delta_1 + \Delta_2)^2} \right\};$$

из этого соотношения видно, что ω есть действительная величина.

В этом случае мы также имеем ∞^2 установившихся движений, так как остаются произвольными одно из двух расстояний Δ_1, Δ_2 и начальная ориентировка прямой $P_2P_0P_1$.

59. Тяжелое твердое тело, закрепленное в одной точке. Общий случай. Для изучения установившихся движений вернемся к рассуждениям п. 48, но в качестве параметров Лагранжа примем, как это было сделано в § 5 гл. VIII, проекции p, q, r угловой скорости на оси, неизменно связанные с телом и являющиеся главными осями инерции относительно неподвижной точки O, и направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3 нисходящей вертикали относительно этих неподвижных в теле осей.

В силу этого характеристическая функция, при обычных обозначениях, принимает вид

$$H = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - P(\gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0 + \gamma_3 z_0),$$

и интеграл моментов количеств движения $p_\varphi = \text{const}$ в явной форме будет

$$K_\zeta = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}. \tag{114}$$

Для определения установившихся движений мы должны положить $\delta H = 0$, при условии, что переменные связаны уравнением (114) и, конечно, геометрическим условием $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$; согласно п. 56 это выразится уравнением

$$\delta H - \nu \delta K_\zeta - \lambda(\gamma_1 \delta\gamma_1 + \gamma_2 \delta\gamma_2 + \gamma_3 \delta\gamma_3) = 0,$$

где λ и ν обозначают два неопределенных множителя.

Раскрывая это уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при δp, δq, δr, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$, мы получим две системы уравнений

$$p = \nu\gamma_1, \quad q = \nu\gamma_2, \quad r = \nu\gamma_3, \tag{115}$$

$$\left.\begin{aligned} Px_0 - \nu Ap - \lambda\gamma_1 = 0, \quad Py_0 - \nu Bq - \lambda\gamma_2 = 0, \\ Pz_0 - \nu Cr - \lambda\gamma_3; \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

из первого из них мы найдем, что ν есть проекция угловой скорости твердого тела на вертикаль, направленную вниз; теперь достаточно сопоставить уравнения (115) с уравнениями Пуассона

$$\dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p,$$

чтобы видеть, что γ_1, γ_2, γ_3 являются постоянными, т. е. что нисходящая вертикаль неподвижна в теле.

С другой стороны, исключая p, q, r из уравнения (114) посредством уравнений (115), найдем уравнение

$$\nu(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = \text{const},$$

которое обнаруживает постоянство ν; отсюда мы заключаем, что установившиеся движения сводятся к равномерным вращениям вокруг вертикали, проходящей через неподвижную точку.

Это — движения по Штауде, которые мы подробно изучили в пп. 25 и 26 и в упражнении 11 гл. VIII; для нахождения полученных там результатов нужно было бы лишь исследовать уравнения (115), (116).

60. Гироскоп с потенциалом, зависящим только от угла нутации. Случай Лагранжа — Пуассона. Здесь, кроме $A = B$, надо еще положить $x_0 = y_0 = 0$, а потенциал, предполагаемый зависящим только от θ, можно рассматривать как функцию от единственного аргумента $\gamma_3 = \cos\theta$. Мы уже знаем, что эти условия выполняются как при изучении влияния притяжения отдаленным телом Земли на ее вращение вокруг центра тяжести (п. 50), так и в задаче о движении тяжелого гироскопа (случай Лагранжа — Пуассона), для которого имеем $U = Pz_0\gamma_3$ (гл. VIII, § 6).

Характеристическая функция H и осевой момент K_ζ количеств движения относительно неподвижной оси ζ определяются во всех этих случаях уравнениями

$$H = \frac{1}{2}\{A(p^2 + q^2) + Cr^2\} - U(\gamma_3),$$
$$K_\zeta = A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3;$$

вместе с двумя интегралами $H = \text{const}$, $K_\zeta = \text{const}$ существует третий интеграл $p_\varphi = \text{const}$ или, в силу второго из уравнений (14) п. 5, интеграл $r = \text{const} = r_0$, который, так как $K_\zeta = p_\psi$, находится в инволюции с интегралом $K_\zeta = \text{const}$.

Отсюда следует на основании п. 53, что для гироскопа возможны ∞^4 движений Рауса, которые легко определить, следуя обычному способу п. 56.

Если, введя два неопределенных множителя λ и ν, мы развернем условие стационарности

$$\delta H - \nu\delta K_\zeta - A\lambda(\gamma_1\delta\gamma_1 + \gamma_2\delta\gamma_2 + \gamma_3\delta\gamma_3) = 0,$$

полагая в нем $r = r_0$ и, следовательно, $\delta r = 0$, то придем к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} p = \nu\gamma_1, \qquad & q = \nu\gamma_2, \\ \nu p + \lambda\gamma_1 = 0, \quad & \nu q + \lambda\gamma_2 = 0, \\ C\nu r_0 + A\lambda\gamma_3 = & -\frac{\partial U}{\partial\gamma_3}, \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

где, в случае тяжелого гироскопа, надо взять

$$\frac{\partial U}{\partial\gamma_3} = Pz_0.$$

Вторая пара уравнений (117), если исключим из нее p и q при помощи первых двух, дает

$$(\nu^2 + \lambda)\gamma_1 = 0, \quad (\nu^2 + \lambda)\gamma_2 = 0,$$

так что должно быть или

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,$$

или

$$\lambda = -\nu^2.$$

В первом случае, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и, следовательно, $\gamma_3 = \pm 1$, гироскопическая ось z все время сохраняет направление (в ту или другую сторону) неподвижной оси ζ и, в частности, вертикальное направление, если действующие силы сводятся к весу; гироскоп равномерно вращается вокруг этой оси с угловой скоростью, проекции которой суть $p = q = 0$, $r = r_0$ (гл. VIII, п. 35). Как известно, это движение осуществляется (теоретически — строго, практически — с хорошим приближением) волчком (гл. VIII, п. 42), если позаботиться о том, чтобы в начальный момент его ось была вертикальна (спящий волчок).

Во втором случае основные уравнения (117), если исключить λ (и заметить, что λ и ν не могут исчезать одновременно, если речь идет о действительном движении), приведутся к виду

$$p = \nu\gamma_1, \quad q = \nu\gamma_2, \quad C\nu r_0 = A\nu^2\gamma_3 - \frac{\partial U}{\partial\gamma_3}; \tag{117'}$$

подставляя в интеграл момента количеств движения вместо p и q выражения, определяемые этими уравнениями, мы придем к уравнению

$$A\nu(1 - \gamma_3^2) + Cr_0\gamma_3 = \text{const}.$$

Так как теперь можно исключить случай $\gamma_3 = \pm 1$, уже рассмотренный выше, то это уравнение будет разрешимо относительно ν и определит эту величину только через γ_3 (и через структурные и механические постоянные). Достаточно тогда это значение ν внести в третье из уравнений (117), чтобы получить одно уравнение с одним только γ_3, откуда заключаем, что γ_3 есть постоянная величина, а в силу этого такой же будет и ν.

Из неизменности γ_3 следует также, что ось гироскопа описывает круговой конус вокруг неподвижной оси $O\zeta$; с другой стороны, принимая во внимание, что также и ν является постоянной, и записывая уравнения (117′) в виде

$$p = \nu\gamma_1 + 0, \quad q = \nu\gamma_2 + 0, \quad r_0 = \nu\gamma_3 + \frac{A-C}{C}\nu\gamma_3 - \frac{1}{C\nu}\frac{\partial U}{\partial \gamma_3},$$

мы найдем, что угловая скорость тела может быть разложена в векторную сумму двух постоянных составляющих — одной, направленной по неподвижной оси ζ и измеряемой по величине и по знаку числом ν, и другой, направленной по гироскопической оси и измеряемой аналогично числом

$$\mu = \frac{A-C}{C}\nu\gamma_3 - \frac{1}{C\nu}\frac{\partial U}{\partial \gamma_3} = r_0 - \nu\gamma_3. \tag{118}$$

Следовательно, мы имеем здесь дело с правильной прецессией (т. I, гл. IV, п. 15), с угловой скоростью прецессии ν и собственной угловой скоростью тела μ, которые в случае тяжелого гироскопа совпадают с угловыми скоростями, уже изученными подробно в п. 37 гл. VIII; легко проверить, что, полагая в уравнении (118) $\partial U/\partial\gamma_3 = Pz_0$, мы снова возвращаемся к характеристическому уравнению (74′), цитированному в п. 37 гл. VIII.

Каковы бы ни были при принятых предположениях действующие силы, эта прецессия в согласии с общим результатом п. 53 зависит от четырех произвольных постоянных: двух из трех постоянных μ, ν, γ_3, связанных уравнением (118), и начальных величин углов Эйлера φ и ψ.

Необходимо, наконец, заметить, что когда прецессия оказывается медленной, т. е. когда угловая скорость прецессии ν мала по сравнению с гироскопической скоростью r_0 (и, следовательно, также по сравнению с μ), то, пренебрегая членами с ν^2 в равенстве (117′), получим

$$\nu = -\frac{1}{Cr_0}\frac{\partial U}{\partial \gamma_3}. \tag{119}$$

61. Динамическое объяснение земной прецессии и определение массы Луны. Уже в кинематике (т. I, гл. IV, п. 19) мы описали регулярную прецессию, к которой в первом приближении приводится движение Земли вокруг ее центра тяжести O. Здесь на основе рассуждений предыдущего пункта вместе с рассуждениями п. 50 можно дать

этой прецессии динамическое объяснение; легко убедиться, что мы имеем здесь дело с одной из тех медленных прецессий, которые согласно только что приведенным теоретическим соображениям можно объяснить в случае Земли лунно-солнечным притяжением, если довольствоваться оценкой его среднего действия за очень длительный период, или вековым действием.

Чтобы выполнить эту проверку, начнем с замечания, обращаясь к соображениям п. 50, что комбинированное притяжение Солнцем и Луною Земли, как происходящее от отдаленных тел, можно с достаточным приближением вывести на основании формулы (103) и добавочного введения ньютонова потенциала из потенциала

$$U = -\frac{3}{4}(C-A)(1-\gamma_3^2)\left(n^2 + \frac{n'^2}{1+\frac{m_0}{m'}}\right),$$

где через n, n' обозначены средние движения Солнца и Луны (гл. III, п. 10), через m_0 и m' — массы Земли и Луны и в слагаемом, относящемся к Солнцу, т. е. в делителе n^2, подставлена 1 вместо двучлена $1+m_0/m$ вследствие малости земной массы m_0 по сравнению с солнечной массой m.

Так как этот потенциал зависит исключительно от γ_3, то непосредственно приложимы результаты предыдущего пункта; так как земная прецессия является медленной, то нам придется проверить, будет ли удовлетворяться уравнение (119), когда в качестве потенциала U берут только что указанный потенциал лунно-солнечного притяжения и величинам r_0 и ν приписывают значения угловых скоростей, которые соответственно принадлежат суточному вращению Земли и платоническому году (около 26 000 звездных лет). На самом деле угловая скорость суточного вращения Земли была бы здесь строго равна величине μ, определенной из уравнения (118); но вследствие малости ν по сравнению с μ на основании того же уравнения (118) можно принять r_0, как было сказано, совпадающим с μ.

Далее, уравнение (119) после подстановки вместо U указанного выше выражения и деления обеих частей на r_0^2 принимает вид

$$-\frac{\nu}{r_0} = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\gamma_3 \cdot \frac{1}{r_0^2}\left(n^2 + \frac{n'^2}{1+\frac{m_0}{m'}}\right). \qquad (119')$$

Принимая во внимание, что отношения угловых скоростей можно отождествить с обратными отношениями соответствующих периодов и что продолжительности обращения Солнца и Луны в солнечных днях равны соответственно $365^1/_4$ и $27^1/_3$, придется положить для земной прецессии

$$\frac{n}{r_0} = \frac{1}{365{,}25}, \quad \frac{n'}{r_0} = \frac{1}{27{,}33},$$

тогда как в п. 19 гл. IV т. I мы видели, что

$$-\frac{\nu}{r_0}=\frac{1}{9\cdot 10^6},\quad \gamma_3=\cos 23^\circ 30'=0{,}917.$$

При этих численных значениях и, принимая для отвлеченных чисел m_0/m', $(C-A)/C$ значения 82 и $^1/_{305}$, которые можно вывести из других астрономо-геодезических соображений, мы установим, что уравнение (119′) будет удовлетворяться с достаточной степенью точности; мы получили, таким образом, указанное выше доказательство причинной зависимости между лунно-солнечным притяжением и земной прецессией.

Заметим, что, так как в действительности между всеми элементами, входящими в уравнение (119′), элементом наименее доступным для измерения каким-либо другим путем является отношение m_0/m' массы Земли к массе Луны, то с астрономической точки зрения наибольший интерес, который представляет формула (119′), будет заключаться именно в том, чтобы дать хорошую численную оценку этого отношения, если заранее считается достоверным, что земная прецессия происходит от лунно-солнечного притяжения.

Следует заметить, что аддитивное свойство потенциала отражается также и на угловой скорости ν, которая аналогично может рассматриваться как сумма двух слагаемых ν_1, ν_2, происходящих первое от действия Солнца, второе от действия Луны; из уравнения (119′) соответственно двум слагаемым потенциала получим

$$-\frac{\nu_1}{r_0}=\frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\gamma_3\frac{n^2}{r_0^2},\quad -\frac{\nu_2}{r_0}=\frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\gamma_3\frac{n'^2}{r_0^2\left(1+\frac{m_0}{m'}\right)},$$

так что будем иметь

$$\frac{\nu_2}{\nu_1}=\left(\frac{n'}{n}\right)^2\frac{1}{1+\frac{m'}{m}}.$$

Так как n'/n есть не что иное, как отношение одного года к одному лунному месяцу, т. е. приблизительно 13,4, то найдем

$$\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{169}{83}=2{,}13,$$

откуда следует, что влияние Луны на земную прецессию будет более чем вдвое интенсивнее влияния Солнца.

§ 11. Интегрирование уравнений Гамильтона — Якоби посредством разделения переменных

62. Случай интегрируемости Лиувилля. Интегрирование канонической системы было сведено в § 6 к определению полного интеграла для соответствующего уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби.